

Klothoide und kubische Parabel

Autor(en): **Conzett, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **49 (1951)**

Heft 9

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-208354>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

denklich, für Distanzen $D \sim 20$ m sogar Neigungen bis zu 2 cm/85 cm, wenn ein Distanzfehler $\Delta D = 1$ cm in Kauf genommen wird.

Für Instrumente mit Ablesung in zwei um den Betrag δ^* verschobenen Schnittgeraden ist zu unterscheiden, in welchem Sinne die Querlatte geneigt ist.

Für nach rechts unten geneigte Querlatte (α negativ, Abb. 7) werden bei einer Verschiebung $\delta = 23$ mm und einer Konvergenz $\gamma = 10''$ schon bei einer Neigung 0,5 cm/85 cm Distanzfehler in der Größenordnung von 1,35—1,17 cm für Distanzen von 5 m—150 m erhalten. Es ist daraus ersichtlich, daß eine Neigung $\alpha = \arcsin 0,5/85$ unter allen Umständen vermieden werden muß. In diesem Falle werden durchwegs zu kleine Ablesungen erhalten.

Nach rechts oben geneigte Querlatte (α positiv, Abb. 8a und 8b). Auch hier ist eine Neigung von $\alpha = \arcsin 0,5/85$ unter allen Umständen zu vermeiden, da dabei schon Distanzfehler von 1,33—0,65 cm für Distanzen von 5 m—150 m erhalten werden bei den gleichen Werten von δ und γ wie oben aufgeführt. In diesem Falle werden für Neigungen $\alpha \leq \arcsin 1$ cm/85 cm und sämtliche vorkommende Distanzen zu große Ablesungen erhalten. Dies trifft auch noch für eine Neigung $\alpha \leq \arcsin 2$ cm/85 cm bis zu einer Distanz von ~ 140 m zu.

Abschließend muß noch darauf hingewiesen werden, daß beim Instrument von Boßhardt-Zeiß für kleine Distanzen ähnliche Distanzfehler erhalten werden, während diese für größere Distanzen kleiner ausfallen zufolge der größeren Konvergenz der beiden verschobenen Bildebenen.

Klothoide und kubische Parabel

Von R. Conzett, dipl. Ing.

Assistent am Geodätischen Institut ETH

Die folgenden Ausführungen sind auf Anregung von Herrn Professor Kobold im Geodätischen Institut der ETH entstanden und beziehen sich auf den Aufsatz von Herrn Kantonsgeometer E. Bachmann: «Die Klothoide als Übergangskurve im Straßenbau», der in der SZVK Nr.6 1951 veröffentlicht wurde. Es soll im folgenden der Zusammenhang zwischen der Klothoide und der kubischen Parabel bei der Anwendung als Übergangskurve gezeigt werden.

Man pflegt an Übergangskurven die Forderung zu stellen, daß sich die Krümmung proportional zur Bogenlänge ändern soll. Bezeichnet man mit k die Krümmung, mit r den Krümmungsradius, mit s die Bogenlänge und mit a^2 einen Parameter, so folgt aus der erwähnten Bedingung die Gleichung

$$(1) \quad k = \frac{1}{r} = \frac{s}{a^2}$$

Im Endpunkt der Übergangskurve sei die Bogenlänge $s = S$, und der Krümmungsradius r wird gleich dem Kreisradius R . Daraus ergibt sich als Parameter

$$(2) \quad a = \sqrt{RS}.$$

Gleichung (1) ist die sog. *natürliche Gleichung der Klothoide*; sie ist eine Differentialgleichung, weil k als

$$(3) \quad k = \frac{da}{ds}$$

definiert ist. da bedeutet die unendlich kleine Änderung der Tangentenrichtung der Kurve. Bezieht man die Gleichung (1) auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der x -Axe in Richtung der Ausgangsgeraden und y normal dazu in Richtung des Kreismittelpunktes, so wird sie wegen

$$a = \text{arc tg} \left(\frac{dy}{dx} \right); \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

und bei Durchführung der Differenzierung in (3) zu

$$(4) \quad k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \frac{1}{a^2} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Da die Übergangskurve immer verhältnismäßig flach ist, wird $\frac{dy}{dx} \ll 1$, so daß man in (4) die Wurzelausdrücke in binomische Reihen entwickeln darf. Es wird

$$(5) \quad k = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + Gl_4 \right] = \frac{1}{a^2} \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + Gl_4 \right] dx$$

Bei Vernachlässigung der Größenordnung $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ gegenüber 1 erhält man aus (5) sofort die Differentialgleichung der kubischen Parabel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{a^2},$$

die integriert die Vergleichsform

$$y = \frac{x^3}{6 a^2}$$

darstellt.

Es ist somit weder die Klothoide eine «neue» Übergangskurve noch die kubische Parabel die «den besondern Fahreigenschaften der Bahnen angepaßte Übergangskurve». Die kubische Parabel als Übergangskurve ist nichts anderes als das Resultat einer genäherten Integration der Differentialgleichung der Klothoide und somit *grundsätzlich* in der Anwendung im Straßen- und Eisenbahnbau dieselbe Übergangskurvenform. Fraglich ist nur, ob die Näherung vom praktischen Standpunkt aus genügt.

Die Auswirkungen der Näherung gegenüber der streng durchgeführten Integration sollen deshalb im folgenden näher untersucht werden.

Vorerst wird ein rein numerischer Vergleich anhand des von Bachmann durchgerechneten Beispiels angestellt:

Die Ordinaten der Übergangskurve zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen mit dem Radius $R = 300$ m und einer Übergangsbogenlänge von 60.75 m ($a = 135$ m) werden für die Klothoide einerseits und für die entsprechende kubische Parabel andererseits gerechnet. Die Abszissen x sind dabei durch die Klothoidentabelle gegeben (Tabelle 1).

Tabelle 1

Abszisse x in m	Ordinate y in m		Differenz in mm
	Klothoide	kubische Parabel	
0.000	0.000	0.000	—
6.750	0.002	0.002	—
13.500	0.022 ⁵	0.022 ⁵	—
20.250	0.076	0.076	—
27.000	0.180	0.180	—
33.747	0.351 ⁵	0.351 ⁵	—
40.492	0.607	0.607	—
47.232	0.964	0.964	—
53.965	1.439	1.437	2
60.688	2.049	2.044	5

Als größter Unterschied in den Ordinaten zwischen der Klothoide und der kubischen Parabel ergibt sich also ein Wert von 5 mm. Für eine Straßenabsteckung darf man unbedenklich von identischen Übergangskurven sprechen.

Doch ist es Sache der Straßenbaufachleute, festzustellen, wie hoch die Anforderungen an die Innehaltung der theoretisch besten Übergangskurvenform sind, und Toleranzen festzusetzen, die ohne spürbare Nachteile für den modernen Straßenverkehr nicht überschritten werden dürfen. In Ermangelung anderer Angaben soll hier ein Auszug aus einer deutschen Publikation* wiedergegeben werden:

«Abweichungen in der Krümmung bis etwa 10% sind auf jeden Fall praktisch bedeutungslos ... die Größenordnung dieses Maßes (das

*) Übergangsbögen im Straßenbau von Gerhard Schramm, Hans Lorenz, Hugo Kasper, Heft 5 der Folge: Forschungsarbeiten aus dem Straßenwesen.

Grenzmaß in der Seitenabweichung zwischen 2 verschiedenen Übergangsbögen, d. V.) ist Dezimeter, nicht Zentimeter oder gar Millimeter. Das Maß von 30 cm bedeutet auf der Straßenfläche tatsächlich nicht viel (etwa die doppelte Reifenbreite eines Personenkraftwagens). Es liegt daher kein Grund vor, dieses Maß der «Richtlinien für den Ausbau der Landstraßen» nicht als maßgebend zugrunde zu legen.»

Auf Grund der hier angegebenen Grenzwerte von $\pm 10\%$ für die Krümmungsabweichung und 30 cm für Ordinatendifferenzen soll die Zulässigkeit der kubischen Parabel gegenüber der Klothoide festgestellt werden.

1. Krümmungsabweichung von $\pm 10\%$:

Die Krümmung der kubischen Parabel $y = \frac{x^3}{6a^2}$ gibt nach (4)

$$(6) \quad k_p = \frac{x}{a^2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Es sei vorausgesetzt, daß $R > S$. Dann ist wegen $a^2 = RS$

$$a > S \geq s > x \text{ und } \frac{x}{a} < 1$$

so daß wir (6) in eine binomische Reihe entwickeln dürfen:

$$(6a) \quad k_p = \frac{x}{a^2} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

Um dieses k_p mit der Klothoidenkrümmung k_k vergleichen zu können, muß in (1) die Bogenlänge s durch die Abszisse x ersetzt werden. Für die Klothoide ist

$$x = s \left[1 - \frac{1}{40} \left(\frac{s}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

(die Ableitung ist bei Bachmann ersichtlich). Kehrt man diese Beziehung um, so ergibt sich durch sukzessive Näherung

$$s_1 = \frac{x}{1 - \frac{1}{40} \left(\frac{s}{a} \right)^4 + Gl_8} = x \left[1 + \frac{1}{40} \left(\frac{s}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

$$s_2 = x \left\{ 1 + \frac{1}{40a^4} \left[x^4 \left(1 + \frac{1}{10} \left(\frac{s}{a} \right)^4 + Gl_8 \right) \right] \right\}$$

$$(7) \quad s = x \left[1 + \frac{1}{40} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

(7) in (1) eingesetzt, gibt

$$(8) \quad k_k = \frac{x}{a^2} \left[1 + \frac{1}{40} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

Die Krümmungsabweichung in %

$$\kappa = 100 \left[\frac{k_k - k_p}{k_k} \right] = 100 \left[1 - \frac{k_p}{k_k} \right]$$

erhält man aus (6) und (8)

$$\kappa = 100 \left\{ 1 - \frac{\frac{x}{a^2} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \dots \right]}{\frac{x}{a^2} \left[1 + \frac{1}{40} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \dots \right]} \right\}$$

$$(9) \quad \kappa = 40 \left(\frac{x}{a} \right)^4$$

Der Grenzwert $\kappa^* < 10$ führt zur Bedingung

$$(10) \quad \frac{x}{a} < \sqrt[4]{0.25}$$

κ nimmt seinen größten Wert im Endpunkt der Übergangskurve an. Ferner darf man wegen $S \gtrsim X$ ($X =$ Abszisse x im Endpunkt) in (10) x durch S ersetzen. Bei Berücksichtigung von $a = \sqrt{RS}$ wird (10) zu

$$\sqrt{\frac{S}{R}} \leq \sqrt[4]{0.25}$$

$$(11) \quad \frac{S}{R} \leq 0.5$$

Soll also die Krümmung der kubischen Parabel um nicht mehr als 10% von derjenigen der Klothoide abweichen, so darf die Übergangskurvenlänge die Hälfte des Kreisradius nicht überschreiten.

2. Einschränkung der Ordinatenabweichungen auf ± 30 cm:

Die Ordinate der Klothoide in Funktion der Bogenlänge ist

$$y_k = \frac{s^3}{6a^2} \left[1 - \frac{1}{56} \left(\frac{s}{a} \right)^4 + Gl_8 \right]$$

(die Ableitung ist bei Bachmann ersichtlich). Unter Verwendung von (7) erhält man dafür

$$y_k = \frac{1}{6a^2} x^3 \left[1 + \frac{3}{40} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right] \left\{ 1 - \frac{1}{56a^4} x^4 \left[1 + \frac{1}{10} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right] \right\}$$

$$(12) \quad y_k = \frac{x^3}{6a^2} \left[1 + \frac{2}{35} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + Gl_8 \right] *)$$

Die Differenz der beiden Ordinaten $y_k - y_p$ schränken wir durch den Wert 0.3 ein

$$\left| y_k - y_p \right| = \frac{1}{105} \frac{x^7}{a^6} \leq 0.3$$

Durch dieselben Überlegungen wie bei der Krümmung wird damit

$$\frac{1}{105} \frac{S^4}{R^3} \leq 0.3 \quad \text{und}$$

$$(13) \quad S \leq 2.38 R^{3/4}$$

In Tabelle 2 sind die Grenzwerte für die Kreisradien bei verschiedenen Übergangsbogenlängen dargestellt und die Bedingungen (11) und (13) miteinander verglichen. Maßgebend ist die engere Beschränkung.

Tabelle 2

S in m	Minimalradius R bei Einhaltung der	
	Krümmungsbedingung + 10 %	Ordinatenabweichung ± 30 cm
60	120	(75)
80	160	(105)
100	200	(130)
170	340	(300)
250	500	500
300	(600)	630
400	(800)	925

Die Tabelle zeigt, daß für normale Übergangskurvenlängen die Krümmungsbedingung einschränkender ist, während sich erst bei den großen S die Beschränkung der Ordinatenabweichung auswirkt. Es wird dabei nicht übersehen, daß sich natürlich ein konstantes lineares Maß als Grenzwert für die Ordinatenabweichung nicht gut eignet; denn ob die angenommene

*) Formel (12) kann zur Absteckung der Klothoide ohne Klothoidentafel verwendet werden. Das 2. Glied in der Klammer ist mit der Ordinate der entsprechenden kubischen Parabel zu multiplizieren und das Produkt als Korrektur zu addieren.

seitliche Abweichung der Kurve von 30 cm bei einer Länge von 100 m oder von 400 m auftritt, ist für den Verkehr sicher nicht gleichgültig.

Mit diesen Ausführungen soll keineswegs gegen die Anwendung der Klothoide als Übergangskurve im Straßenbau Stellung genommen werden. Sie soll nur zeigen, daß im allgemeinen die Differenzen gegenüber der kubischen Parabel sehr gering sind. Die Beurteilung, welche Kurve bequemer abzustecken ist, hängt von den Methoden und den Hilfsmitteln ab. Liegen gerechnete Absteckungstafeln vor, so spielt die Form der Kurve eine untergeordnete Rolle. Hier sollte nur erneut* darauf hingewiesen werden, daß Klothoide und kubische Parabel nicht verschiedene Formtypen der Übergangskurve sind und daß mindestens beim Übergang von der Geraden zum Kreis die jedem Vermessungsfachmann bekannte kubische Parabel der Klothoide nicht unterlegen ist.

Pensionskasse

Die Lebensversicherungsgesellschaft «Helvetia» verzichtet auf die Mitwirkung bei der neuen Pensionskasse für die privaten Vermessungsbüros und wird durch die «Patria», Schweiz. Lebensversicherungsgesellschaft in Basel ersetzt.

Wir bitten bei diesem Anlaß alle Mitglieder, die in der Juninummer der Zeitschrift veröffentlichten Richtlinien beachten zu wollen. Der Abschluß einer Pensionsversicherung ist nach dem Beschluß der Generalversammlung 1951 für alle Vermessungsbüros, die Angestellte haben, obligatorisch.

Im Namen des Zentralvorstandes: *E. Bachmann*

20. August 1951

Caisse de retraite

La Société Suisse d'assurance sur la vie «Helvetia» renonce à participer à la nouvelle caisse de retraite des géomètres. Elle sera remplacée par la «Patria», Société mutuelle Suisse d'assurance sur la vie à Bâle. A cette occasion nous prions nos membres de bien vouloir suivre nos directives parues dans le numéro du mois de juin de notre journal. La conclusion d'un contrat d'assurance est, d'après la décision de l'assemblée générale de 1951, obligatoires pour tous bureaux privés occupant des employés.

Au nom du Comité Central: *E. Bachmann*

20 août 1951.

*) Man vergleiche z. B. die vorne zitierte Publikation.