Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **51 (1953)**

Heft 12

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-210111

L'opération complète, observations et calculs, s'effectue en moins d'une heure de temps.

Bemerkung: Was der Verfasser Déclinaison nennt, ist natürlich nicht diese Größe (welche die Abweichung zwischen astronomisch und magnetisch Nord darstellt), sondern die Korrektion, um welche die Ablesungen des Boussolentheodolits korrigiert werden müssen, um Richtungsmittel (Neigungen) zu erhalten.

Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

Eine Primzahl p ist ihrem Wesen nach eine ungerade Zahl. Die ihr vorangehende ganze Zahl $p-1$, wie auch die ihr nachfolgende $p+1$ haben beide mindestens den Teiler zwei. Die Logarithmen von $p-1$ und $p+1$ lassen sich daher immer durch die Summe der Logarithmen kleinerer ganzer Zahlen finden.

Wir wollen die Aufgabe lösen, $\log p$ aus $\log (p-1)$ und $\log (p+1)$ zu berechnen.

Es ist

$$\text{(1a)} \qquad \ln (p+1) = \ln \left[p\left(1+\frac{1}{p}\right)\right] = \ln p + \ln \left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$\text{(1b)} \qquad \ln (p-1) = \ln \left[p\left(1-\frac{1}{p}\right)\right] = \ln p + \ln \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Da $\left(\frac{1}{p}\right)^2 < 1$, können wir $\ln \left(1+\frac{1}{p}\right)$ und $\ln \left(1-\frac{1}{p}\right)$ mit Hilfe der bekannten Reihe für $\ln (1+x)$ berechnen. Es ist

$$\text{(2a)} \qquad \ln \left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \ldots (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^\nu + \ldots$$

$$\text{(2b)} \qquad \ln \left(1-\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \ldots - \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^\nu - \ldots$$

Die Summe von (1a) und (1b) gibt

$$\text{(3a)} \qquad \ln (p+1) + \ln (p-1) = 2 \ln p + \ln \left(1+\frac{1}{p}\right) + \ln \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

(1a) minus (1b) liefert

$$\text{(3b)} \qquad \ln (p+1) - \ln (p-1) = \ln \left(1+\frac{1}{p}\right) - \ln \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Aus (2a) und (2b) finden wir

$$
\text{(4a)} \quad \begin{aligned} & ln\left(1+\frac{1}{p}\right)+ln\left(1-\frac{1}{p}\right)= \\ & =-2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}\right)^4+\ldots+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu}+\ldots\right\} \end{aligned}
$$

$$
\text{(4b)} \quad \begin{aligned} & ln\left(1+\frac{1}{p}\right)-ln\left(1-\frac{1}{p}\right)= \\ & =+2\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu-1}+\ldots\right\} \end{aligned}
$$

Mit ν bezeichnen wir immer die Nummer des Gliedes in der Reihe. Aus (3a) und (4a) folgt

$$
\text{(5)} \quad \begin{aligned} & ln\, p=\frac{1}{2}\left[ln\,(p+1)+ln\,(p-1)\right]+ \\ & +\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^4+\ldots+\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu}+\ldots\right\} \end{aligned}
$$

Die Formel (5) löst zwar die gestellte Aufgabe.

Wir können sie aber noch bedeutend besser konvergent machen, indem wir den Ansatz aufstellen

$$
\text{(6)} \quad \begin{aligned} & ln\, p=\frac{1}{2}\left[ln\,(p+1)+ln\,(p-1)\right]+ \\ & +\frac{1}{4}\left[ln\,(p+1)-ln\,(p-1)\right]\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{B_4}{p^3}+\ldots\frac{B_{2\nu}}{p^{2\nu-1}}+\right\} \end{aligned}
$$

Setzen wir hier für die 2. eckige Klammer den Wert nach (3b) und (4b) ein, so finden wir

$$
\text{(7)} \quad \begin{aligned} & ln\, p=\frac{1}{2}\left[ln\,(p+1)+ln\,(p-1)\right]+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3+\ldots+\right. \\ & \left.+\frac{1}{2\nu-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu-1}+\ldots\right\}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{B_4}{p^3}+\ldots+\frac{B_{2\nu}}{p^{2\nu-1}}\right\} \end{aligned}
$$

Vergleichen wir das mit der Formel (5), so ergibt sich:

$$
\begin{aligned} & \frac{1}{1}\left(\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^4+\ldots+\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu}= \\ & =\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}-\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu-1}+\ldots\right\}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{B_4}{p^3}+\ldots+\frac{B_{2\nu}}{p^{2\nu-1}}\right\} \end{aligned}
$$

Die Ausmultiplikation der rechten Seite liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{B_2}{p^2} + \frac{B_4}{p^4} + \frac{B_6}{p^6} + \frac{B_8}{p^8} + \frac{B_{10}}{p^{10}} + \frac{B_{12}}{p^{12}} \\
&\quad + \frac{B_2}{3p^4} + \frac{B_4}{3p^6} + \frac{B_6}{3p^8} + \frac{B_8}{3p^{10}} + \frac{B_{10}}{3p^{12}} \\
&\quad + \frac{B_2}{5p^6} + \frac{B_4}{5p^8} + \frac{B_6}{5p^{10}} + \frac{B_8}{5p^{12}} \\
&\quad + \frac{B_2}{7p^8} + \frac{B_4}{7p^{10}} + \frac{B_6}{7p^{12}} \\
&\quad + \frac{B_2}{9p^{10}} + \frac{B_4}{9p^{12}} \\
&\quad + \frac{B_2}{11p^{12}}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^6} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^8} + \frac{1}{5}\frac{1}{p^{10}} + \frac{1}{6}\frac{1}{p^{12}} \qquad (8)
$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{p^{2\nu}}$ auf der linken und der rechten Seite dieser Gleichung finden wir, da sie für jeden beliebigen Wert von p gelten muß, die 6 folgenden in den $B_{2\nu}$ linearen Gleichungen, die also zur Berechnung der 6 unbestimmten Koeffizienten B_2, B_4 bis B_{12} hinreichen.

$$
\begin{aligned}
1 &= B_2 \qquad (9) \\
\frac{1}{2} &= \frac{B_2}{3} + B_4 \\
\frac{1}{3} &= \frac{B_2}{5} + \frac{B_4}{3} + B_6 \\
\frac{1}{4} &= \frac{B_2}{7} + \frac{B_4}{5} + \frac{B_6}{3} + B_8 \\
\frac{1}{5} &= \frac{B_2}{9} + \frac{B_4}{7} + \frac{B_6}{5} + \frac{B_8}{3} + B_{10} \\
\frac{1}{6} &= \frac{B_2}{11} + \frac{B_4}{9} + \frac{B_6}{7} + \frac{B_8}{5} + \frac{B_{10}}{3} + B_{12}
\end{aligned}
$$

Aus der 1. dieser Gleichungen folgt

$$B_2 = 1 \tag{10_1}$$

Aus der zweiten erhalten wir, wenn wir den gefundenen Wert für B_2 einsetzen

$$B_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \tag{10_2}$$

In analoger Weise finden wir

$$B_6 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{7}{90}. \tag{10_3}$$

$$B_8 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{7}{3 \cdot 90} = \frac{181}{3780} \tag{10_4}$$

$$B_{10} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6.7} - \frac{7}{5 \cdot 90} - \frac{181}{3 \cdot 3780} = \frac{1903}{56\,700} \tag{10_5}$$

$$B_{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} - \frac{1}{6 \cdot 9} - \frac{7}{7 \cdot 90} - \frac{181}{5 \cdot 3780} - \frac{1903}{3 \cdot 56\,700} = \frac{47\,458}{1\,871\,100} \tag{10_6}$$

(Schluß folgt)

Eindrücke vom VIII. Internationalen Kongreß der Geometer, Paris 1953

Internationale wissenschaftliche und fachtechnische Kongresse werden mit verschiedenen Zielen besucht. Wohl das vornehmste Ziel ist, einen neuen Überblick über den Stand der Wissenschaft und Technik zu erhalten, neuere Erfahrungen und Erkenntnisse mit denen der Fachleute anderer Länder austauschen und vergleichen zu können, um damit die weitere Entwicklung zu fördern und die persönlichen Beziehungen für einen weiteren Austausch zu erneuern oder neue anzuknüpfen. Das Kongreßziel, Arbeitsmittel, Arbeitsverfahren, Organisationen, Ausbildung der Fachleute oder gar gesetzliche Ordnungen zu vereinheitlichen, wird sich nur für Wissens- und Arbeitsgebiete verwirklichen lassen, die über die Landesgrenzen hinweg reichen, wie z. B. für Geodätenkongresse mit ihrem Thema des Studiums der Figur der Erde. Für andere Wirkungskreise, in denen die Nationen voneinander unabhängig sind, rät die Erfahrung, Unifizierungsziele nicht weit zu stecken. Der wissenschaftliche und technische Fortschritt arbeitet der Vereinheitlichung entgegen; der verschiedene Stand der Kultur in verschiedenen Ländern und die Verschiedenheit der Aufgaben bieten der Normierung nur ein kleines Spielfeld. Ver-