**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 53 (1955)

**Heft:** 6

**Artikel:** A propos de deux invariants relatifs aux projections conformes en géodésie

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-211778

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

**Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie**

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

**Nr. 6 • LIII. Jahrgang** **Erscheint monatlich** **14. Juni 1955**


## A propos de deux invariants relatifs aux projections conformes en géodésie

*par A. Ansermet*

A l'occasion du 100e anniversaire de la mort de C. F. Gauß notre Rédacteur en chef, qui comme on le sait est un des meilleurs connaisseurs des travaux du génial mathématicien et géodésien, a rappelé tout ce que lui doit la science géodésique. Le but de la présente note est de rendre plus accessible aux lecteurs de notre Revue certains de ces problèmes en les présentant sous une forme aussi peu abstraite que possible.

### *Remarques préliminaires*

Faisons tout d'abord l'hypothèse que le domaine considéré autour de l'origine des coordonnées est relativement restreint; les calculs se prêtent alors à des développements en série.

Partons de l'équation initiale ([1] p. 253):

$$(1) \qquad \Lambda = \frac{1+n}{2n} \cos h\left(\frac{\sqrt{n}}{R}\, x\right) - \frac{1-n}{2n} \cos\left(\frac{\sqrt{n}}{R}\, y\right) \qquad o \leq n \leq 1$$

définissant une projection conforme dite parfois à «variables séparées». $\Lambda$ est le rapport de similitude, $n$ le paramètre de la projection tandis que $R = \sqrt{MN}$ (rayon sphère de référence). En faisant subir aux axes de coordonnées $(x, y)$ une rotation les variables ne sont plus séparées mais les invariants dont il sera question ici sont indépendants de l'orientation des axes; les calculs sont seulement un peu moins simples.

L'équation (1), développée, devient ([4] p. 109):

$$(2) \qquad (\Lambda - 1) = + \frac{1}{4R^2}(1+n)\, x^2 + \frac{1}{48R^4}(1+n)\, n\, x^4 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{4R^2}(1-n)\, y^2 - \frac{1}{48R^4}(1-n)\, n\, y^4 + \ldots\ldots$$

Pour le calcul des déformations et altérations de courbure géodésique on peut s'en tenir en général aux valeurs principales (2e ordre). Pour $\Lambda$ donné et $n$ variable l'équation (2) représente donc un faisceau linéaire de coniques (Büschel) circonscrit à un carré. Si $\Lambda$ varie ($n$ constant) ce sont des ellipses homothétiques. Ces notions connues étant rappelées il est aisé de calculer

*l'altération totale de courbure géodésique subie par un contour fermé (invariant).*

L'équation initiale sera ici ([1] p. 260):

$$d\vartheta = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x}\sin\vartheta - \frac{\delta\Lambda}{\delta y}\cos\vartheta\right) ds \tag{3}$$

qui exprime, en *radians*, l'angle de contingence relatif à la transformée plane d'un arc de géodésique et calculons, pour un arc ou côté $P_1\ P_2$, l'expression (voir [6]):

$$\int_{P_1}^{P_2} d\vartheta = \Sigma = \Sigma_o + \Sigma_n \tag{4}$$

qui est fractionnée en un terme indépendant de $n$ et un terme variant linéairement avec $n$:

$$\Sigma_o \cong \frac{1}{2R^2}(x_1\, y_2 - x_2\, y_1); \quad \Sigma_n \cong \frac{n}{2R^2}(x_2\, y_2 - x_1\, y_1) \tag{5}$$

$\Sigma_o$ étant l'excès sphérique ou sphéroïdique du triangle $OP_1\ P_2$ ($O$ = origine), tandis que pour $n = 1$:

(6) $\Sigma \cong \frac{1}{2R^2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1)$, toujours en radians, qui est l'excès sphérique relatif au trapèze compris entre la transformée $P_1 P_2$ et sa projection orthogonale sur l'axe *neutre* ($x = o$) de la projection conforme. Ces résultats ne sont pas nouveaux.

Considérons maintenant un contour $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_i$, inscrit par ex. dans une ellipse de centre $O$, l'indice $i$ pouvant croître indéfiniment. Pour ce contour fermé on a:

$$\oint d\vartheta = \Sigma_{o1} + \Sigma_{o2} + \ldots + \Sigma_{oi} + \frac{n}{2R^2}\Big\{(x_2\, y_2 - x_1\, y_1) + (x_3\, y_3 - x_2\, y_2) + \ldots + (x_1\, y_1 - x_i\, y_i)\Big\} = \text{excès sph. total} \tag{7}$$

Le groupe de termes en $n$ est éliminé et l'*invariance*, par rapport à $n$, de l'altération totale de courbure géodésique du contour fermé est vérifiée. Ceci bien entendu dans la mesure où on peut s'en tenir aux valeurs principales, ainsi qu'on l'a déjà énoncé. Cette solution d'un pro-

blème fondamental paraît simple. C'est ce théorème que C. F. Gauß a traité de façon magistrale sous une forme tout à fait générale.

*Second problème d'invariance; le critère de G. Darboux*

Notre Revue a déjà fait allusion à cette théorie: L'éminent mathématicien français, trouvant «quelque peu confuse» la théorie connue de Tissot, ([1] p. 246) a énoncé le principe ci-après repris du reste de Tchebychef ([3], [5]):

1° Le contour du territoire à cartographier est une isomètre de la projection conforme ($\Lambda$ constant).

2° La valeur moyenne du carré du gradient de Log $\Lambda$, pour le dit territoire, est un extrêmum (critère de G. Darboux).

$$\int\int\left[\left(\frac{\delta\, Lg\,\Lambda}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\, Lg\,\Lambda}{\delta y}\right)^2\right] dx\,dy \rightarrow \text{extrêmum} \tag{8}$$

Ce problème a été suffisamment étudié ([3], [5]):
Comparons l'équation des isomètres homothétiques ($n$ donné)

$$(\Lambda - 1) \cong \frac{1}{4R^2}\left[(1+n)\,x^2 + (1-n)\,y^2\right] \tag{9}$$

et (10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ qui est l'équation de l'ellipse circonscrite au territoire.

Il faut distinguer 2 cas:

$$n = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1-n}{1+n} = \frac{a^2}{b^2} \tag{11}$$

c'est celui qui répond à la condition (8)

ou $$n \neq \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \qquad \left(\text{paramètre } n' = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)$$

Le calcul de l'extrêmum est facile en fonction des moments d'inertie:

$$\int\int x^2\,d\sigma = \frac{\pi}{4}\,a^3 b \quad \text{et} \quad \int\int y^2 d\sigma = \frac{\pi}{4}\,ab^3 \quad \text{où} \quad d\sigma = dx\,.\,dy$$

et en remarquant que $\int\int d\sigma = \pi\, ab$.

La fonction variable a la forme, après division par $\pi\, ab$:

$$C\left\{(1+n)^2\,a^2 + (1-n)^2\,b^2\right\} \tag{12}$$

où $C$ est un facteur. Il y a extrêmum pour:

$$(1+n)\,a^2 - (1-n)\,b^2 = o$$

L'ellipse-enveloppe est une isomètre et, en comparant les expressions (9) et (12), on voit que:

$$(1+n)^2 \frac{(\Lambda - 1)}{1+n} + (1-n)^2 \cdot \frac{(\Lambda - 1)}{1-n}$$

est indépendant du paramètre de forme $n$. Pour une valeur $\Lambda$ donnée c'est un invariant.

En d'autres termes la valeur moyenne du carré du gradient de Log $\Lambda$ demeure inchangée pour toutes les ellipses-enveloppes appartenant à un même faisceau linéaire (circonscrites à un carré).

L'orientation des axes de coordonnées ne joue pas de rôle; il suffit de considérer qu'une des courbes du faisceau est un cercle.

La question se pose encore de savoir ce que devient cette propriété d'invariance dans le cas général où le territoire est étendu et la surface quelconque. C'est un problème de mathématiques pures.

Il faut se baser sur la théorie de G. Darboux ([3]); ce dernier a posé:

$$\text{Log } \Lambda = \varphi$$

et, remarquant que le gradient de $\varphi$ est égal à $\sqrt{\Delta\varphi}$, introduit comme relation initiale le paramètre différentiel de 1er ordre:

$$\Delta\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} \tag{13}$$

appelé aussi 1er différentiateur de Beltrami (voir [2]). La condition à réaliser est donc:

$$\iint \Delta\varphi \,.\, d\sigma \rightarrow \text{extrêmum.} \tag{14}$$

On sait que $E$, $F$, $G$ sont les grandeurs fondamentales de 1er ordre tandis que $u$ et $v$ sont des coordonnées curvilignes. Pour le surplus le mémoire susmentionné contient tous les développements.

En résumé il a paru opportun de consacrer quelques lignes, d'une part à un célèbre théorème de Gauß que l'on ne peut guère présenter sous une forme plus simple. D'autre part une très modeste contribution à l'étude des projections fait l'objet de la seconde partie de cet exposé.

*Littérature:*


[1] *Baeschlin C. F.* Lehrbuch der Geodäsie (Zürich, Orell-Füßli).
[2] *Blaschke W.* Differentialgeometrie (Berlin, Springer).
[3] *Darboux G.* Sur la construction des cartes géographiques. – Sur une méthode de Tissot relative à la construction des cartes (Bulletin sciences mathématiques 1911, p. 23 et 55).
[4] *Laborde J.* Traité des projections, fasc. 4 (Paris, Hermann).
[5] *Ansermet A.* L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef.
[6] *Ansermet A.* Calcul des déformations dans les réseaux géodésiques (Revue suisse des mensurations, Nos 4, 5, 1944, et 4, 1949).