Sur la détermination d'une ponctuelle rectiligne ou curviligne

Sur la détermination d'une ponctuelle rectiligne ou curviligne

Par A. Ansermet

Peu de problèmes furent traités aussi fréquemment dans la littérature professionnelle que celui concernant la détermination d'une ponctuelle (Punktreihe) lorsque le nombre de mesures effectuées dépasse ce qui est strictement nécessaire. On peut discerner deux raisons qui expliquent ce fait: d'une part ce problème présente un réel intérêt pratique, surtout si la ponctuelle est rectiligne (limite de propriété) et, d'autre part, les diverses solutions développées révèlent certaines divergences d'un auteur à l'autre. La présente note est inspirée surtout par l'article de M. le Prof. Dr Baeschlin sur ce sujet (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, p. 241–248, 1919); la plupart des notations adoptées ci-après sont les mêmes ce qui est de nature à faciliter le lecteur.

Le cas d'une ponctuelle curviligne présente aussi de l'intérêt, par exemple dans le domaine du génie civil; il s'agit de reconstituer un axe qui sera le plus souvent de forme circulaire. En général il faut considérer la fonction

$$F_i\,(A, B, C \ldots x_i, y_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

où $A, B, C \ldots$ sont des paramètres à calculer, au nombre de u $(n > u)$ et x_i, y_i des grandeurs mesurées. En d'autres termes il y a surdétermination puisqu'on mesure n points ($2\,n$ coordonnées); il faut tenir compte des erreurs de mesure v_i' et v_i'' qui, bien entendu, ne sont pas des erreurs vraies mais des résidus à déterminer pour rendre compatible le système d'équations:

$$F_i\,(A, B, C \ldots x_i + v_i', y_i + v_i'') = 0 \tag{2}$$

Avant de poursuivre rappelons que, récemment (No d'août), M. le Prof. W. K. Bachmann a suggéré une solution intéressante en considérant trois grandeurs mesurées; l'auteur visait surtout des applications à l'astronomie.

Dans le cas d'une ponctuelle le calcul peut revêtir des formes variées; au lieu de coordonnées rectangulaires on peut concevoir des coordonnées polaires (r, ϑ) ce qui conduit au système

$$F_i\,(A, B, C \ldots r_i + v_{r_i}, \vartheta_i + v_{\vartheta_i}) = 0 \tag{3}$$

Si la ponctuelle est rectiligne il y a avantage à choisir l'origine à proximité de la ponctuelle pour les r_i, ϑ_i.

Dans certains cas enfin les coordonnées seront purement angulaires (α, β); il faut alors deux origines

$$F_i\,(A, B, C \ldots \alpha_i + v_{\alpha_i}, \beta_i + v_{\beta_i}) = 0 \tag{4}$$

on sait que les poids de mesures angulaires sont d'une détermination plus facile.

Le cas n'est pas exclu où les paramètres sont liés par des conditions:

$$\varphi\,(A, B, C \ldots) = 0, \quad \psi\,(A, B, C \ldots) = 0$$

Cette hypothèse sera réalisée si, par exemple, on peut reconstituer a priori, sans ambiguité, un ou deux des n points.

Dans la littérature on rencontre parfois, au lieu du système (2), la forme:

$$F_i\,(A, B, C \ldots x_i, y_i) - v_i = 0. \tag{5}$$

Cette manière de résoudre le problème appelle les plus expresses réserves.

Le but de la présente note est très limité; il s'agit:

1° de développer une solution par l'élimination préalable des paramètres.

2° de montrer que les systèmes (2) et (5) peuvent parfois conduire, numériquement, aux mêmes résultats.

3° de traiter un cas comportant purement des mesures angulaires.

En faisant intervenir des valeurs provisoires A_0, B_0, $C_0 \ldots$ des paramètres et en posant:

$$A = A_0 + \Delta A, \; B = B_0 + \Delta B, \; C = C_0 + \Delta C \ldots$$

on obtient la forme linéaire:

$$w_i + a_i \cdot \Delta A + b_i \cdot \Delta B + c_i \cdot \Delta C \ldots + f_i'\,v_i' + f_i''\,v_i'' = 0 \tag{6}$$

où le terme absolu

$$w_i = F_i\,(A_0, B_0, C_0 \ldots x_i, y_i)$$

avec la condition: $\quad [p'\,v'\,v'] + [p''\,v''\,v''] = \text{minimum}$

les p_i' et p_i'' exprimant les poids des x_i et y_i.

La théorie de l'équivalence est applicable

$$f_i'\,v_i' + f_i''\,v_i'' = \lambda_i = -w_i - a_i \cdot \Delta A - b_i \cdot \Delta B - c_i \cdot \Delta C \ldots \text{(poids } p_i) \tag{7}$$

en attribuant à λ_i le poids fictif p_i

$$\frac{1}{p_i} = \frac{f_i'^2}{p_i'} + \frac{f_i''^2}{p_i''} \quad \text{d'où} \quad [p'v'v'] + [p''\,v''\,v''] = [p\lambda\lambda] = \text{minimum} \tag{8}$$

Les λ_i sont en nombre surabondant ce qui permet le calcul à double de ce minimum. M. le prof. Baeschlin a montré que

$$[p\lambda\lambda] = [q\rho\rho] \quad \text{où} \quad q_i = p_i\,(f_i'^2 + f_i''^2) \tag{9}$$

ρ_i exprimant la distance du point $(x_i\,y_i)$ à la courbe compensatrice.

Quant aux équations normales elles peuvent s'écrire:

$$[pa\lambda] = [pb\lambda] = [pc\lambda] = \ldots = 0 \tag{10}$$

Solution par l'élimination des paramètres

Pour simplifier la démonstration admettons $u = 2$ et $n = 3$

$$\begin{vmatrix} f_1'v_1' + f_1''v_1'' + w_1 & a_1 & b_1 \\ f_2'v_2' + f_2''v_2'' + w_2 & a_2 & b_2 \\ f_3'v_3' + f_3''v_3'' + w_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

ou en développant en fonction des mineurs A_1, A_2, A_3

$$A_1\,(f_1'\,v_1' + f_1''\,v_1'') + A_2\,(f_2'\,v_2' + f_2''\,v_2'') + A_3\,(f_3'\,v_3' + f_3''\,v_3'') + w = 0$$

Equations aux corrélatifs:

$$\left.\begin{aligned} p_i'\,v_i' &= K\cdot f_i'\,A_i \\ p_i''\,v_i'' &= K\cdot f_i''\,A_i \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Equation normale:

$$\left[\frac{f_i'^2\,A_i^2}{p_i'} + \frac{f_i''^2\,A_i^2}{p_i''}\right] K + w = 0 \tag{13}$$

et en introduisant les λ_i:

$$A_1\,\lambda_1 + A_2\,\lambda_2 + A_3\,\lambda_3 + w = 0 \tag{14}$$

Equations aux corrélatifs: $p_i\,\lambda_i = K'\cdot A_i$

Equation normale: $\left[\frac{AA}{p}\right] K' + w = 0$

En attribuant à p_i la valeur fictive (8) on a $K = K'$; la solution est vérifiée et:

$$p_i'\,v_i' = f_i'\,p_i\,\lambda_i;\quad p_i''\,v_i'' = f_i''\,p_i\,\lambda_i \tag{15}$$

Cas où le poids fictif p_i est indépendant de l'indice i.

Ce cas est pratiquement intéressant; le poids p_i ne varie plus d'un point à l'autre de la ponctuelle et le système (10) devient:

$$[a\lambda] = [b\lambda] = [c\lambda[= \ldots = 0 \tag{16}$$

on obtient le système d'équations normales relatif à l'équation (5) en posant $\lambda_i = v_i$; discutons l'expression qui donne p_i:

1re hypothèse: Les valeurs f_i' et f_i'' sont chacune indépendantes de l'indice i; ce cas se présente avec la ponctuelle rectiligne.

2e hypothèse: La somme $(f_i'^2 + f_i''^2)$ est indépendante de l'indice. Il suffit que $p_i' = p_i'' =$ constante. On peut poser $p_i = 1$.

Considérons une ponctuelle *circulaire:*

$$F = x^2 + y^2 + 2\,A\,x + 2\,By + C = 0; \quad R^2 = A^2 + B^2 - C \quad (\text{R} = \text{rayon})$$

En valeur absolue les paramètres A et B sont égaux aux coordonnées du centre ($x_0 = -A$, $Y_0 = -B$)

$$f_i'^2 + f_i''^2 = (2\,x_i + 2\,A)^2 + (2\,y_i + 2\,B)^2 = 4\,R^2$$

$$a_i = 2\,x_i; \quad b_i = 2\,y_i; \quad c_i = 1$$

Ce coefficient c_i est éliminé en formant les équations «réduites». Seuls subsistent les coefficients réduits a_i' et b_i'; ($[a'] = [b'] = 0$). Implicitement l'origine est transférée au centre de gravité du système de points. Les valeurs $[a'\ a']$ et $[b'\ b']$ sont assimilables à des moments d'inertie et $[a'\ b']$ à un moment centrifuge.

Cette compensation fournit donc non seulement les coordonnées du centre de la courbe ($-A$, $-B$) mais aussi tous les éléments relatifs à la précision.

Ponctuelle déterminée par des mesures angulaires

Un cas simple, qui se prête bien à des mesures angulaires, est celui où l'on peut reconstituer a priori, sans ambiguité, deux points d'une ponctuelle circulaire, l'origine et l'extrémité par ex. Désignons par T_1 et T_2 ces points et par P_i un des points mesurés ($i = 1, 2 \ldots n$).

Le problème inverse se présente aussi en pratique lors du tracé d'un arc de cercle sans le secours de mesures linéaires. Un théodolite est placé en T_1 et un autre en T_2; il suffit alors de faire pivoter les lunettes avec la même vitesse et dans le même sens. L'angle compris entre les visées correspondantes, issues respectivement de T_1 et T_2, est constant; le point d'intersection des visées engendre un arc de cercle. Pour mémoire rappelons que si les lunettes pivotent avec la même vitesse, mais en sens opposé, le lieu est une hyperbole équilatère.

Pour reconstituer, donc pour lever la ponctuelle, un seul théodolite suffit. Les éléments mesurés sont les angles

$$P_i T_1 T_2 = \alpha_i \qquad \text{et} \qquad P_i T_2 T_1 = \beta_i$$

avec les résidus ou corrections v_{α_i} et v_{β_i} ($i = 1, 2 \ldots n$).

Le paramètre A sera l'arc $T_1 T_2$ ou mieux l'angle inscrit à cet arc:

$$\alpha_i + v_{\alpha_i} + \beta_i + v_{\beta_i} = A$$

ou

$$v_{\alpha_i} + v_{\beta_i} = A + w_i \qquad (-w_i = \alpha_i + \beta_i)$$

avec l'équation normale sous forme implicite

$$[\lambda] = 0 \quad \text{et} \quad [\lambda\lambda] = 0 \qquad (p_i = 1)$$

si les mesures sont d'égale précision car $f_i'^2 = f_i''^2 = 1$.

L'équation (9): $[p\lambda\lambda] = [q\rho\rho]$

prend une forme particulière; on a en effet

$$\rho_i = s_i\,\lambda_i \;(\lambda_i \text{ en radians}) \qquad \text{donc: } [\lambda\lambda] = \left[\frac{\rho\rho}{ss}\right]$$

le coefficient s_i est appelé parfois la *sensibilité* du segment de cercle; on sait que les courbes de sensibilité constante sont du 4[e] degré (courbes de Cassini)

$$s_i = \frac{P_i T_1 \times P_i T_2}{T_1 T_2} = \frac{h_i}{\sin(\alpha_i + \beta_i)} \backsimeq \frac{h_i}{\sin A}; \quad \frac{s_i}{h_i} = \text{constante}$$

où h_i est la hauteur du triangle abaissée du sommet P_i.

Ce cas est particulier en ce sens qu'on a un seul paramètre. On pourrait trouver d'autres cas, éventuellement en coordonnées polaires.

Le problème si souvent traité de la détermination d'une ponctuelle est donc susceptible de bien des développements si l'on ne se borne pas à utiliser des coordonnées rectangulaires. En principe le calcul est toujours le même mais s'il s'agit de coordonnées polaires la détermination des poids est moins simple.

Private Arrondierungen im Siedelungswesen

Von Ed. Strebel, Bern

Wenn der Bund seit 1926 landwirtschaftliche Siedelungsbauten subventioniert, so knüpft er daran gewisse Voraussetzungen bezüglich des zugehörigen Areals. Das erste Kreisschreiben des Bundesrates, das von Siedelungen spricht (4. September 1926), ordnet ihnen zu, daß sie „bei Anlaß größerer Güterzusammenlegungen oder zur Besiedelung von bisher ungenügend oder noch nicht bewohnten, größern, an sich fruchtbaren Gebieten" erstellt werden. Ein nur relativ kurze Zeit in Kraft stehendes bundesrätliches Kreisschreiben vom 29. Januar 1943 drückte sich kürzer aus, indem es lediglich die Verbindung mit Meliorationen oder die Besiedelung abgelegener Gebiete zur Voraussetzung stempelte. Gerade die „Verbindung mit Meliorationen" muß als etwas vage Subventionierungsbasis bezeichnet werden. Wohl nicht zuletzt deshalb führt der heute gültige Erlaß (Kreisschreiben vom 27. Oktober 1944), der zwar im Ingreß die gleichen Ausdrücke wiederholt, weiter aus: „An Siedelungsbauten, die nicht in Verbindung mit subventionierten Güterzusammenlegungen erstellt werden, wird eine Bundesunterstützung nur gewährt, wenn es sich um die Besiedelung abgelegener Gebiete handelt oder wenn in Verbindung mit der Neusiedelung eine erhebliche Verbesserung der Arrondierungs- und Bewirtschaftungsverhältnisse erreicht wird." Damit wird näher defi-