Le calcul d'une paire d'ellipse d'erreur dont la forme est circulaire

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **49 (1951)**

Heft 8

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-208350

cette fonction. Nous écrivons alors les équations de condition aux corrections sous la forme

$$(2.13)\qquad \boxed{a_i\, d\tau + b_i\, d\omega + w_i + v_{\varphi_i} = 0}$$

et il suffit maintenant de choisir pour poids p_{φ_i} de cette fonction

$$(2.14)\qquad \boxed{\frac{1}{p_{\varphi_i}} = \frac{\alpha_i\,\alpha_i}{p_x} + \frac{\beta_i\,\beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i\,\gamma_i}{p_z}.}$$

Mais nous tournons dans un cercle vicieux et arrivons chaque fois au même résultat. L'essentiel dans ce que nous venons de dire est que les équations (1.8) peuvent toujours être remplacées par des équations aux erreurs fictives de la forme

$$(2.15)\qquad \boxed{v_i = a_i\, d\tau + b_i\, d\omega + w_i}$$

sans préciser la nature des v_i à condition de choisir convenablement les poids de ces dernières équations aux erreurs.

Pour bien se rendre compte de l'importance pratique de ces résultats, on est obligé de considérer des problèmes particuliers et notamment des problèmes d'astronomie de position. Mais comme ceci nous amènerait trop loin, nous espérons pouvoir y revenir plus tard.

Publications:

[1] Th. Niethammer «Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung».

[2] C. F. Baeschlin «Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung». Schweiz. Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, 1948.

Le calcul d'une paire d'ellipses d'erreur dont la forme est circulaire

Par A. Ansermet, Professeur, La Tour-de-Peilz

Le calcul des réseaux géodésiques est effectué tantôt point par point, tantôt par groupes de points. Les deux modes de détermination présentent des avantages et des inconvénients qui sont bien connus des praticiens. En opérant point par point il est aisé de fixer a priori les conditions pour lesquelles l'ellipse d'erreur a une forme circulaire (voir [1] p. 239–243 et [2] p. 29–33). Il faut exprimer que l'orientation des axes de l'ellipse est indéterminée:

$$(1)\qquad \operatorname{tg} 2\,N = \frac{\left[p\,\dfrac{\sin 2\,\varphi}{s^2}\right]}{\left[p\cdot\dfrac{\cos 2\,\varphi}{s^2}\right]} = \frac{0}{0} \qquad (N = \text{azimut des axes})$$

Les p, les φ et les s définissent respectivement les poids, les gisements et les longueurs des visées servant à déterminer le point.

L'équation de l'ellipse d'erreur est elle-même:

$$(2) \qquad x^2 \left[p \frac{\cos^2 \varphi}{s^2} \right] - xy \left[p \frac{\sin 2 \varphi}{s^2} \right] + y^2 \left[p \frac{\sin^2 \varphi}{s^2} \right] - \frac{m^2}{\rho^2} = 0$$

où $\quad m^2 = [p\ v\ v]: (n - u) \qquad$ (u inconnues, n observations)

Ces équations sont valables pour des réseaux trigonométriques; en général il faut distinguer 3 modes de détermination:

1° par des mesures angulaires
2° par des mesures linéaires
3° par des mesures linéaires et angulaires combinées.

On sait qu'il n'est pas toujours facile d'établir une corrélation entre les poids des mesures angulaires et linéaires.

Considérons deux sommets voisins (x, y) et (x', y') du réseau.

Les formules usuelles sont:

$$y' - y = s \cdot \sin \varphi \qquad\qquad x' - x = s \cdot \cos \varphi$$

$$dy' - dy = s \cdot \cos \varphi \cdot d\,\varphi + \sin \varphi \cdot ds$$

$$dx' - dx = - s \cdot \sin \varphi \cdot d\,\varphi + \cos \varphi \cdot ds:$$

éliminons successivement $d\,\varphi$ puis ds:

$$(3) \qquad \sin \varphi \cdot dy' + \cos \varphi \cdot dx' - \sin \varphi \cdot dy - \cos \cdot \varphi\, dx = ds$$

$$(4) \qquad \cos \varphi \cdot dy' - \sin \varphi \cdot dx' - \cos \varphi \cdot dy + \sin \varphi \cdot dx = s \cdot d\varphi$$

($d\,\varphi$ radians)

Les équations aux erreurs sont basées sur ces formules dans les trois cas énumérés ci-dessus.

Il convient avant de poursuivre, de rappeler succintement les diverses formes sous les quelles se présente l'ellipse d'erreur:

I. L'ellipse est l'enveloppe d'une rectangle dont la diagonale a une longueur constante; l'ellipse est en fait définie par sa podaire par rapport au centre de la courbe.

II. On calcule les erreurs moyennes des quantités mesurées après la compensation; ces éléments fournissent des paires de tangentes.

III. L'ellipse est définie par une paire de diamètres conjugués (observations équivalentes); on sait que la correspondance entre deux diamètres est involutive; le cas idéal est celui où les diamètres sont égaux car les bissectrices de ceux-ci coïncident avec les axes de la courbe.

IV. Désignons par (x, y) les coordonnées du point compensé résultant de la condition $[pvv]$ = minimum et considérons un point très voisin $(x + \delta x, y + \delta y)$. Ces variations de coordonnées donnent lieu à une valeur v' au lieu de v:

$$v' = a\delta y + b\delta x + v$$

et, en tenant compte des équations normales, dont la forme implicite est

$$[pav] = 0 \qquad [pbv] = 0$$

$$[pv'v'] = [pvv] + [paa]\,\delta y^2 + 2[pab]\,\delta x\,dy + [pbb]\,\delta x^2$$

ou plus simplement:

$$[pv'v'] = [pvv] + m^2 \tag{5}$$

Cette façon de traiter le problème est bien connue (voir [2] p. 32); dans le cas du double-point on ne peut pas dissocier les erreurs propres à chacun des points. Le rappel de ces notions n'est pas inutile au moment d'aborder le calcul simultané d'une paire d'ellipses d'erreurs.

Calcul d'une paire d'ellipses

Le problème sera traité en admettant des mesures linéaires; s'il s'agissait de mesures angulaires le même raisonnement subsisterait. Il y a toutefois une différence en ce qui concerne le système d'équations aux erreurs: il y a une seule équation à 4 inconnues dans le cas de mesures linéaires et, en général, deux équations à 4 inconnues si les mesures sont angulaires (les inconnues dites «d'orientation» étant au préalable éliminées).

Dans les deux hypothèses il y a 4 équations normales:

$$[pav] = [pbv] = [pcv] = [pdv] = 0$$

où les a, b, c, d sont les coefficients directeurs connus; les équations (3) et (4) fournissent ces valeurs.

Formulons encore une remarque avant de poursuivre: il est possible de construire une ellipse d'erreur même s'il n'y a pas sur-détermination, c'est-à-dire en l'absence de mesures surabondantes ($n = u$); mais il faut connaître a priori la valeur de m, car ici on a:

$$m^2 = \frac{[pvv]}{n-u} = \frac{0}{0} \quad \text{(indétermination).}$$

Désignons par A (x_a, y_a) et B (x_b, y_b) les points à déterminer donc inconnus; les vraies inconnues sont les corrections (dx_a, dy_a) et (dx_b, dy_b) à apporter aux valeurs provisoires des coordonnées.

Les coefficients de ces inconnues dans le système des 4 équations normales sont:

$$\begin{array}{cccc} [paa] & [pab] & [pac] & [pad] \\ & [pbb] & [pbc] & [pbd] \\ & & [pcc] & [pcd] \\ & & & [pdd] \end{array}$$

Les termes absolus ne jouent guère de rôle dans ce développement. En fonction de ces 10 coefficients on peut calculer les 4 coefficients de poids:

$$Q_{11} = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \; Q_{22} = \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \; Q_{33} = \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right], \; Q_{44} = \left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$$

ainsi que les 6 coefficients non-quadratiques (voir [1]):

$$Q_{12} = \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \; Q_{13} = \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \; Q_{14} = \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right], \; Q_{23} = \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right],$$

$$Q_{24} = \left[\frac{\beta\delta}{p}\right], \; Q_{34} = \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right]$$

Le premier et le dernier de ces coefficients jouent seuls un rôle ici. Arrivés à ce stade du problème il faut faire la discrimination entre trois solutions:

1° *Solutions sans élimination d'inconnues.* C'est la plus connue et il n'y a pas lieu de s'y attarder. Les conditions relatives à la forme circulaire des ellipses d'erreur sont:

$$M^2{x_a} = m^2 \cdot Q_{11} = M^2{y_a} = m^2 \cdot Q_{22}; \quad M^2{x_b} = m^2 \cdot Q_{33} = M^2{y_b} = m^2 \cdot Q_{44}$$

et en plus $\qquad Q_{12} = 0 \qquad\qquad Q_{34} = 0$

On se rend tout de suite compte de la complexité du problème; c'est en partie la conséquence de la mesure de la longueur AB. La seconde solution et éventuellement la troisième, se prêtent mieux, à certains égards à une telle discussion.

2° *Solution par une élimination partielle.*

L'élimination porte d'abord sur les deux inconnues dx_a et dy_a; seules subsistent dx_b, dy_b dont les coefficients sont, dans les équations normales:

$$\begin{matrix} [pcc \cdot 2] & [pcd \cdot 2] \\ [pcd \cdot 2] & [pdd \cdot 2] \end{matrix}$$

Le problème revêt alors une forme qui est familière; il suffit ensuite d'inverser l'ordre d'élimination, c'est-à-dire d'opérer une permutation entre les coefficients a et b d'une part, c et d d'autre part. Les inconnues qui subsistent sont maintenant dx_a et dy_a. Un cas concret fera mieux comprendre cette permutation.

Considérons des points donnés, connus: P_1, P_2, P_3, P_4 reliés aux points nouveaux A et B par des mesures linéaires: P_1A, P_2A, P_3B, P_4B.

Le tableau des coefficients directeurs sera le suivant:

$P_1 A$	a_1	b_1			poids p_1
$P_2 A$	a_2	b_2			poids p_2
AB	a_3	b_3	c_3	d_3	poids p_3
$P_3 B$			c_4	d_4	poids p_4
$P_4 B$			c_5	d_5	poids p_5

Sous cette forme générale le problème est complexe; le nombre des conditions exprimant la forme circulaire des ellipses d'erreur est inférieur à ce qui serait strictement nécessaire. Les poids p_1, p_2, p_3 ... sont ici au nombre de cinq; c'est un minimum. Il faut admettre une certaine symétrie dans le choix des données du problème pour en faciliter l'analyse. Considérons donc les tableaux ci-après, parmi les nombreuses hypothèses possibles:

	a	b	c	d	poids	a	b	c	d
$P_1\,A$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$			p	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$		
$P_2\,A$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$			p	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$		
$A\,B$	0	1	0	-1	1	0	1	0	-1
$P_3\,B$			$-\sin\alpha'$	$-\cos\alpha'$	p'			$\sin\alpha'$	$\cos\alpha'$
$P_4\,B$			$\sin\alpha'$	$-\cos\alpha'$	p'			$-\sin\alpha'$	$\cos\alpha'$

Le système d'équations normales est le même pour les deux tableaux en ce qui concerne les coefficients des inconnues:

$$[paa] = 2p\sin^2\alpha; \quad [pbb] = 1 + 2p\cos^2\alpha; \quad [pcc] = 2p'\sin^2\alpha'$$

$$[pdd] = 1 + 2p'\cos^2\alpha'; \qquad [pbd] = -1$$

$$[pab] = [pac] = [pad] = [pbc] = [pcd] = 0$$

$$[pbb\cdot 1] = [pbb]; \quad [pbc\cdot 1] = 0; \quad [pbd\cdot 1] = [pbd]$$

$$[pcc\cdot 1] = [pcc]; \quad [pcd\cdot 1] = 0; \quad [pdd\cdot 1] = [pdd]$$

$$[pcc\cdot 2] = [pcc\cdot 1]; \quad [pcd\cdot 2] = 0; \quad [pdd\cdot 2] = [pdd\cdot 1] - \frac{1}{[pbb\cdot 1]} = [pdd\cdot 3]$$

L'ellipse d'erreur aura une forme circulaire pour:

$$[pcc\cdot 2] = [pdd\cdot 2] = \frac{1}{Q_{44}} = \frac{1}{Q_{33}} \tag{6}$$

ou en développant:

$$2p'\sin^2\alpha' = 1 + 2p'\cos^2\alpha' - \frac{1}{1+2p\cos^2\alpha} =$$

$$\frac{2p\cos^2\alpha + 2p'\cos^2\alpha' + 4pp'\cos^2\alpha\cos^2\alpha'}{1+2p\cos^2\alpha}$$

$$p'\sin^2\alpha' = \frac{p\cos^2\alpha + p'\cos^2\alpha' + 2pp'\cos^2\alpha\cos^2\alpha'}{1+2p\cos^2\alpha} = \frac{K}{1+2p\cos^2\alpha} \tag{7}$$

Il suffit maintenant de permuter p et α avec p' et α';

$$p\sin^2\alpha = \frac{K}{1+2p'\cos^2\alpha'} \qquad (K \text{ ne change pas}) \tag{8}$$

A cause de la symétrie il n'y a pas à s'occuper des coefficients non-quadratiques.

Les deux relations (7) et (8) expriment que la forme des ellipses d'erreur est circulaire; or il y a 4 quantités arbitraires (p, p', α, α'). Ecrivons pour simplifier:

$$\cos^2 \alpha = u \qquad \cos^2 \alpha' = v$$

$$p > 0, \quad p' > 0, \quad +1 > u > 0, \quad +1 > v > 0$$

(9) $$p'(1-v)(1+2pu) = pu + p'v + 2pp'uv = p(1-u)(1+2p'v)$$

C'est un problème du 2d degré. Il faut choisir deux éléments par ex. p et p'.

Cas particulier: $p = p'$ entraîne $u = v$ ($\alpha = \alpha'$). Ce qui pouvait se présumer; les deux cercles d'erreur sont égaux. On a immédiatement:

(10) $$4\,pu^2 + (3 - 2p)\,u - 1 = 0$$

$$u = \frac{(2p - 3) \pm \sqrt{4p^2 + q + 4p}}{\delta\, p} = v$$

Examinons quelques cas concrets:

$$p = p' = 0{,}5, \quad u = v = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0.366 = \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha'$$

$$p = p' = 1, \quad u = v = \frac{\sqrt{17} - 1}{8} = 0.39 = \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha'$$

$$p = p' = 1{,}5, \quad u = v = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0.41 = \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha'$$

$$p = p' = 2, \quad u = v = \frac{\sqrt{33} + 1}{16} = 0.42 = \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha'$$

Cette variation de $\alpha = \alpha'$ est relativement lente.

Reprenons le cas général où les cercles d'erreur ne sont plus égaux et appliquons les formules (9) pour quelques valeurs numériques:

$p =$	$p' =$	$u = \cos^2 \alpha$	$v = \cos^2 \alpha'$	$2p' \sin^2 \alpha' = \frac{1}{Q_{33}} = \frac{1}{Q_{44}}$	$2p \sin^2 \alpha = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{Q_{22}}$
1	1.5	0.36	0.43	$3 \times 0.57 = 1.71$	$2 \times 0.64 = 1.28$
1	2.0	0.34	0.45	$4 \times 0.55 = 2.20$	$2 \times 0.66 = 1.32$
1	2.5	0.325	0.46	$5 \times 0.54 = 2.70$	$2 \times 0.675 = 1.35$

On pourrait multiplier les exemples en prenant comme arguments non plus p et p' mais α et α'. Ces résultats peuvent être contrôlés aisément en ayant recours à une

3° *Solution par l'élimination des inconnues*

Entre les 5 équations aux erreurs il suffit d'éliminer les 4 inconnues dx_a, dy_a, dx_b, dy_b. On obtient une nouvelle équation sous forme de déterminant de 5e ordre:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & v_1 + l_1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & v_2 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & v_3 + l_3 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha' & -\cos\alpha' & v_4 + l_4 \\ 0 & 0 & \sin\alpha' & -\cos\alpha' & v_5 + l_5 \end{vmatrix} = 0$$

où les $l_1, l_2 \ldots l_5$ sont les quantités mesurées; le déterminant développé donne:

$$[Av] + [Al] = 0$$

où $\quad A_1 = A_2 = \cos\alpha'; \quad A_3 = -2\cos\alpha\cos\alpha'; \quad A_4 = A_5 = \cos\alpha$

et l'on appliquera la formule connue qui exprime les poids des éléments compensés $(l_i + v_i)$:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\dfrac{A_i}{p_i}\right)^2}{\left[\dfrac{AA}{p}\right]} \ldots\ldots (i = 1{,}2 \ldots 5) \qquad \text{(voir [3]).}$$

$$\left[\frac{AA}{p}\right] = 2\,\frac{\cos^2\alpha'}{p} + \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'}{1} + 2\,\frac{\cos^2\alpha}{p'} =$$

$$\frac{2\,p\cos^2\alpha + 2\,p'\cos^2\alpha' + 4\,pp'\cos^2\alpha\cos^2\alpha'}{pp'} = \frac{2\,K}{pp'}$$

Désignons par $P_1', P_2' \ldots P_5'$ les poids des quantités compensées $(l_1 + v_1), (l_2 + v_2) \ldots (l_5 + v_5)$. La symétrie entraîne les relations:

$P_1' = P_2'$ et $P_4' = P_5'$ et pour les inverses de ces P_i':

$$\frac{1}{P_1'} = \frac{1}{P_2'} = \frac{1}{p} - \frac{\dfrac{\cos^2\alpha'}{p^2}}{\left[\dfrac{AA}{p}\right]}; \quad \frac{1}{P_3} = 1 - \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'}{\left[\dfrac{AA}{p}\right]};$$

$$\frac{1}{P_4'} = \frac{1}{P_5'} = \frac{1}{p'} - \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{p'^2}}{\left[\dfrac{AA}{p}\right]}$$

et en groupant les résultats:

p	p'	$\cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha'$	K	$\left[\frac{AA}{p}\right]$	$\frac{1}{P_1'}=\frac{1}{P_2'}$	$\frac{1}{P_3'}$	$\frac{1}{P_4'}=\frac{1}{P_5'}$	$P_1'=P_2'$	P_3'	$P_4'=P_5'$
1	1.5	0.36	0.43	1.47	1.96	0.78	0.685	0.586	1.28	1.45	1.71
1	2.0	0.34	0.45	1.85	1.85	0.757	0.67	0.454	1.32	1.49	2.20
1	2.5	0.325	0.46	2.22	1.776	0.741	0.662	0.371	1.35	1.51	2.70

On vérifie immédiatement que, pour ces valeurs particulières:

$$P_1' = P_2' = 2\,p \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad P_4' = P_5' = 2\,p' \sin^2 \alpha'$$

relation exigée par la forme circulaire des ellipses d'erreur

Contrôle final: (voir [3]*)* (*u* inconnues)

$$p=1 \quad p'=1.5, \quad \left[\frac{p}{P'}\right] = 2 \times 0.78 \;+0.685 + 2 \times 1.5 \times 0.586 = 4.00 = u$$

$$p=1 \quad p'=2.0, \quad \left[\frac{p}{P'}\right] = 2 \times 0.757 + 0.67 \;+2 \times 2.0 \times 0.454 = 4.00 = u$$

$$p=1 \quad p'=2.5, \quad \left[\frac{p}{P'}\right] = 2 \times 0.741 + 0.662 + 2 \times 2.5 \times 0.371 = 4.00 = u$$

En *résumé* le problème de la paire d'ellipses de forme circulaire est plus complexe que celui d'une ellipse d'erreur considérée isolément; on le présumait. Le problème n'est ici qu'ébauché et limité au cas de mesures linéaires qui gagne toujours en importance. Suivant les cas on appliquera l'une ou l'autre des 3 solutions développées ci-dessus.

Littérature:

[1] Baeschlin C. F., Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (1935–1936).

[2] Hohenner H., Graphisch-mechanische Ausgleichuug eingeschalteter Punkte (Stuttgart, 1904).

[3] Schweiz. Zeitschrift für Vermessung 1945 (Nr. 8, p. 176).

Neuordnung der Vervielfältigung des Übersichtsplanes der Schweizerischen Grundbuchvermessung

Von Dipl. Ing. H. Härry, Eidg. Vermessungsdirektor, Bern

1. Die Aufgabe

Die Vervielfältigung des Übersichtsplanes ist zweifellos eine Aufgabe, deren Bedeutung für die Verwaltung, Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaft unseres Landes eine raschere Reform verdiente, als es die Verhältnisse bisher ermöglichten. Diese Aufgabe ist sowohl den an der Erstellung und Nachführung der Schweizerischen Grundbuchvermessung beteiligten Amtsstellen des Bundes, der Kantone und Gemeinden, wie den frei praktizierenden Grundbuchgeometern und ihrem Personal gestellt. Außerhalb der Grundbuchvermessung fehlen die Rechtsgrundlagen zu einer Ordnung über die einheitliche Reproduktion des Übersichtsplanes, wobei die Einheitlichkeit so zu verstehen sein wird, daß sie in den vom Allgemeininteresse gegebenen Grenzen gehalten wird.