Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl [Schluss]

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **52 (1954)**

Heft 1

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-210926

Les exposés de MM. Favarger et Chenuz furent suivis avec un vif intérêt, et M. Pierre Deluz, président de la Société vaudoise des géomètres officiels, les remercia chaleureusement. *Ls H.*

Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

(Schluß)

Setzen wir die Werte für die B in die Gleichung (6) ein, so erhalten wir

$$(11)\quad \begin{cases} ln\, p = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(p+1) + ln\,(p-1)] + \\ + [ln\,(p+1) - ln\,(p-1)] \left\{ \dfrac{1}{4\,p} + \dfrac{1}{24\,p^3} + \dfrac{7}{360\,p^5} + \right. \\ \left. + \dfrac{181}{15\,120\,p^7} + \dfrac{1903}{226\,800\,p^9} + \dfrac{23\,729}{3\,742\,200\,p^{11}} \right\} \end{cases}$$

Da $\log a =$ Mod. $ln\, a$ und auf der rechten Seite lauter natürliche Logarithmen als Faktoren vorhanden sind, finden wir aus (11) sofort die Formel für den Briggschen Logarithmus von p, $\log p$., indem wir überall ln durch log ersetzen, indem wir aus (11) auf beiden Seiten mit dem Modulus multipliziert denken.

So erhalten wir:

$$(12)\quad \begin{cases} \log p = \dfrac{1}{2}\,[\log\,(p+1) + \log\,(p-1)] \\ + [\log\,(p+1) - \log\,(p-1)] \left\{ \dfrac{1}{4\,p} + \dfrac{1}{24\,p^3} + \dfrac{7}{360\,p^5} + \right. \\ \left. + \dfrac{181}{15\,120\,p^7} + \dfrac{1903}{226\,800\,p^9} + \dfrac{23\,729}{3\,742\,200\,p^{11}} \right\} \end{cases}$$

Da $\log\,(p+1) - \log\,(p-1)$ klein ist, wenn $p > 1000$, ist die Formel (12) sehr viel rascher konvergent als die ursprüngliche Formel (5), in der die Reihe auf der rechten Seite noch mit dem Modulus multipliziert werden müßte, wenn wir $\log p$ erhalten wollten.

Wir können (12) noch in einer für die numerische Rechnung bequemeren Form erhalten, indem wir mit F. J. *Duarte*[1] setzen

$$(13)\quad \begin{cases} S = \dfrac{1}{2}\,[\log(p+1) + \log(p-1)] \\[2ex] \Delta_0 = \dfrac{1}{4\,p}\,[\log(p+1) - \log(p-1)] \\[2ex] \Delta_k = \dfrac{\Delta_{k-1}}{6\,p^2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

Damit wird

$$(14)\quad \begin{aligned} \log p = S + \Delta_0 + \Delta_1 + \frac{28}{10}\,\Delta_2 + \frac{724}{70}\,\Delta_3 + \frac{30\,448}{700}\,\Delta_4 + \\ + \frac{1\,518\,656}{7700}\,\Delta_5 + R_5 \end{aligned}$$

wie man ohne weiteres aus (12) erkennt. Der Rest R_5 ist kleiner als ein Viertel der Einheit der 43. Dezimalstelle; das letzte hingeschriebene Glied mit Δ_5 ist $< 0 \cdot 0^{38}5$, wenn $p > 1000$ ist. Da *Duarte* in dem zitierten Werk die Briggschen Logarithmen für alle Primzahlen von 1 bis 10007 auf 36 Dezimalen gibt, ist $p > 10\,007$.

Zur Erläuterung behandeln wir die Berechnung von $\log p$ mit $p = 10009$. Es ist

$$p + 1 = 10\,010 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

$$p - 1 = 10\,008 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 139.$$

Wir wollen log 10009 auf die 16. Stelle genau berechnen. Nach den genannten Tafeln von *Duarte* finden wir:

log 7	0.8450	9804	0014	2568_3
log 11	1.0413	9268	5158	2250_4
log 13	1.1139	4335	2306	8367_7
log 10	1.			
log 10010	4.0004	3407	7479	3186_4

[1] F. J. Duarte, Nouvelles Tables logarithmiques à 36 décimales, Paris 1933. S VIII.

log 8	0.9030	8998	6991	9435_9
log 9	0.9542	4250	9439	3248_7
log 139	2.1430	1480	0254	0950_8
log 10 008	4.0003	4729	6685	3635_4

log 10 010 + log 10 008	8.0007	8137	4164	6821_8
$\frac{1}{2}$ [log 10010 + log 10008]	4.0003	9068	7082	$3410_9 = S$
Δ = log 10010 — log 10008	0,0000	8678	0793	9551_0

$$4\,p = 40\,036$$

Wir führen die Berechnung von Δ_0 mit 8stelligen Logarithmen durch, was, wie wir sehen werden, genügt, um die 16. Stelle von log p richtig zu erhalten.

p^2 ... 8.00 078
6 ... 0.77 815
$6\,p^2$ ... 8.77 893

$p = 10009$ ... 4.000 39069
4 ... 0.602 05999
$4\,p$ ... 4.602 45068

Δ ... 5.938 42362 —10
$: 4\,p$ 4.602 45068

Δ_0 ... 1.335 97294 —10 $\quad \Delta_0 = 0.0000\ 0000\ 2167\ 5690_5$
$: 6\,p^2$ 8.77893

Δ_1 ... 2.55704 —20 $\quad \Delta_1 = 360 \cdot 6 \cdot 10^{-20}$. Das gibt also keinen Beitrag zur 16. Stelle.

$$\begin{aligned} S &= 4.0003\ 9068\ 7082\ 3410_9 \\ \Delta_0 &= 0.0000\ 0000\ 2167\ 5690_5 \\ \Delta_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad\ 0361 \end{aligned}$$

log 10009 = 4.0003 9068 9249 9101.
Nach Thesaurus = 4.0003 9068 92

D.h. der log 10 009 im 10stelligen Thesaurus ist vollständig korrekt. Als Orientierung für die Berechnung auf 36 Stellen geben wir für unsern Fall noch

$$\frac{28}{10}\,\Delta_2 = 168\ 0000\ 0000 \cdot 10^{-36}$$

$$\frac{724}{70}\,\Delta_3 = 103._2 - 10^{-36}$$

$$\frac{30\,448}{700}\,\Delta_4 = 4.51 \cdot 10^{-44}$$

d.h. die Glieder mit Δ_4 und Δ_5 liegen für $p > 10\,000$ weit unterhalb der Rechenschärfe, auch für die 36. Stelle; für diese Genauigkeit genügt also die Mitnahme von Δ_0, Δ_1, Δ_2 und Δ_3.

Wenn log p auf die 36. Stelle genau berechnet werden soll, muß die Berechnung von Δ_0 und Δ_1 mit einer 16stelligen Rechenmaschine in zwei Gruppen vorgenommen werden, während für die Berechnung von Δ_2 einfache Rechnung genügt. Auf jeden Fall ist wegen der Stellenzahl von 6 p^2 eine 12stellige Maschine notwendig, wobei dann aber die Berechnung von Δ_0 in 3 Gruppen vorgenommen werden muß, während für Δ_1 2 Gruppen genügen. Weiter treten wir auf rechentechnische Fragen nicht ein.

L'étude du sol et les ouvrages d'assainissement

Par Pierre Regamey, Dr ing., Lausanne

Extrait de l'ouvrage publié à l'occasion du centenaire de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

En matière d'assainissement de terrains agricoles, l'étude systématique du sol apporte à l'auteur du projet des renseignements utiles et souvent déterminants.

Diverses propriétés physiques des terres ont une influence directe sur le fonctionnement des ouvrages d'assainissement, drainages, canaux, ou pompages. Réciproquement, connaissant les caractéristiques du sol, notamment la vitesse de filtration par unité de pente et la perméabilité, il est possible de calculer les dimensions de ces ouvrages, en particulier les sections, profondeurs et surtout les écartements des conduites souterraines ou des canaux, ceci en fonction du rendement attendu de ces ouvrages et du régime pluviométrique.

Il est donc intéressant de savoir ce que, dans ce domaine, l'ingénieur peut attendre des résultats obtenus en laboratoire ou dans les sols en place. Il est utile surtout de connaître la répercussion des erreurs entachant les mesures, sur les calculs de dimensionnement. Notre intention est d'analyser ici les principales de ces sources d'erreurs.

Deux constatations préliminaires s'imposent:

Le caractère extensif des travaux d'assainissement en terrains agricoles ne permet pas une étude aussi approfondie des sols qu'en matière de génie civil. Et pourtant, il faut plus que partout ailleurs prévoir le minimum possible d'ouvrages, sans pouvoir admettre un coefficient de sécurité. Le capital investi ne serait, en effet, plus en rapport avec l'augmentation de rendement des surfaces assainies.