

# Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge

Autor(en): **Engi, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **49 (1951)**

Heft 10

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-208358>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge

Von *Dipl.-Ing. Dr. Paul Engi*,  
*Ingenieur der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Zürich*

### 1. Vorbemerkungen

Die trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede sind im Gebirge, unter sonst gleichen Umständen, im allgemeinen genauer als im Flachlande. Die erreichte Genauigkeit der Höhenbestimmungen in Grundbuchtriangulationen war oft ebenso groß wie diejenige der Lagebestimmung, und sie unterschritt meistens bedeutend die von der Instruktion für die Grundbuchvermessungen vorgeschriebenen Fehlergrenzen. Bei der Netzanlage wurde darauf Bedacht genommen, daß die Hauptpunkte des Höhennetzes von den Lotstörungseinflüssen möglichst befreit waren.

Die Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung zur Bestimmung von Geoidprofilen hat sich im Hochgebirge dank der guten Beobachtungsgenauigkeit bereits bewährt. Es ist zu erwarten, daß sie in Kombination mit astronomischen Messungen die Profilaufnahmen bedeutend vereinfachen wird. Namentlich werden solche Profilaufnahmen weniger kostspielig sein als die bis anhin mittels rein astronomischen Methoden ausgeführten Arbeiten.

Die Ursache der guten Ergebnisse im Hochgebirge liegt in den bedeutend geringeren Änderungen des Refraktionseinflusses, als dies in den Niederungen der Fall ist. Die Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten kann unter Wahrung gewisser Vorsichtsmaßregeln wesentlich eingedämmt werden, so namentlich durch geeignete zeitliche Anordnung der Messungen und durch Vermeidung bodennaher Zielungen. Letztere Bedingung ist besonders wichtig und im Gebirge viel einfacher zu erfüllen als im Flachland. Die gefährlichen Refraktionsstörungen treten vorwiegend in den untersten Schichten der Atmosphäre auf.

Bei der Bestimmung des Refraktionskoeffizienten aus trigonometrischer Messung bekannter Höhenunterschiede oder durch Messung der gegenseitigen Zenitwinkel auf zwei Punkten gehen in die Beobachtungen die Lotabweichungskomponenten in Richtung der Zielungen als einseitig wirkende Fehler ein. Dadurch können, besonders im Gebirge, ganz beträchtliche Verfälschungen des gesuchten Koeffizienten verursacht werden. Dieser Umstand mag zum Teil die so stark verschiedenen Ergebnisse solcher Bestimmungen verursacht haben; es ist dem Verfasser nicht bekannt, daß bei der Ableitung des Refraktionskoeffizienten der Einfluß von Lotstörungen berücksichtigt worden ist.

Die Bestimmung des Refraktionskoeffizienten  $k$  aus gegenseitigen Visuren erfolgt unter Voraussetzung gleicher Refraktionswinkel  $\delta$  (s. die Figur) auf beiden Stationen gemäß der Formel

$$k = 1 - \frac{R_{\alpha}}{s\rho''} (z'_1 - z'_2),$$

wo  $R_\alpha$  der Krümmungsradius des Ellipsoides in der Zielrichtung,  $s$  die auf dem Ellipsoid gemessene Entfernung der beiden Punkte und  $z'_1$  und  $z'_2$  die auf den beiden Punkten gemessenen Zenitwinkel bedeuten. Der Lotabweichungsunterschied benachbarter Stationen betrug im astronomischen Nivellement des St. Gotthard (Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band XIX) im Maximum  $18'',3$ , im Mittel (im Vor- und Hochgebirge)  $\pm 7'',3$ . Beträgt die mittlere Differenz der Lotabweichungskomponenten benachbarter Punkte in der Visurrichtung  $\pm \Delta\lambda$ , so verursacht diese den m. F. von  $k$ :  $m_k = \frac{R_\alpha \Delta\lambda}{s\rho''}$ . Ein  $\Delta\lambda = 10''$ , das im

Gebirge häufig vorkommt, würde z. B. folgende Fehler des Koeffizienten  $k$  (für  $k = 0,13$ ) verursachen:

$a$	2 km	5 km	10 km	30 km
$\Delta k$	0,154 = 1,18 $k$	0,062 = 0,48 $k$	0,031 = 0,24 $k$	0,010 <sub>3</sub> = 0,08 $k$

In den folgenden Untersuchungen wird auf das eigentliche Refraktionsproblem nicht eingetreten. Es sind in neuerer Zeit auf diesem Gebiet bemerkenswerte Ergebnisse festgestellt worden, so daß zu erwarten ist, daß die in der Refraktion liegende Fehlerquelle der trigonometrischen Höhenbestimmung künftig praktisch besser berücksichtigt werden kann, als dies bis anhin der Fall war. Hier sollen lediglich alle erfaßbaren, die Genauigkeit der Messungen bedingenden Umstände zusammengestellt, näher untersucht und an Beispielen dargelegt werden.

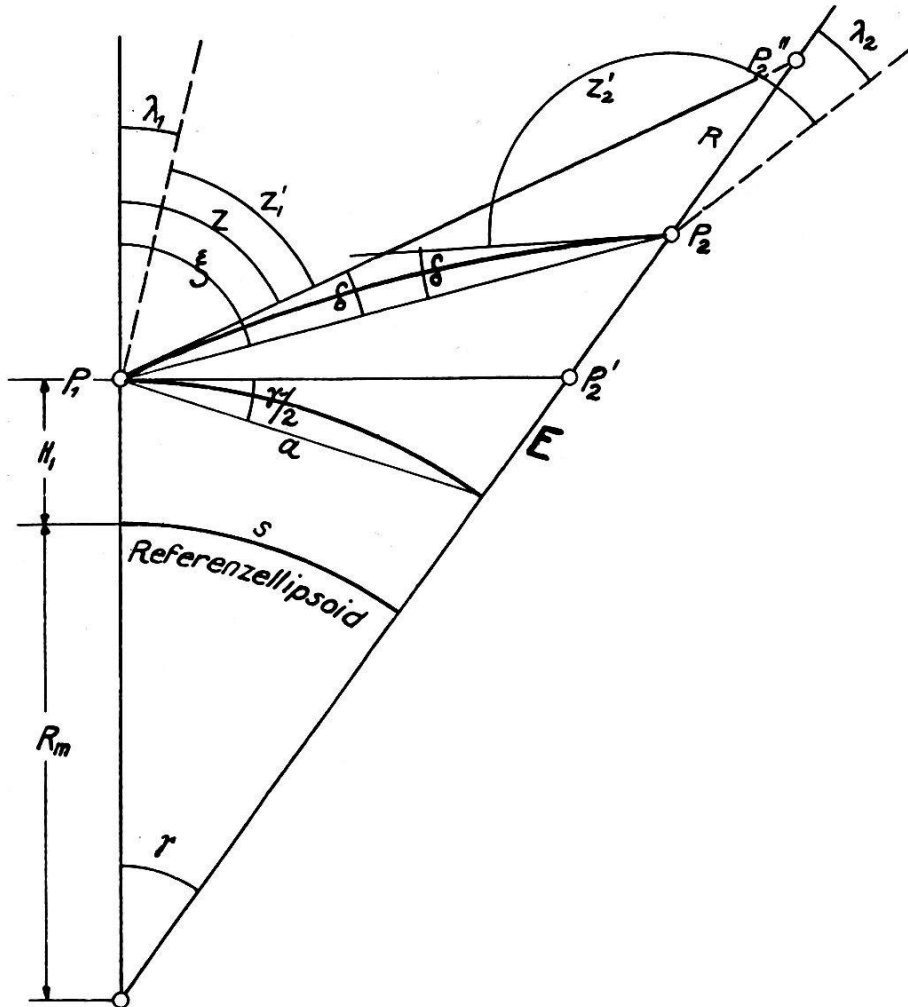
## 2. Die Höhenformeln

Die strenge Formel des Höhenunterschiedes  $h$  zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  findet man leicht aus der nachstehenden Figur. Unter der üblichen Voraussetzung, der Lichtweg zwischen den beiden Punkten sei ein Kreisbogen, d. h. die Refraktionswinkel  $\delta$  seien auf beiden Punkten gleich groß, und ihr Verhältnis zum Zentriwinkel der beiden Stationen sei gegeben durch  $\delta = k \frac{\gamma}{2}$ , beträgt der strenge Wert des Höhenunterschiedes der beiden Punkte

$$h = \left(1 + \frac{H_1}{R_m}\right) s \frac{\cos \left\{ z - (1 - k) \frac{\gamma}{2} \right\}}{\sin \left\{ z - (2 - k) \frac{\gamma}{2} \right\}}$$

$z$  ist der Zenitwinkel bezüglich des ellipsoidischen Lotes,  $R_m$  der mittlere Krümmungsradius in  $P_1$ . Auf den Grad der Erfüllung der Beziehung zwischen  $\delta$  und  $\gamma$  soll hier, als Bestandteil der Refraktionsfrage, nicht einge-

treten werden. Da die Abweichung obengenannter Bedingung von den tatsächlichen Refraktionsverhältnissen erfahrungsgemäß gering ist und bei der Vergleichung der verschiedenen Höhenformeln nicht in Erscheinung tritt, darf sie außer acht gelassen werden.



Der Höhenunterschied  $h$  kann zerlegt werden in das durch den auf  $P_1$  gemessenen Höhenwinkel  $90^\circ - z$  aus dem Lot des Punktes  $P_2$  herausgeschnittene Stück  $P'_2 P''_2$ , den durch die Erdkrümmung bedingten Teil  $E$  und den durch die Refraktion verursachten Abschnitt  $R$ . Der Faktor von  $\left(1 - \frac{H_1}{R_m}\right) s$  lautet dann

$$\frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos z}{\cos \gamma \sin (z - \gamma)} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \sin k \frac{\gamma}{2}}{\sin \left\{ z - (2 - k) \frac{\gamma}{2} \right\} \sin (z - \gamma)}.$$

Das dritte Glied ist durch die Refraktion bedingt, worauf noch zurückzukommen ist.

Es sollen nun die im Handbuch der Vermessungskunde von Jordan-Eggert, II. Band, gegebene und die in den Tangententafeln der Eidgenössischen Landestopographie, von H. Wild abgeleitete und von C. F. Baeschlin verbesserte Höhenformel mit der strengen Höhenformel an Hand von Beispielen, die die meisten praktisch vorkommenden Grenzen von  $z$  und  $s$  einschließen, verglichen werden.

Wir wählen:  $H_1 = 2000$  m,  $h_{\max} \sim 2000$  m

$s = \frac{1}{2}, 1, 2, 5, 10$  und  $20$  km

$z = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$  und  $45^\circ$

für das Besselsche Ellipsoid und die Polhöhe  $\varphi = 45^\circ$ . In den im folgenden angeführten zahlenmäßigen Angaben und Beispielen handelt es sich, wenn nichts anderes ausdrücklich bemerkt ist, um die hier angeführten Werte von  $H_1$ ,  $h_{\max}$ ,  $s$  und  $z$ . Als Refraktionskoeffizient wird  $k = 0,13$  angenommen, obwohl dieser Wert für die gewählte Meereshöhe von  $P_1$  etwas zu groß ist, was aber diesen relativen Untersuchungen keinen Abbruch tut.

Die Höhenformel aus Jordan-Eggert lautet

$$h = \left( 1 + \frac{H_1 + H_2}{2 R_m} \right) s \operatorname{ctg} z_1 + \frac{1 - k}{2 R_m} s^2 \operatorname{cosec}^2 z_1.$$

Die Wild-Baeschlinsche Formel schreiben wir

$$h = \left( 1 + \frac{H_2}{R_m} \right) s \operatorname{ctg} z_1 + \frac{1 - k}{2 R_m} s^2 - \frac{k}{2 R_m} h^2.$$

Die Auswertung der Formeln erfolgte mittels 6stelliger Logarithmen und einfacher Rechenmaschine auf mm genau. Diese Genauigkeit hat natürlich nur theoretischen Wert; denn die Formeln wurden ohne Rücksicht auf die praktisch erreichbare Meßgenauigkeit berechnet. Die Höhenunterschiede der beiden Näherungsformeln stimmen in den angegebenen Grenzen bis zu 5 km auf den mm mit den  $h$  der strengen Formel überein. Bei 10 km weichen die genäherten  $h$  um 2 bis 4 mm, bei 20 km um 9 mm vom strengen Werte ab. Die beiden Näherungsformeln geben also praktisch genügend genaue Höhenunterschiede. Die  $h$  der in den Tangententafeln gegebenen Formel weichen vom strengen Werte zum Teil merklich ab, im Maximum um 41 mm für  $s = 2$  km und  $z = 45^\circ$ .

Der strenge Wert des Refraktionseinflusses ist

$$R = -a \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \sin k \frac{\gamma}{2}}{\sin \left\{ z - (2 - k) \frac{\gamma}{2} \right\} \sin (z - \gamma)}$$

und beträgt in den angenommenen Beispielen (in cm)

$\begin{matrix} s \\ z \end{matrix}$	0,5	1	2	5	10	20 km
90°	0,2	1,0	4,1	25,5	101,9	407,9
80°	0,3	1,0	4,2	26,3	105,2	
70°	0,3	1,1	4,6	28,8		
60°	0,3	1,3	5,4			
50°	0,4	1,7	6,9			
45°	0,5	2,0	8,1			

Den durch die Refraktion verursachten Unterschied des beobachteten Zenitwinkels  $z$  gegenüber dem wahren Zenitwinkel  $\zeta$  findet man aus der Beziehung

$$\Delta z = \frac{\Delta h}{a} \rho'' \sin^2 \zeta,$$

wenn  $\Delta h = R$  ist.

Wie groß ist nun der wegen Unsicherheit der Refraktionskoeffizienten zu erwartende Fehler des Höhenunterschiedes  $h$  und des Zenitwinkels  $z$ , wenn eine gewisse Unsicherheit  $\pm m_k$  angenommen wird? Der wegen  $m_k$  verursachte m. F. der Höhendifferenz beträgt

$$m_{hk} = a \frac{\gamma}{2 \rho''} \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \left\{ z - (z - k) \frac{\gamma}{2} \right\}} m_k$$

und der m. F. des Zenitwinkels

$$m_{zk} = \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \sin^2 z}{\sin^2 \left\{ z - (2 - k) \frac{\gamma}{2} \right\}} m_k \approx \frac{\gamma}{2} m_k.$$

Letzterer ist praktisch unabhängig vom Zenitwinkel. In der folgenden Tabelle sind die zu erwartenden Höhenfehler und Fehler der Zenitdistanz

für die bei vorsichtiger Anordnung der Messungen zulässige Annahme:  
 $m_k = \pm 0,1 k$  zusammengestellt (cm, bzw. Bogensekunden)

z s km	$m_{hk}$						$m_{zk}$ (unabhängig von z)
	90°	80°	70°	60°	50°	45°	
0,5	± 0,0	± 0,0	± 0,0	± 0,0	± 0,1	± 0,1	± 0",11
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0",21
2	0,4	0,4	0,5	0,5	0,7	0,8	0",42
5	2,5	2,6	2,9				1",05
10	10,2	10,5					2",10
20	40,8						4",20

Die letzte Kolonne der Tabelle ist namentlich interessant im Hinblick auf die Bestimmung von Geoidprofilen mittels Höhenwinkelmessungen. Sie sagt aus, daß auch für nicht gleichzeitig gegenseitig gemessene Höhenwinkel die Genauigkeit der Lotabweichungskomponente in der Visurrichtung bis auf 5 km Entfernung der Punkte wegen Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten nicht in einem unzulässigen Maße beeinträchtigt wird.

Es mag hier noch die von Reicheneder bei der Berechnung der Höhentriangulation am Nanga-Parbat verwendete Höhenformel kurz eingetreten werden. Sie wurde für die dort vorkommenden außerordentlich großen Distanzen und Höhenunterschiede angewendet und lautet mit unseren Bezeichnungen

$$h = \left( 1 + \frac{H_2}{R_m} \right) \left\{ s \operatorname{ctg} z + \frac{s^2}{2 R_m} (1 - k \operatorname{cosec}^3 z) \right\}.$$

Das in den betreffenden Publikationen angeführte Beispiel der Visur „Gor Gali-Silberzacken“ hat folgende genäherten Ausgangswerte:

$$\varphi = 35^\circ 20'; \quad s = 29,1 \text{ km}; \quad z = 81^\circ 12' \quad \text{und} \quad H_1 = 3030 \text{ m.}$$

Der hieraus gerechnete strenge Wert des Höhenunterschiedes der beiden Punkte und die mit den Näherungsformeln von Jordan-Eggert, Wild-Baeschlin und Reicheneder berechneten  $h$  dieser Visur sind:

		Abweichung
Strenge Formel	$h = 4567,967 \text{ m}$	0,000 m
Jordan-Eggert	,889	— 78
Wild-Baeschlin	,912	— 55
Reicheneder	,874	— 93



Die Abweichungen der Näherungsformeln vom strengen Wert haben natürlich nur theoretisches Interesse; sie werden durch die bei der Messung wirkenden Fehler auch in dem vorliegenden extremen Falle verwischt. Allein der wegen Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten zu erwartende m. F. des Höhenunterschiedes beträgt für  $m_k = \pm 0,1$  schon  $\pm 0,89$  m und der Fehler der Zielung  $\pm 6",1$ .

Die beste Näherung gibt die Wild-Baeschlinsche Formel, während der Höhenunterschied nach Reicheneder vom strengen Wert am stärksten abweicht, aber immer noch genügend genau ist. Ob die Formel von Reicheneder rechnerische Vorteile bietet, kann ich, mangels Erfahrung, nicht mit Sicherheit feststellen, wohl aber bezweifeln.

Was die Rechenarbeit anbetrifft, ist zu sagen, daß alle drei Näherungsformeln vorgängig einen Näherungswert des gesuchten Höhenunterschiedes erfordern. Das ist bei der strengen Formel nicht der Fall. Die Auswertung der Jordan-Eggert-Formel gibt mehr Arbeit als diejenige der Wild-Baeschlinschen. Die Auswertung der strengen Formel benötigt meines Erachtens den geringsten Arbeitsaufwand und kann leicht durch weitgehende Tabulierungen sehr praktisch gestaltet werden.

### 3. Die Fehler der trigonometrischen Höhenbestimmung

Zur Untersuchung der Einflüsse der bei der trigonometrischen Bestimmung von Höhenunterschieden wirkenden Fehlerquellen eignet sich die Jordan-Eggertsche Höhenformel am besten. An Hand derselben sollen zuerst die systematischen und dann die zufälligen Fehler untersucht werden. Wir schreiben die Formel für eine bestimmte Richtung mit Azimut  $\alpha$  und fügen auch noch die Instrumentenhöhe  $I$  und die Signalhöhe  $S$  bei:

$$h = \left(1 + \frac{H_m}{R_\alpha}\right) s \operatorname{ctg} z + \frac{1 - k}{2 R_\alpha} s^2 \operatorname{cosec}^2 z + I - S,$$

wo  $H_m = \frac{1}{2} (H_1 + H_2)$  ist.

a) Systematische Fehler. Zuerst soll geprüft werden, in welchen Grenzen der Krümmungsradius  $R_\alpha$  im Azimut  $\alpha$  durch einen mittleren Krümmungsradius ersetzt werden darf, ohne daß  $h$  unzulässig systematisch verändert wird. Für die extremen Krümmungsradien (Meridiankrümmungsradius  $M$  und Querkrümmungsradius  $N$ ) beträgt der Unterschied von  $h$

$$\Delta h = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right) s \left\{ H_m \operatorname{ctg} z + \frac{1}{2} (1 - k) s \operatorname{cosec}^2 z \right\}$$



oder, weil  $M - N = M\eta^2$  und zwecks einfacher rechnerischer Auswertung

$$\Delta h = \frac{\eta^2}{N} s \operatorname{cosec} z \left\{ H_m \cos z + \frac{1}{2} (1 - k) s \operatorname{cosec} z \right\}.$$

$\eta^2$  ist die vielgebrauchte und tabulierte geodätische Größe  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ , wo  $e'$  die zweite Exzentrizität der Meridianellipse ist ( $\eta^2_{45} = 0,00336$ ).

Die extremen Werte dieses  $\Delta h$  sind für unsere Beispiele in cm

$\begin{array}{c} s \\ \backslash \\ z \end{array}$	5	10	20 km
90°	0,6	2,3	9,2
80°	0,8	2,6	
70°	0,9		

Sie betragen ungefähr  $\frac{1}{5}$  des zu erwartenden m. F. aus der Gesamtwirkung aller Fehler. Die Zielung wird im Maximum um 0",95 verändert ( $s = 20$  km). Setzt man statt  $R_\alpha$  den Mittelwert  $R_m = \sqrt{MN}$  in die Formel, so betragen die dadurch begangenen maximalen Fehler rund die Hälfte der oben angeführten Werte (für  $R_\alpha = M$  oder  $= N$ ). Es ist somit in den bis anhin berücksichtigten Grenzen nicht notwendig, den dem Azimut der Zielung entsprechenden Krümmungsradius  $R_\alpha$  zu berechnen und einzusetzen; es genügt, den mittleren Krümmungsradius zu verwenden.

Wenn aber doch  $R_\alpha$  eingeführt werden soll, so drücken wir es durch die Hauptkrümmungsradien aus und finden

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{c} (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \eta^2 \cos^2 \alpha) \approx \frac{1}{c} \left\{ 1 + \eta^2 \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \alpha \right) \right\},$$

letzteres, wenn wir Glieder mit  $\eta^4$  und höheren Potenzen vernachlässigen.  $c$  ist der Polkrümmungsradius. In Höhenpolygonen längs eines Meridianes darf  $\cos \alpha = 1$  gesetzt werden:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{2} \eta^2}{c} \approx \frac{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{c} = \frac{1}{M}.$$

In solchen Polygonen darf für große Breitenbereiche derselbe mittlere Meridiankrümmungsradius eingesetzt werden. Man findet den Breitenunterschied  $\Delta \varphi$ , innerhalb welchem bei vorgeschriebener maximaler Änderung  $\Delta M$  von  $M$  ein mittleres  $M_m$  verwendet werden darf, aus der Änderung von  $M$  nach der Polhöhe  $\varphi$  zu

$$\Delta \varphi = \frac{2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi}{3 c e'^2 \sin 2 \varphi} \Delta M \rho''.$$

Überschreiten die Polygonseiten die Länge, für welche statt der Hauptkrümmungsradien  $R_m$  gesetzt werden darf, nicht, so findet man  $\Delta M_{\max} = N_m - M_m = M_m \eta^2_m$  der mittleren Breite des Meridianstückes zu

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{2(1 + \eta_m^2) \cos^2 \varphi_m}{3 \sin 2\varphi_m} \rho''$$

und für  $\varphi_m = 45^\circ$

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} e'^2 \right) \rho'' \approx 19'' 10'.$$

Eine weitere systematische Fehlerquelle ist ein fehlerhaftes  $s$ . Die aus den rechtwinkligen Koordinaten gerechneten Entfernungen  $s$  der Punkt müssen wegen Verzerrung durch die Projektion korrigiert werden. Für das in der Schweiz angewendete System, die winkeltreue, schiefachsige Zylinderprojektion, werden die aus Projektionskoordinaten gerechneten Entfernungen gemäß Formel 79 von Rosenmund, in welcher für so kurze Distanzen  $\sigma_1$  vernachlässigt werden darf, reduziert. Die maximale Längenverzerrung tritt im Südtessin auf, wo sie gegen  $2\text{‰}$  beträgt. Die Vernachlässigung der Korrektur wegen Projektionsverzerrung würde dort für  $s = 10$  km im ersten Glied der Höhenformel im Zenitwinkel  $80^\circ$  einen systematischen Höhenfehler von 35 cm zur Folge haben.

Dagegen ist das zweite Glied der Höhenformel gegen ungenaues  $s$  weniger empfindlich:

$$d(E - R) = \frac{1 - k}{2 R_m} \operatorname{cosec}^2 z \cdot 2s \, ds = 2 \frac{E - R}{s} ds.$$

Für  $ds = 0,002 s$  geht der Ausdruck über in

$$d(E - R) = 0,004 (E - R).$$

Die Änderung von  $E - R$  und die dadurch bedingte Änderung des Zenitwinkels  $z$  beträgt z. B. für  $ds = 0,002 s$

$s$	$z$	$\Delta(E - R)$	$\Delta z$
5 km	$70^\circ$	0,8 cm	$0'',3$
10 km	$80^\circ$	2,8 cm	$0'',6$
20 km	$90^\circ$	10,9 cm	$1'',1$

b) Zufällige Fehler. Mit zufälligen Fehlern sind behaftet:

1. die gemessenen Zenitwinkel  $z$  (aus den Kollimationsproben)  $\pm m_w$
2. die aus den Koordinaten gerechneten Distanzen  $s$   $\pm m_s$
3. die Refraktionskonstante  $k$   $\pm m_k$
4. die Instrumenten- und Signalhöhen  $\pm m_c$

Aus diesen vier Fehlerquellen können die zu erwartenden Fehler der Höhendifferenzen und der Zenitwinkel abgeleitet werden.

Nicht berücksichtigen können wir die Kreisteilungsfehler. Auch ist eine Elimination oder Verminderung ihres Einflusses durch zweckentsprechendes Meßverfahren bei den gebräuchlichen Instrumenten nicht möglich. Bei modernen Instrumenten dürften diese Fehler jedoch nicht gefährlich sein.

Die Fehlerbeiträge der einzelnen Fehlerquellen können gestützt auf die Formel Jordan-Eggert abgeleitet werden.

Der Fehler der Winkelmessung hat den Höhenfehler

$$m_{hw} = \left\{ \left( 1 + \frac{H_m}{R_m} \right) + (1 - k) \frac{s}{R_m} \operatorname{ctg} z \right\} s \operatorname{cosec}^2 z \frac{m_w}{\rho''}$$

zur Folge. Das zweite Glied der geschweiften Klammer beträgt im Maximum rund  $\frac{1}{4} \text{‰}$  des ersten Gliedes, kann somit vernachlässigt werden. Wir haben also

$$m_{hw} = \left( 1 + \frac{H_m}{R_m} \right) s \operatorname{cosec}^2 z \frac{m_w}{\rho''}$$

Der Fehler  $m_s$  der Horizontalentfernung liefert

$$m_{hs} = \left\{ \left( 1 + \frac{H_m}{R_m} \right) \operatorname{ctg} z + \frac{1 - k}{R_m} s \operatorname{cosec}^2 z \right\} m_s$$

$m_s$  findet man aus den m. F. der Koordinaten der beiden Punkte. Sind diese mit  $m_{x_1}$ ,  $m_{x_2}$ ,  $m_{y_1}$  und  $m_{y_2}$  bezeichnet, so ist der m. F. von  $s$

$$m_s = \frac{1}{s} \left\{ \Delta x^2 (m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2) + \Delta y^2 (m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Für die vereinfachende Annahme, es seien die vier Koordinatenfehler gleich groß, geht die Formel über in  $m_s = m \sqrt{2}$ , wenn mit  $m$  der Koordinatenfehler bezeichnet wird.

Die Refraktionsunsicherheit hat den Einfluß

$$m_{hk} = \frac{s^2}{2 R_m} \operatorname{cosec}^2 z m_k$$

Den Fehler von Instrumenten- und Signalhöhe nehmen wir als gleich groß an und erachten auch den Einfluß der fehlerhaften Zentrierungselemente als darin enthalten. Ihr Beitrag zum Höhenfehler ist somit

$$m_{hc} = m_c \sqrt{2}$$

Der zu erwartende m. F. des Höhenunterschiedes  $m_h$  ist gegeben durch

$$m^2_h = m^2_{hw} + m^2_{hs} + m^2_{hk} + 2 m^2_c.$$

Bei der Ableitung von Geoidprofilen wird aus den gegenseitig gemessenen Zenitwinkeln und dem Zentriwinkel zweier Punkte die Differenz der Lotabweichungskomponenten bestimmt. Der m. F.  $m_{\Delta\lambda}$  einer beobachteten Lotabweichungsdifferenz findet man aus der diese Größen verbindenden Beziehung

$$\Delta\lambda = 180^\circ - (z'_1 + z'_2) + \gamma (1 - k),$$

wobei die mit Lotstörungen behafteten auf den beiden Stationen gemessenen Zenitwinkel mit  $z'_1$  und  $z'_2$  bezeichnet seien (s. die Figur). Hierin weisen die beiden Zenitwinkel und  $k$  zufällige Fehler auf. Dazu kommt noch der aus den Fehlern von  $I$  und  $S$  abgeleitete Fehler der Zielungen. Diese geben für jede Zielung den Fehler

$$m'_c = \sqrt{2} \frac{m_c}{s} \rho'' \sin^2 z.$$

Somit haben wir als m. F. einer Differenz der Lotabweichungskomponenten in der Visurrichtung

$$m_{\Delta\lambda} = (2 m^2_w + \gamma^2 m^2_k + 2 m'^2_c)^{\frac{1}{2}}$$

Es sollen nun an Hand von angenommenen m. F. der einzelnen Komponenten die zu erwartenden m. F. der Höhenunterschiede und der Lotabweichungsdifferenzen für einige der bis anhin berücksichtigten Kombinationen von  $s$  und  $z$  gegeben werden. Wir nehmen folgenden m. F. der Elemente an:

$$m_w = \pm 1'',2; \quad m_s = \pm 2 \text{ cm}; \quad m_k = \pm 0,013 \quad \text{und} \quad m_c = \pm 0,5' \text{ cm}.$$

Die neuesten Erfahrungen, die anlässlich der im Jahre 1950 ausgeführten Aufnahme eines Geoidprofils mittels Zenitwinkelmessungen gemacht wurden, zeigen, daß die hier angenommenen Werte der m. F. wahrscheinlich zu groß sind. Es wurde ein im Hochgebirge liegendes Stück des bereits früher nach dem astronomischen Verfahren von Dr. E. Hunziker aufgenommenen Geoidprofils im Meridian des St. Gotthard mittels Zenitwinkelmessungen beobachtet. Die hier angegebenen Beispiele geben aber doch einen Einblick in die zu erreichende Genauigkeit und deren Abhängigkeit von den die Höhenunterschiede und Lotablenkungsdifferenzen bedingenden Faktoren.

In der folgenden Tabelle sind die aus den oben angenommenen Fehlern der Elemente ermittelten Fehler des Höhenunterschiedes für verschiedene Distanzen und Zenitwinkel gegeben.

*Tabelle der mittleren Höhenfehler (in cm)*

s	0,5 km			1 km			2 km		
	90°	70°	45°	90°	70°	45°	90°	70°	45°
$m^2_{hw}$	0,08	0,11	0,34	0,34	0,44	1,35	1,35	1,75	5,43
$m^2_{hs}$	0,00	1,06	8,02	0,00	1,06	8,02	0,00	1,06	8,02
$m^2_{hk}$	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,04	0,16	0,22	0,65
$2 m^2_c$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
$\Sigma$	0,58	1,67	8,86	0,85	2,01	9,91	2,01	3,53	14,60
$m_h$	$\pm 0,8$	$\pm 1,3$	$\pm 3,0$	$\pm 0,9$	$\pm 1,4$	$\pm 3,1$	$\pm 1,4$	$\pm 1,9$	$\pm 3,8$

s	5 km			10 km		20 km
	90°	80°	70°	90°	80°	90°
$m^2_{hw}$	8,47	9,00	10,89	33,87	36,00	124,55
$m^2_{hs}$	0,00	0,25	1,07	0,00	0,25	0,01
$m^2_{hk}$	6,49	6,89	8,33	103,88	110,33	1662,03
$2 m^2_c$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
$\Sigma$	15,46	16,64	20,79	138,25	147,08	1787,09
$m_h$	$\pm 3,9$	$\pm 4,1$	$\pm 4,6$	$\pm 11,8$	$\pm 12,1$	$\pm 42,2$

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß

1. die Genauigkeit der Winkelmessung in den meisten Fällen zum Fehler der Höhendifferenzen weniger beiträgt als die andern Fehlerquellen, nirgends aber verheerend wirkt, also genügt;
2. der Fehler der Koordinaten für kurze Entfernungen und starke Neigungen gefährlich werden kann;
3. die Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten erst zwischen 5 und 10 km anfängt, die Genauigkeit der Höhenbestimmung stärker zu beeinflussen, und
4. daß namentlich für kurze Entfernungen die Zentrierungselemente mit großer Sorgfalt erhoben werden müssen.

Die folgende Zusammenstellung gibt für verschiedene Fälle die aus den Fehlern der Elemente zu erwartende Genauigkeit der Lotabweichungsdifferenzen aus gegenseitig beobachteten Zenitwinkeln.

*m. F. der Lotabweichungsdifferenzen*

s	0,5 km		1 km		2 km	
	90°	45°	90°	45°	90°	45°
$2 m_w^2$	2,88	2,88	2,88	2,88	2,88	2,88
$2 m_k^2$	0,01	0,01	0,04	0,04	0,18	0,18
$2 m_c'^2$	17,02	4,25	4,25	1,06	1,06	0,27
$\Sigma$	19,91	7,14	7,17	3,98	4,12	3,13
$m_{\Delta\lambda}$	$\pm 4'',46$	$\pm 2'',67$	$\pm 2'',67$	$\pm 1'',99$	$\pm 2'',03$	$\pm 1'',82$

s	5 km		10 km		20 km
	90°	70°	90°	80°	90°
$2 m_w^2$	2,88	2,88	2,88	2,88	2,88
$2 m_k^2$	1,11	1,11	4,42	4,42	17,68
$2 m_c'^2$	0,17	0,13	0,00	0,00	0,00
$\Sigma$	4,16	4,12	7,30	7,30	20,56
$m_{\Delta\lambda}$	$\pm 2'',04$	$\pm 2'',03$	$\pm 2'',70$	$\pm 2'',70$	$\pm 4'',53$

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich,

daß, abgesehen von sehr kurzen Entfernungen, bis über 5 km der Winkelmeßfehler den größten Fehlerbeitrag liefert, d. h., daß es sich lohnt, die Zenitwinkel noch genauer zu bestimmen als für die Höhenbestimmungen angenommen wurde,

daß die Refraktion erst über 5 km merklichen Einfluß hat

und daß für ganz kurze Distanzen ungenaue Zentrierung sehr gefährlich wirkt, bei geneigten Visuren weniger als bei horizontalen.

Wirken die hier angenommenen Fehler, so sind für die Aufnahme von Meridianprofilen die Distanzen im Intervall von etwa 1 bis 10 km zu wählen.

Die hier a priori berechneten m. F. der Lotabweichungsdifferenzen sind größer als die im Gotthardprofil 1950 gefundenen. Die Wiederholungen der Winkelmessungen ergaben dort jedenfalls ein beträchtlich kleineres  $m_w$ , und die Refraktion dürfte, wie schon oben bemerkt wurde, kleinere Beiträge zum Fehler der Lotabweichungsdifferenzen gegeben haben, als hier angenommen worden ist.

*Literatur*

Baeschlin C. F. Der Theodolit, Autographie aus der Vorlesung über Vermessungskunde 1945.



- Brocks K.* Meteorologische Hilfsmittel für geodätische Höhenmessung. Zeitschrift für Vermessungswesen 1950.
- Eidgenössische Landestopographie* (H. Wild). Tafeln zur Berechnung von Höhenunterschieden aus Horizontalabstand und Höhenwinkel. 1905.
- Finsterwalder R.* Die Haupttriangulation am Nanga-Parbat. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1935.
- Finsterwalder R.* Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1937.
- Finsterwalder R.* Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1951.
- Finsterwalder R.* und *Gänger H.* Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsamt, 1941.
- Hartl H.* Über mittlere Refraktions-Coeffizienten. Mitteilungen der k. u. k. militärgeographischen Inst., 1884.
- Hunziker E.* Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard, I. Die beobachteten Lotabweichungen. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Bd. XIX, 1932.
- Jordan-Eggert.* Handbuch der Vermessungskunde, II. Band.
- Kobold F.* Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Annexe au procès-verbal de la 95<sup>e</sup> séance de la Commission géodésique Suisse, 1951.
- Lips K.* Zur Berechnung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung bei trigonometrischen Höhenmessungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1935.
- Reicheneder K.* Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung bei großen Höhenunterschieden und Zielweiten. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 1937.
- Rosenmund M.* Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung, Bern 1903.

## Geoiderhebungen in der Schweiz

Von Dr. E. Hunziker,

Ingenieur der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Zürich

Gegenwärtig kommt der Ableitung von Höhenunterschieden aus Höhenwinkelmessungen infolge der größeren Leistungsfähigkeit der Theodolite verstärkte Bedeutung zu. Damit wächst auch das Bestreben, ein klares Bild zu gewinnen über die Unterschiede zwischen den vom Geoid aus und den vom Ellipsoide aus gemessenen Höhen oder – mit anderen Worten – über die Abweichungen des schweizerischen Referenzellipsoides vom Geoid.

Schon im Jahre 1942 ist in der Januarnummer der Schweizerischen Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik über Geoidprofile in der Schweiz berichtet worden. Bis heute wurden im Auftrage der Schweizerischen Geodätischen Kommission, unter der Leitung ihres langjährigen Präsidenten, Prof. C. F. Baeschlin, vier Schnitte gelegt: die beiden Hauptprofile im Meridian des St. Gotthard und im Parallelkreis von Zürich sowie die zwei kurzen Ergänzungsprofile im Parallelkreis von