

# Die Genauigkeit des Rückwärtseinschneidens

Autor(en): **John, R.K.C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **51 (1953)**

Heft 3

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-210070>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Die Genauigkeit des Rückwärtseinschneidens

Von Dr. R. K. C. Johns, Geodetic Survey of Canada

In Jordan-Eggerts „Handbuch der Vermessungskunde“, Band II/1, 9. Auflage, ist auf den Seiten 450–452 die Ableitung des mittleren Punktfehlers dargestellt.

Wir wollen eine andere Darstellung des mittleren Punktfehlers entwickeln, welche die direkten geometrischen Zusammenhänge der Fehlerfortpflanzung enthält.

## I

Gemäß der Fig. 1 können folgende Gleichungen aufgestellt werden, welche die Berechnung der Koordinaten  $x_p$ ,  $y_p$  des Neupunktes  $P$  ermöglichen.

Gegeben: Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$

Gemessen: Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  mit mittleren Fehlern  $\pm m_\alpha$ ,  $\pm m_\beta$

Gesucht: mittlerer Punktfehler

$$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

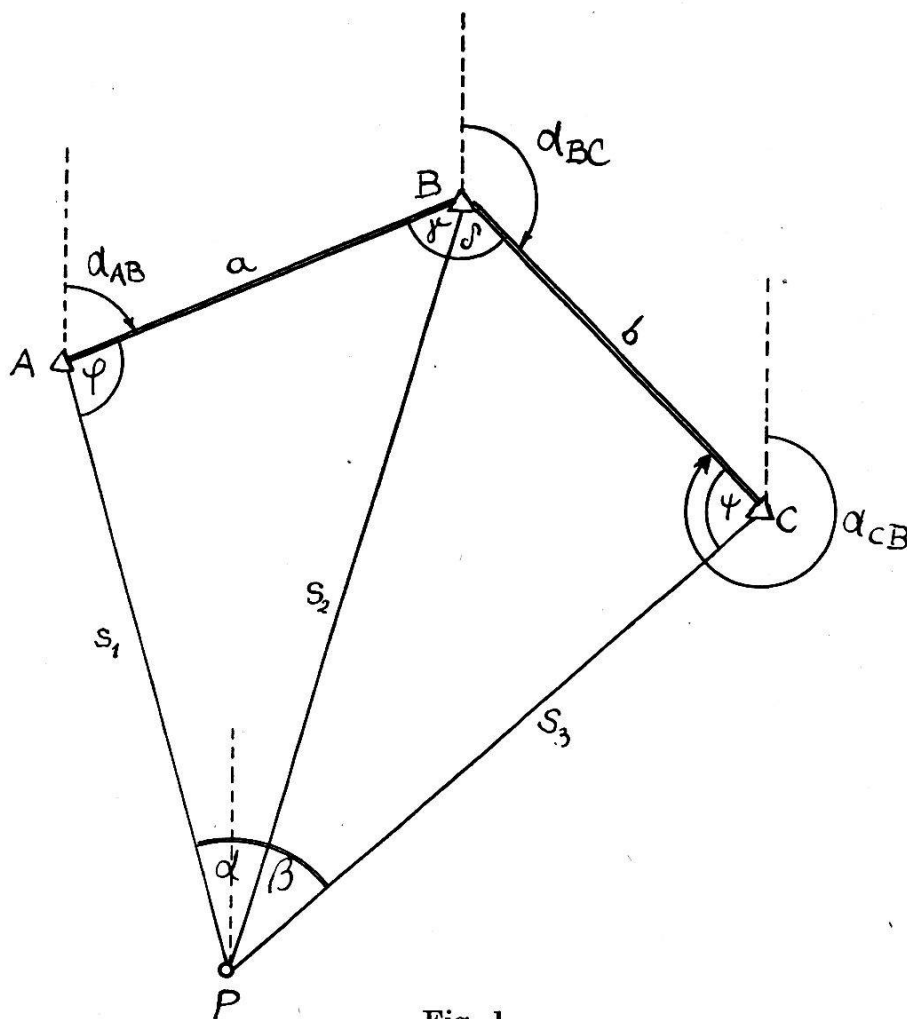


Fig. 1

Aus den bekannten Azimuten berechnen wir

$$(1) \quad \gamma + \delta = \alpha_{BA} - \alpha_{BC}$$

Weiter, aus dem Viereck  $ABCP$

$$(2) \quad \varphi + \psi + \alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^\circ = 0$$

und

$$(3) \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - \frac{b}{a} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 0$$

Die Gl. (2) und (3) erlauben uns,  $\varphi$  und  $\psi$  als Funktionen von  $\alpha$  und  $\beta$  zu bestimmen

$$(4) \quad \varphi = \varphi(\alpha, \beta); \quad \psi = \psi(\alpha, \beta)$$

Sind  $\varphi$  und  $\psi$  bekannt, dann erhalten wir aus den Dreiecken  $ABP$  und  $BCP$ :

$$(5) \quad \begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \varphi) \\ \delta &= 180^\circ - (\beta + \psi) \end{aligned}$$

und die Distanzen:

$$(6) \quad AP = s_1 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma$$

$$(7) \quad CP = s_3 = \frac{b}{\sin \beta} \sin \delta$$

Als Rechenkontrolle haben wir:

$$(8) \quad BP = s_2 = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

Die Azimute sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$(9) \quad \alpha_1 = \alpha_{AP} = \alpha_{AB} + \varphi$$

$$(10) \quad \alpha_2 = \alpha_{BP} = \alpha_1 + \alpha = \alpha_3 - \beta$$

$$(11) \quad \alpha_3 = \alpha_{CP} = \alpha_{CB} - \psi$$

Als Endergebnis erhalten wir die Koordinaten, mit den Rechenkontrollen:

$$(12) \quad Y_P = Y_A + s_1 \sin \alpha_1 = Y_C + s_3 \sin \alpha_3$$

$$(13) \quad X_P = X_A + s_1 \cos \alpha_1 = X_C + s_3 \cos \alpha_3$$

Nachdem die obigen Gleichungen vorliegen, welche die Berechnung der Koordinaten als Funktion der gemessenen Winkel  $\alpha, \beta$  ermöglichen, wollen wir uns mit dem Problem des mittleren Punktfehlers befassen.

## II

Die Gl. (2) und (3) können als implizite Funktionen von  $\alpha, \beta, \varphi(\alpha, \beta)$  und  $\psi(\alpha, \beta)$  folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2a) \quad f[\alpha, \beta, \varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)] = 0$$

und

$$(3a) \quad g[\alpha, \beta, \varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)] = 0$$

Nach den Regeln der Differentiation der impliziten Funktionen erhalten wir aus (2)

$$(14) \quad 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0$$

$$1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0$$

und aus (3), nach goniometrischen Umformungen

$$(15) \quad -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0$$

$$+ \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0$$

Aus den Gl. (14) und (15) werden die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial \beta}$  berechnet. Da aber

$$(16) \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d\beta$$

erhalten wir:

$$(17) \quad d\varphi = -\frac{\operatorname{ctg} \psi - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} d\alpha - \frac{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \psi}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} d\beta$$

$$(18) \quad d\psi = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} d\alpha - \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} d\beta$$

Es kann weiter gefunden werden, aus (5):

$$(19) \quad d\gamma = -d\alpha - d\varphi$$

$$(20) \quad d\delta = -d\beta - d\psi$$

aus (6):

$$(21) \quad ds_1 = -s_1 (\text{ctg } \gamma + \text{ctg } \alpha) d\alpha - s_1 \text{ctg } \gamma d\varphi$$

aus (7):

$$(22) \quad ds_3 = -s_3 (\text{ctg } \beta + \text{ctg } \delta) d\beta - s_3 \text{ctg } \delta d\psi$$

aus (9):

$$(23) \quad d\alpha_1 = d\varphi$$

aus (11):

$$(24) \quad d\alpha_3 = -d\psi$$

aus (12):

$$(25) \quad dY_p = \sin \alpha_1 ds_1 + s_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1$$

aus (13):

$$(26) \quad dX_p = \cos \alpha_1 ds_1 - s_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1$$

Die obigen Gleichungen erlauben uns, die vollständigen Differentiale der Koordinaten des Neupunktes  $P$  nach  $\alpha$  und  $\beta$  zu erhalten.

### III

Wenn in (25) die entsprechenden Werte für  $ds_1$ ,  $d\alpha_1$  und  $d\varphi$  eingesetzt werden, erhalten wir nach der Durchführung von Umformungen:

$$(27) \quad dY_p = (-M_1 \Delta Y_A - M_2 \Delta X_A) d\alpha - (+N_1 \Delta Y_A + N_2 \Delta X_A) d\beta$$

sowie auch von (26):

$$(28) \quad dX_p = (-M_1 \Delta X_A + M_2 \Delta Y_A) d\alpha - (-N_1 \Delta X_A + N_2 \Delta Y_A) d\beta$$

wo

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = + \frac{\text{ctg } \alpha \text{ctg } \psi + 1}{\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \psi} \quad M_2 = + \frac{\text{ctg } \psi - \text{ctg } \alpha}{\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \psi} \\ N_1 = + \frac{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \psi}{\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \psi} \text{ctg } (\alpha + \varphi) \\ N_2 = + \frac{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \psi}{\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \psi} \\ \Delta X_A = X_P - X_A \\ \Delta Y_A = Y_P - Y_A \end{array} \right.$$

bedeuten.

Aus den Gl. (27) und (28) können die entsprechenden mittleren Fehler der Koordinaten gebildet werden:

$$(30) \quad m_y^2 = (M_1 \Delta Y_A + M_2 \Delta X_A)^2 m_\alpha^2 + (N_1 \Delta Y_A + N_2 \Delta X_A)^2 m_\beta^2$$

und

$$(31) \quad m_x^2 = (M_1 \Delta X_A - M_2 \Delta Y_A)^2 m_\alpha^2 + (N_1 \Delta X_A - N_2 \Delta Y_A)^2 m_\beta^2$$

Der mittlere Punktfehler, definiert als

$$m_p^2 = m_x^2 + m_y^2$$

wird daher

$$(32) \quad m_p^2 = s_1^2 [(M_1^2 + M_2^2) m_\alpha^2 + (N_1^2 + N_2^2) m_\beta^2]$$

Mit  $m_\alpha = m_\beta = m$  erhalten wir

$$(33) \quad m_p^2 = m^2 s_1^2 (M_1^2 + M_2^2 + N_1^2 + N_2^2)$$

Werden die Werte  $M_1, M_2, N_1$  und  $N_2$  von (29) in Gl. (33) eingesetzt, dann erhalten wir nach Umformungen für den mittleren Punktfehler:

$$(34) \quad m_p^2 = m^2 s_1^2 \frac{\sin^2 \varphi [\sin^2 \beta \sin^2 (\alpha + \varphi) + \sin^2 (\beta + \psi) \sin^2 \alpha]}{\sin^2 (\varphi + \psi) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 (\alpha + \varphi)}$$

Stehen uns mehr als drei Fixpunkte zur Verfügung und haben wir die Auswahl der Punkte für die Neupunktbestimmung zu treffen, dann können wir folgendermaßen vorgehen:

Wir ermitteln näherungsweise die Werte  $s_1, \varphi, \psi, \alpha, \beta$ , wobei die Genauigkeit von einigen Graden vollständig genügt. Setzt man in (34) die ermittelten Werte für  $s_1, \alpha, \beta, \varphi, \psi$  sowie den mittleren Fehler der Winkelmessung  $m$  ein, dann erhält man den zu erwartenden mittleren Fehler der Punktbestimmung  $m_p$ . Haben wir solche Untersuchungen für einige Varianten der Fixpunkte durchgeführt, werden wir uns für jene Fixpunkte entschließen, die den kleinsten mittleren Punktfehler ergeben.

#### IV

Die Überprüfung der Gl. (34) ergibt, daß, wenn sich die Summe  $(\varphi + \psi)$   $180^\circ$  nähert, der mittlere Punktfehler stark zunimmt. Der Fall  $\varphi + \psi = 180^\circ$  kommt vor, wenn alle vier Punkte auf einem Kreis liegen, der durch die Punkte  $A, B, C$  definiert ist. Folglich werden wir, bevor wir ins Feld gehen, jedes Rückwärtseinschneiden daraufhin untersuchen, ob nicht dieser Fall vorliegt.

Zur Vereinfachung der Untersuchungen wollen wir den symmetrischen Spezialfall des Rückwärtseinschneidens untersuchen, wo  $\alpha = \beta, \varphi = \psi$ , dann erhalten wir:

$$(35) \quad m_p = \frac{\pm m \cdot s_1}{\sqrt{2 \cos \varphi \sin \alpha}}$$

Wird weiter berücksichtigt, daß im Dreieck  $ABP$   $\varphi = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ , so erhalten wir nach Umformung:

$$(36) \quad m_p = \frac{\pm m \cdot s_1}{\sqrt{2} \cos(\alpha + \gamma) \sin \alpha}$$

Aus der Diskussion der Gl. (36) können wir folgende Schlüsse ziehen:

1. Der mittlere Punktfehler wird ein Maximum sein, wenn  $\varphi = 90^\circ = \alpha + \gamma$  ist. Dieser Fall kommt vor, wenn der Neupunkt auf dem Kreis liegt, der durch die Fixpunkte gegeben ist. Das ist der Fall des sog. gefährlichen Kreises.

2. Ein anderer Spezialfall liegt vor, wenn  $\alpha = 90^\circ$  ist; dann liegt der Neupunkt im Zentrum des Kreises, der durch die Fixpunkte bestimmt ist. Aus (36) erhalten wir:

$$m_p = \frac{\pm m \cdot s_1}{\sqrt{2} \sin \gamma}$$

Da hier  $\gamma = 45^\circ$  ist, wird damit  $m_p = \pm ms_1$ , was dem günstigsten Fall des Vorwärtseinschneidens entspricht. (Vgl. Jordan-Eggert, Band II/1, S. 429.)

3. Wenn die Punkte  $A, B, C$  auf einer Geraden liegen, dann wird  $\gamma = 90^\circ$  sein, und der mittlere Punktfehler ist

$$m_p = \pm \frac{m \cdot s_1}{\sqrt{2} \sin^2 \alpha}$$

Es wird daher vorteilhaft sein,  $\alpha$  groß zu machen.

4. Wenn  $\alpha + \gamma$  nahezu  $180^\circ$  wird, erhalten wir für den mittleren Punktfehler

$$m_p = \pm \frac{m \cdot s_1}{\sqrt{2} \sin \alpha}$$

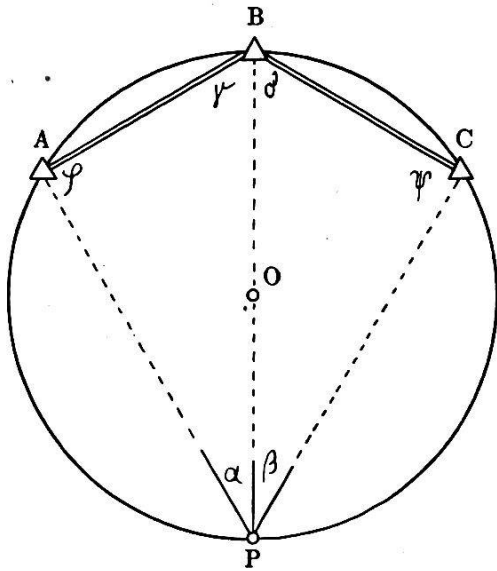
Für kleine  $\alpha$  wird  $m_p$  groß werden.

5. Der mittlere Punktfehler ist direkt proportional der Länge der Visur  $s_1$ . Folglich ist es ungünstig, lange Visuren zu wählen.

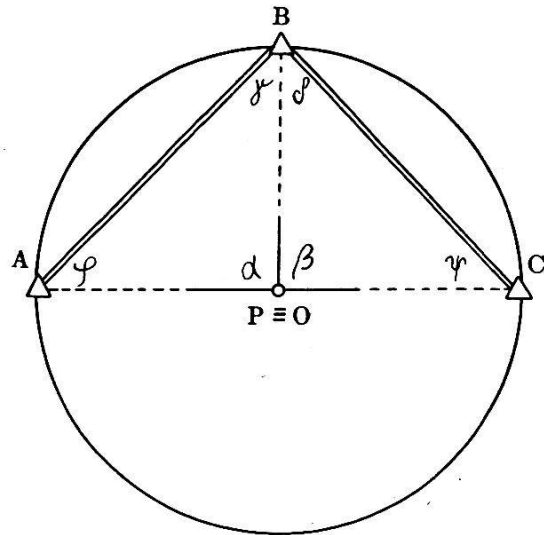
Wollen wir rasch eine überschlägige Orientierung über die Fehlerfortpflanzung des Rückwärtseinschneidens erhalten, dann kann es in manchen Fällen genügen, den mittleren Punktfehler mit Hilfe der Gl. (36) zu berechnen, wobei für  $s_1, \alpha, \gamma$

$$s_1^* = \frac{s_1 + s_3}{2}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

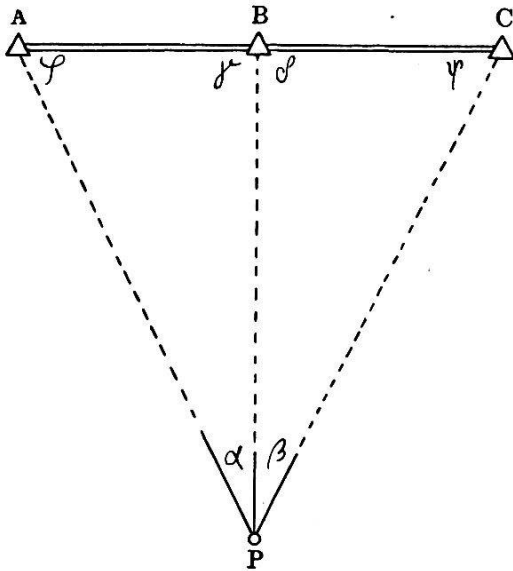
einzusetzen sind. Diese Formulierung dürfte für den Praktiker von Interesse sein, falls  $\alpha$  und  $\beta$  sowie  $\gamma$  und  $\delta$  nicht stark voneinander differieren, und wir bloß an einer überschlägigen Berechnung interessiert sind.



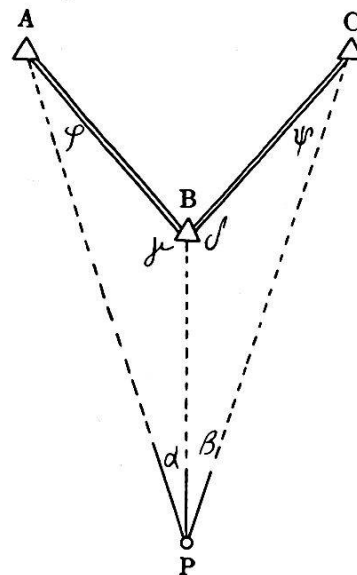
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Fall 4

Fig. 2

Wir geben die von Jordan-Eggert auf S. 451 abgeleitete Gl. (8) an, indem wir  $m_\alpha = m_\beta = m$  gesetzt haben

$$(37) \quad m^2_p = \frac{\pm m^2}{4 \Delta^2} \left[ (r_2^2 + r_3^2 - 2 r_2 r_3 \cos [\varphi_3 - \varphi_2]) + \right. \\ \left. + (r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos [\varphi_2 - \varphi_1]) \right]$$



Es bedeuten:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \Delta = - (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1) (r_3 \cos \varphi_3 - r_2 \cos \varphi_2) \\ \quad + (r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2) (r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1) \\ r_1 = \frac{1}{s_1}; \quad r_2 = \frac{1}{s_2}; \quad r_3 = \frac{1}{s_3} \\ \text{tang } \varphi_1 = \frac{Y_A - Y_P}{X_A - X_P}; \quad \text{tang } \varphi_2 = \frac{Y_B - Y_P}{X_B - X_P}; \quad \text{tang } \varphi_3 = \frac{Y_C - Y_P}{X_C - X_P} \end{array} \right.$$

Die Gleichung (37) ist mit (34) zu vergleichen. Die Gl. (36), die aus (34) abgeleitet wurde, hat uns die fehlertheoretische Diskussion der Spezialfälle des Rückwärtseinschneidens ermöglicht.

## Pilze in Holzkastendrainagen

*Von E. Schibli, Chur*

Die Holzkastendrainagen nach dem System Butz haben schon zu Beginn dieses Jahrhunderts in der Schweiz Eingang gefunden und sind zuerst vorwiegend in unseren Berggebieten angewendet worden. Die Verwendung von Holz für die Drainageleitungen ist vor allem unter Hinweis auf die jahrtausendalten Überreste der Pfahlbauten an den Ufern unserer Seen des Mittellandes propagiert worden. Den Bergbauern war dieses neue Entwässerungssystem insofern willkommen, als es die Verwendung einheimischen Materials und dessen Verarbeitung auf den fast überall vorkommenden eigenen Gemeindesägen ermöglichte. Das geringere Gewicht der Holzbretter – im Vergleich zu dem der Tonröhren – brachte eine erwünschte Reduktion der Transportkosten, was sich speziell in abgelegenen Gebieten merkbar auswirkte. Der Verlad und der Transport der erst auf der Baustelle zusammenzunagelnden Bretter war zudem handlicher und bequemer als das Sperrgut der in den Ziegeleien des Flachlandes fertigfabrizierten Tonröhren. Trotz der im allgemeinen eher konservativen Einstellung der Bergbauern ist es nicht verwunderlich, daß im Hinblick auf die augenfälligen Vorteile das neue Entwässerungssystem relativ häufig angewendet worden ist. Die heute 30 bis 40 Jahre alten Holzkastendrainagen in den Berggebieten haben sich fast ausnahmslos auch bewährt.

Als in den letzten Kriegsjahren die Entwässerungstätigkeit im ganzen Schweizerland brüsk intensiviert werden mußte, um früher Versäumtes möglichst rasch nachzuholen, wurden nicht nur die Kulturingenieure und Techniker, sondern auch die Ziegeleien mit Arbeit überhäuft und vermochten ihre Aufträge nicht laufend zu bewältigen. Die ungenügende Kohlenzufuhr aus dem Ausland hat die gewünschte Steigerung der Tonröhrenfabrikation nicht erlaubt. Die früher im Flachland fast ausschließ-