Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Band: 53 (1955)

Heft: 1

Artikel: Sur la compensation des mesures linéaires

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-211750

der Unternehmungslust Dr. Helblings und seiner hervorragenden technischen Einfühlungsgabe.

Im Militär erreichte der Verstorbene den Rang eines Obersten in der St.-Gotthard-Befestigung, wo er zuletzt das Kommando der Ostfront innehatte.

Dr. Robert Helbling hat während seines langen Lebens seiner von ihm heißgeliebten Heimat große Dienste geleistet. Er nimmt in den Annalen des schweiz. Vermessungswesens einen hervorragenden Platz ein. Alle, die ihn persönlich gekannt haben, werden ihm ein treues Andenken bewahren.

F. Baeschlin

Sur la compensation des mesures linéaires

Par A. Ansermet

Dans le n° 7 de l'année 1950 de cette Revue a paru un article intéressant intitulé «Geometrie mit Strecken». L'auteur de ce texte encourage les lecteurs à se livrer aussi à l'étude de ce problème si actuel (Verf. hofft damit Anregung zu einer weiteren Bearbeitung der einschlägigen Probleme zu geben). Ce vœu fut réalisé grâce à une publication de la Commission géodésique suisse (voir [1]) dans laquelle le sujet est amplement traité mais sur la sphère. Les lignes qui suivent porteront donc seulement sur quelques aspects particuliers de ces calculs notamment sur la question des poids; on peut en outre, semble-t-il, combiner de façon judicieuse la compensation dite conditionnelle avec la méthode de la variation des coordonnées.

Les r équations de condition aux résidus sont ici peu nombreuses et revêtent la forme usuelle ([2], [5]):

$$(1) \qquad [av] + W_a = 0, \quad [bv] + W_b = 0, \quad [cv] + W_c = 0 \ldots\ldots$$

les $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ désignant des résidus, $W_a, W_b, W_c \ldots\ldots$ des discordances, calculées en fonction des n quantités mesurées. Bien entendu les n valeurs v ne figurent pas dans chacune des équations (1). Le calcul des coefficients $a_i, b_i, c_i \ldots\ldots (i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ est fastidieux, car on ne peut pas appliquer ici des différences logarithmiques comme lors d'autres calculs. Les praticiens ont recours souvent à un procédé semi-graphique.

Pour mémoire rappelons que certains auteurs assimilèrent le réseau à compenser, à r côtés surabondants, à un système hyperstatique à r barres surabondantes. Il y a aussi un problème d'extrêmum où intervient l'énergie de déformation (voir [4]). La question des poids est complexe ([1] p. 22). Une solution assez précaire consiste à leur attribuer des valeurs inverses des carrés des erreurs moyennes telles qu'elles résultent de la valeur la plus probable des éléments mesurés.

Les r conditions sont susceptibles de revêtir diverses formes selon qu'on fait intervenir comme éléments auxiliaires des angles ([1] p. 31–35) ou des surfaces ([3], [5]). Il faut prendre garde à la dimension de la discordance W (valeur angulaire, linéaire, surface). L'élément fondamental, choisi pour la présente étude, sera le quadrilatère complet, considéré isolément ou par groupe de deux ou trois quadrilatères. Successivement les cas suivants seront traités:

$$n=6, \quad r=1, \quad u=5=n-r, \quad [p_i:P_i]^6_1=u=5, \quad (p:P)_m=\frac{5}{6}=0.83$$

$$n=9, \quad r=2, \quad u=7 \quad [p_i:P_i]=7 \quad (p:P)_m=\frac{7}{9}=0.78$$

$$n=10, \quad r=3, \quad u=7 \quad [p_i:P_i]=7 \quad (p:P)_m=\frac{7}{10}=0.70$$

les p_i et P_i étant les poids respectifs avant et après la compensation, tandis que l'indice m indique qu'il s'agit d'une valeur moyenne ([2] p. 159).

Calcul préalable des poids P_i. Lors de l'étude d'un réseau, donc *avant* de commencer les mesures, on désire souvent calculer ces poids ce qui est facile ([2] p. 159), en fonction des valeurs a_i, b_i, c_i ..... et p_i:

$$(2) \qquad \frac{1}{P_i}=\frac{1}{p_i}-\frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}-\ldots\ldots$$

Cette formule établit une corrélation entre les poids p_i et P_i. Pour rendre l'éxposé *plus explicite* faisons une hypothèse restrictive en ce sens que les 4 sommets d'un quadrilatère considéré sont à peu près sur un même cercle. Une grande liberté subsiste encore dans le choix des longueurs des côtés; la formule de Ptolémée est applicable approximativement, les S étant mesurés graphiquement sur une carte.

$$S_1 S_6 \cong S_2 S_4 + S_3 S_5$$

où S_1 et S_6 sont les diagonales, S_2 et S_4 des côtés opposés. Pour le calcul graphique des coefficients on peut écrire:

$$(3) \quad (S_1+v_1)(S_6+v_6) \cong (S_2+v_2)(S_4+v_4)+(S_3+v_3)(S_5+v_5)$$

$v_i =$	$a_i =$	$p_i = 1$
v_1	$a_1 = + S_6$	$1 : P_1 = 1 - S^2_6 : [SS]$
v_2	$a_2 = - S_4$	$1 : P_2 = 1 - S^2_4 : [SS]$
v_3	$a_3 = - S_5$	$1 : P_3 = 1 - S^2_5 : [SS]$
v_4	$a_4 = - S_2$	$1 : P_4 = 1 - S^2_2 : [SS]$
v_5	$a_5 = - S_3$	$1 : P_5 = 1 - S^2_3 : [SS]$
v_6	$a_6 = + S_1$	$1 : P_6 = 1 - S^2_1 : [SS]$

$$[aa]=[SS] \qquad [1:P]=6-1=5, \quad (1:P)_m=\frac{5}{6}=0{,}83=1:1{,}20$$

En moyenne les poids primitifs sont amplifiés 1,2 fois. Si ces poids ne sont pas égaux, le calcul est analogue. Il en est de même quand la formule de Ptolémée n'est pas applicable même approximativement, mais les calculs sont plus laborieux. La formule approchée (3) ne fournit que des valeurs relatives pour les coefficients a_i; l'échelle qui est à la base du calcul graphique est en effet arbitraire.

Cas où 5 points A, B, C, D, E sont reliés par 9 côtés et où $p_i = 1 : S_i$

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 : S_6 : S_7 : S_8 : S_9 =$$

$$BD : BC : CD : AD : AB : AC : AE : ED : BE \backsimeq$$

$$1.00 : 0.52 : 0.72 : 0.98 : 0.61 : 0.95 : 0.58 : 0.63 : 0.98$$

quadr. $ABCD : (1.00 + v_1)(0.95 + v_6) \backsimeq (0.52 + v_2)(0.98 + v_4) + (0.72 + v_3)(0.61 + v_5)$

quadr. $ABDE : (0.98 + v_4)(0.98 + v_9) \backsimeq (1.00 + v_1)(0.58 + v_7) + (0.61 + v_5)(0.63 + v_8)$

d'où $\left[\frac{aa}{p}\right] = 3{,}20, \quad \left[\frac{bb}{p}\right] = 3{,}27, \quad \left[\frac{ab}{p}\right] = -0.78$

$$[p_i/P_i] = 0.68 + 0.83 + 0.92 + 0.69 + 0.77 + 0.68 + 0.81 + 0.92 + 0.70 = 7.00$$

$$p_i = 1.00,\ 1.93,\ 1.39,\ 1.02,\ 1.64,\ 1.05,\ 1.73,\ 1.59,\ 1.02$$

$$(p : P)_m = 1 : 1.29$$

$$i = 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9$$

La structure du réseau joue implicitement un rôle dans la formation des poids P_i. Pour s'en affranchir partiellement considérons une figure symétrique ayant approximativement la forme d'un pentagone régulier.

Cas où 5 points sont reliés par 10 côtés. ($n = 10$, $r = 3$)

On peut constituer 5 quadrilatères mais 3 seulement sont mutuellement indépendants.

Ces 5 quadrilatères peuvent être combinés 3 à 3 de 10 façons différentes. La mesure graphique donne 1.00 pour les côtés et 1.62 pour les diagonales du pentagone.

$$[aa] = [bb] = [cc] = 10.9$$

Les coedficients $[ab]$, $[ac]$, $[bc]$ sont égaux à $+ 5.86$ ou $- 2.24$.

Le calcul est partiellement symétrique pour ces coefficients

$$[p_i : P_i] = 5 \times 0{,}75 + \underbrace{5 \times 0{,}65}_{\text{diagonales}} = 7{,}00; \qquad (p : P)_m = 0{,}70 = 1 : 1{,}43 \quad (p_i = 1)$$

Ce sont les diagonales qui bénéficient le plus de la compensation en ce qui concerne les P_i.

Combinaison de la compensation dite conditionnelle avec la méthode de la variation des coordonnées.

Pour des calculs relatifs à la précision (ellipses d'erreur, etc.) la compensation dite conditionnelle ne donne pas toujours satisfaction. Dans le cas de mesures purement angulaires, on peut se baser sur un côté choisi arbitrairement (4 coordonnées); ce côté est exclu de la compensation. Avec des mesures linéaires on peut choisir 3 coordonnées arbitrairement.

Considérons encore un quadrilatère de sommets I, II, III, IV. Les équations résiduelles ont la forme:

côtés

$$(4)\left\{\begin{array}{rl} \text{I–II:} & -l_1 + v_1 = m_1(dx_2 - dx_1) + n_1(dy_2 - dy_1) \\ \text{I–III:} & -l_2 + v_2 = m_2(dx_3 - dx_1) + n_2(dy_3 - dy_1) \\ \text{I–IV:} & -l_3 + v_3 = m_3(dx_4 - dx_1) + n_3(dy_4 - dy_1) \quad \text{où } m^2{}_i + \\ \text{II–III:} & -l_4 + v_4 = m_4(dx_3 - dx_2) + n_4(dy_3 - dy_2) \quad + n_{2i} = 1 \\ \text{II–IV:} & -l_5 + v_5 = m_5(dx_4 - dx_2) + n_5(dy_4 - dy_2) \\ \text{III–IV:} & -l_6 + v_6 = m_6(dx_4 - dx_3) + n_6(dy_4 - dy_3) \end{array}\right.$$

Les l_i sont les différences entre des valeurs provisoires et mesurées, les dx_i et dy_i des corrections à faire subir à des coordonnées provisoires. On peut poser: $dx_1 = dy_1 = dx_2 = 0$ et $m_1 = 0$, $n_1 = 1{,}00$. L'élimination est immédiate:

$$\left|\begin{array}{cccccc} -l_1 + v_1 & 0 & 0 & n_1 & 0 & 0 \\ -l_2 + v_2 & m_2 & 0 & 0 & n_2 & 0 \\ -l_3 + v_3 & 0 & m_3 & 0 & 0 & n_3 \\ -l_4 + v_4 & m_4 & 0 & -n_4 & n_4 & 0 \\ -l_5 + v_5 & 0 & m_5 & -n_5 & 0 & n_5 \\ -l_6 + v_6 & -m_6 & m_6 & 0 & -n_6 & n_6 \end{array}\right| = 0 = [av] + W$$

L'ellipse d'erreur pour le sommet III par ex. sera déterminée en appliquant les formules ([2] § 31) relatives aux poids réciproques:

$$Q_{FF} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \ldots\ldots \qquad Q_{GG} = [gg] - \frac{[ag]^2}{[aa]} - \ldots\ldots$$

$$Q_{FG} = [fg] - \frac{[af]\,[ag]}{[aa]} - \ldots\ldots$$

$$\text{où} \quad F = f_0 + [fv] = dx_3 \qquad G = g_0 + [gv] = dy_3$$

les coefficients f et g se déduisant facilement des équations (4).

Considérons les deux équations d'erreur fictives:

$$v'_1 = \cos\nu_1 \cdot F + \sin\nu_1 \,.\, G - p' \quad \text{et} \quad v'_2 = \cos\nu_2 \cdot F + \sin\nu_2 \cdot G - p''$$

où $v'_1 = v'_2 = 0$. On peut les assimiler aux équations, sous forme normale ou de Hesse, de deux droites. Exprimons l'équivalence partielle avec la compensation résultant du système (4), eu égard aux fonctions F et G:

$$(\pi_1 \cos^2 \nu_1 + \pi_2 \cos^2 \nu_2) : (\pi_1 \sin^2 \nu_1 + \pi_2 \sin^2 \nu_2) : (\pi_1 \sin \nu_1 \cos \nu_1 + \\ + \pi_2 \sin \nu_2 \cos \nu_2) = Q_{GG} : Q_{FF} : - Q_{FG}$$

π_1 et π_2 désignant les poids de p' et p''. Leur élimination donne:

$$\begin{vmatrix} Q_{GG} & \cos^2 \nu_1 & \cos^2 \nu_2 \\ Q_{FF} & \sin^2 \nu_1 & \sin^2 \nu_2 \\ -Q_{FG} & \cos \nu_1 \sin \nu_1 & \cos \nu_2 \sin \nu_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \begin{vmatrix} Q_{GG} & 1 & 1 \\ Q_{FF} & \mathrm{tg}^2 \nu_1 & \mathrm{tg}^2 \nu_2 \\ -Q_{FG} & \mathrm{tg}\, \nu_1 & \mathrm{tg}\, \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$Q_{GG}\, \mathrm{tg}\, \nu_1\, \mathrm{tg}\, \nu_2\, (\mathrm{tg}\, \nu_1 - \mathrm{tg}\, \nu_2) + Q_{FF}\, (\mathrm{tg}\, \nu_1 - \mathrm{tg}\, \nu_2) + \\ + Q_{FG}\, (\mathrm{tg}\, \nu_1 + \mathrm{tg}\, \nu_2)\, (\mathrm{tg}\, \nu_1 - \mathrm{tg}\, \nu_2) = 0$$

Après division par le facteur $(\mathrm{tg}\, \nu_1 - \mathrm{tg}\, \nu_2)$ on reconnaît l'involution des diamètres conjugués. L'échelle de l'ellipse reste à déterminer.

Détermination des poids p_i.

La longueur des côtés joue un rôle pour la formation des poids p_i. Considérons donc un groupe de points reliés deux à deux par des côtés longs et des côtés courts.

Mesurons les 6 longueurs AB, AC, AD, BC, BD, CD reliant les 4 points en *ligne droite* A, B, C, D ($n = 6$, $u = r = 3$). Les résidus v_i sont tels que:

$$p_i\, v_i = a_i\, k_a + b_i\, k_b + c_i\, k_c \qquad ([2]\ \S\ 30)$$

les k étant les corrélatifs; les coefficients a_i, b_i, c_i sont égaux à $+ 1$ ou $- 1$. On peut faire diverses hypothèses pour les poids p_i; chacune d'elles donne lieu à des valeurs v_i différentes.

Plaçons maintenant un théodolite de précision en un point S et mesurons angulairement les 4 points A, B, C, D, de préférence par la méthode des combinaisons binaires (6 angles mesurés). Désignons par a, b, c, d les 4 rayons SA, SB, SC, SD, par $(abcd) = r$ leur rapport anharmonique (Doppelverhältnis) et par $(ABCD) = r'$ celui des 4 points. On peut écrire d'autres rapports anharmoniques en permutant les lettres $\left(\frac{1}{r}, 1 - r, \frac{1}{1-r}, \frac{r}{1-r}, \frac{1-r}{r}, \text{de même pour } r_i\right)$. Les résidus v_i interviennent dans $(ABCD)$; on devrait avoir $(ABCD) = (abcd)$ où la valeur $(abcd)$ serait admise comme définitive tandis que $(ABCD)$ varie suivant les hypothèses faites. Tel est le principe préconisé pour la détermination de ces p_i; des tâtonnements sont inévitables.

L'expérience montrerait ce que vaut cette suggestion qui, à certains égards, rappelle les travaux du général Ibanez en Espagne. Ce dernier n'a pas fait application directement du rapport anharmonique, mais ses calculs en tiennent compte implicitement sans doute.

En résumé il est aisé de calculer dans quelle proportion les poids p_i sont amplifiés par la compensation. La formule de Ptolémée a permis de calculer instantanément les coefficients, mais en général n'est pas applicable en pratique. La formation des poids p_i est l'élément encore peu sûr du problème. Si l'on effectue le calcul sur la sphère on trouvera toutes les formules nécessaires dans la publication déjà mentionnée ([1]).

Bibliographie

[1] *Baeschlin C. F.*, Die sphärische Berechnung von Streckennetzen (Publication Commission géodésique suisse 1951)

[2] *Großmann W.*, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung (Springer, éditeur)

[3] *Rinner K.*, Geometrie mit Strecken (Schweiz. Zeitschr. f. Verm. 1950, Nrn. 7 u. 8)

[4] *Timoshenko*, Résistance des matériaux (Paris, Béranger)

[5] *Werkmeister P.*, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1932, p. 573

Wasserleitungen aus Kunststoff

Eine Neuerung im Wasserleitungsbau stellt sich vor

A. Zimmermann, Biel

Seit bald einem Jahr werden in der Schweiz Rohre aus Kunststoff hergestellt. Das neue flexible Rohrmaterial wird sowohl im Wasserleitungsbau wie auch in der Industrie verwendet, und es konnten bis jetzt sehr gute Erfahrungen mit dem neuen Produkte gemacht werden.

In den Jahren 1907–1909 gelang es dem in den USA lebenden Belgier Baekeland, den ersten wirklich vollsynthetischen Werkstoff, das nach ihm benannte Bakelit, herzustellen. Damit begann der rasante Aufstieg der Kunststoffindustrie, deren Geschichte bis in die Mitte des letzten Jahrhunderts zurückreicht. Man hatte in den Kunststoffen ein Material gefunden, dessen Eigenschaften je nach Bedarf verschiedenartig gestaltet werden können. Die Eigenschaften der Kunststoffe werden ja nicht durch das Ausgangsmaterial vorbestimmt, sondern durch das Zusammensetzen verschiedener Einzelkomponenten in fast beliebiger Formgebung nach Maß gezüchtet. Nachstehende Zahlen vermögen ein eindrückliches Bild über die Entwicklung der Kunststoffindustrie in den letzten 50 Jahren zu geben:

Jahr	*fabrizierte Tonnage*
1900	20 000 Tonnen
1933	110 000 Tonnen
1945	500 000 Tonnen
1951	1 500 000 Tonnen = 500 Mill. Dollar

Der beispiellose Aufschwung der Kunststoffindustrie in der jüngsten Vergangenheit ist vor allem auf die Verbesserung und Rationalisierung