

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 53 (1955)

**Heft:** 8

**Artikel:** Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-211790>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 8 • LIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

9. August 1955

## Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung

Von K. Ledersteger, Wien

**Zusammenfassung:** Für je zwei Punkte derselben Niveaulfläche kann die Differenz der Meereshöhen auf die Differenz der Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien zurückgeführt werden. Andererseits aber ist die Meereshöhendifferenz auch ein Maß für die Konvergenz der Niveaulflächen oder für den Unterschied der Lotrichtungen im Oberflächen- und im Geoidpunkt. Mithin ist in jedem beliebigen Azimut die Komponente der Richtungsreduktion eine Funktion des horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes der Schwere, der aus der Schweredifferenz in benachbarten Punkten nach entsprechender Korrektur wegen des Höhenunterschiedes abgeleitet werden kann. Die Lotkrümmungsreduktion eines astronomischen Azimutes kann ähnlich aus den Normalabständen der Lotfußpunkte von der Visierebene berechnet werden. Sie tritt additiv zur Formel von *Vening Meinesz* hinzu.

**Summary:** The height-difference of two points in the same equipotential surface can be reduced to the difference of the average values of gravity in the plumb lines. On the other hand this height-difference is also a measure for the convergence of the equipotential surfaces or for the difference of verticals on ground level and on geoid. Therefore in each azimuth the component of reduction of the vertical to sea level is a function of the horizontal gradient of the average value of gravity, which can be gained from the gravity-differences in neighbouring points after a corresponding correction for height-difference. The curvature reduction of an astronomic azimuth even can be calculated from the normal distances of the feet of lines of force from the sighting-plane and must be added to the formula of *Vening Meinesz*.

Wie in einer späteren Untersuchung näher gezeigt werden soll, läßt schon die Definition der absoluten Lotabweichungen einen gewissen Spielraum offen; so sagt z. B. *W. D. Lambert*<sup>1</sup> in seinem Bericht für die

<sup>1</sup> *W. D. Lambert*: To the Members of Study Group Nr. 12 of the IAG, Rom. 1954.

10. Generalversammlung der Internationalen Assoziation für Geodäsie in Rom, September 1954, „that there are as many systems of absolute deflections as there are spheroids of reference“. Außerdem liefern die bisherigen Methoden zur Bestimmung absoluter Lotabweichungen, nämlich die gravimetrische Methode, die astronomisch-gravimetrische Methode und die Methoden der geodätischen Verwertung der Mondparallaxe, keineswegs dasselbe. Die Unterschiede der gewonnenen Lotabweichungen liegen in erster Linie in der Lotkrümmung begründet und es muß daher die Frage der Lotkrümmung geklärt werden, ehe das erwähnte Thema erfolgversprechend in Angriff genommen werden kann.

Die Lotkrümmung ist aber auch für die praktische Geodäsie von größter Bedeutung, da von ihrem Betrag und ihrer sicheren Erfassung die einwandfreie Reduktion der astronomischen Beobachtungen auf das Geoid abhängt. Die Lotkrümmung ist gewissermaßen der Pferdefuß bei dem Bemühen, die projektive Methode der astronomischen Geodäsie in die Tat umzusetzen und durch eine astronomisch-geodätische Ausgleichung das naturtreue Netz zu gewinnen. Hierauf hat schon wiederholt *C. F. Baeschlin* hingewiesen und er kommt zu dem Schlusse:<sup>2</sup> „Was im jetzigen Moment zur Erhöhung der Genauigkeit von Triangulationen getan werden kann, das ist die Berücksichtigung der Geoidundulationen, um die Basen auf das Berechnungsellipsoid zu reduzieren.“

Wie alle Probleme, welche die Verhältnisse in der Erdkruste betreffen, ist auch das Problem der Lotkrümmung nicht hypothesenfrei zu lösen. Unser Bemühen muß daher darauf gerichtet sein, für die Berechnung der Lotkrümmung mit einem Minimum an hypothetischen Voraussetzungen eine möglichst exakte Formel zu entwickeln, wobei natürlich der praktischen Verwendbarkeit dieser Formel besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden ist. Hierzu gehen wir von der schon *Helmert* bekannten Tatsache aus, daß die Lotkrümmungskorrektur des astronomischen Nivellements bis auf Glieder höherer Ordnung mit der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements übereinstimmt.

Verläuft (Fig. 1) zwischen zwei benachbarten Terrainpunkten  $P_i$  und  $P_k$  der Vertikalschnitt mit dem Ausgangsazimut  $\alpha_i$  und sind  $\xi_i$  und  $\eta_i$  die meridionale und Ostwestkomponente der relativen Lotabweichung in  $P_i$ , so ist die in das Azimut des Schnittes fallende Lotabweichungskomponente  $\varepsilon_i$  durch

$$\varepsilon_i = \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \sin \alpha_i \quad (1)$$

gegeben. Projiziert man im Sinne *Helmerts* die Oberflächenpunkte mittels der Ellipsoidnormalen auf das Referenzellipsoid, dann ist  $\varepsilon_i$  der Winkel zwischen der Niveaufläche von  $P_i$  und einer Parallelfäche zum Referenzellipsoid, der sich wegen der Nichtparallelität der Niveauflächen, d. h. eben wegen der Lotkrümmung, von dem entsprechenden Winkel  $\varepsilon_i$  zwischen dem Geoid und einer Parallelfäche zum Ellipsoid etwas unter-

<sup>2</sup> *C. F. Baeschlin*: Über die Lotkrümmung, Mitteilung an die Studienkommission 1 der IAG, Rom. 1954.

scheidet. Die gesuchte Erhebung des Geoides über das Referenzellipsoid ist dann durch

$$dz = -\varepsilon' ds = -\varepsilon ds + (\varepsilon - \varepsilon') ds \quad (2)$$

bestimmt. Das negative Vorzeichen erklärt sich daraus, daß im Falle einer Geoidhebung auf dem Wege  $\overrightarrow{P_i P_k}$  die Richtung im Geoidschnitt der Abweichung des astronomischen vom ellipsoidischen Zenit im Punkte  $P_i$

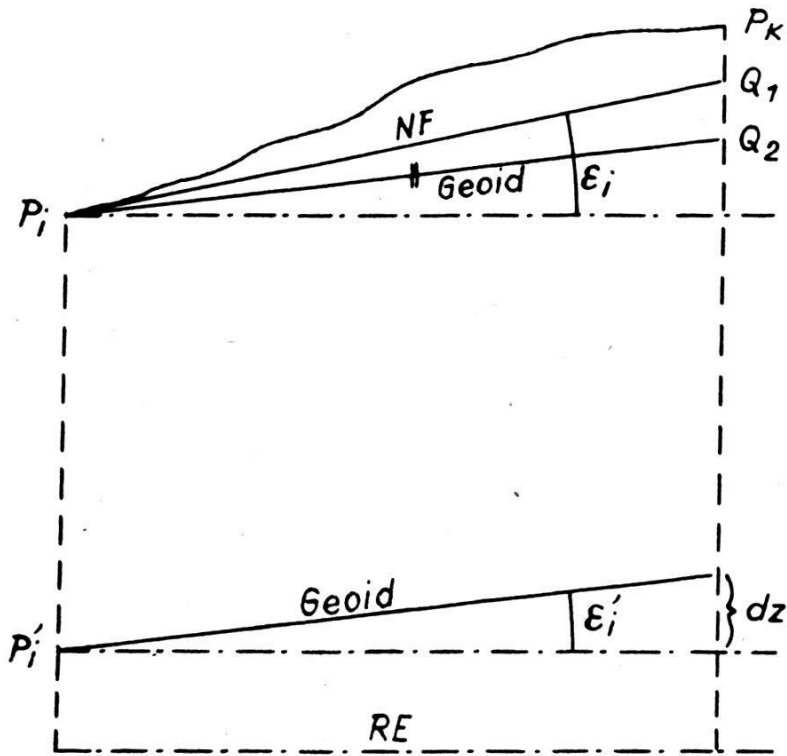


Fig. 1

entgegengesetzt ist. Das negativ genommene letzte Glied von (2) wird als „Korrektion wegen Lotkrümmung“ bezeichnet. Um den erwähnten Zusammenhang mit der orthometrischen Korrektion des geometrischen Nivellements aufzuzeigen, überlegen wir, daß sich das unmittelbare Nivellementsergebnis  $dn = \overrightarrow{Q_1 P_k}$  von der Zunahme der Meereshöhe  $dH = \overrightarrow{Q_2 P_k}$  gemäß

$$dH = dn - (\varepsilon - \varepsilon') ds \quad (3)$$

um den gleich Betrag unterscheidet. Man sieht leicht, daß bei diesen Betrachtungen einige sehr kleine Vernachlässigungen begangen wurden. Es wurde nicht nur die gekrümmte Lotlinie mit der Ellipsoidnormalen identifiziert, sondern auch die Konvergenz der Normalen und die Änderung des Linienelementes zwischen benachbarten Normalen mit der Höhenlage unterdrückt.

In Fig. 2 tritt an Stelle des Referenzellipsoides das Geoid, und die Projektion erfolgt im Sinne *Pizzettis* mittels der gekrümmten Lotlinie.

Ferner ist der Einfachheit halber zunächst angenommen, daß  $P_k$  in der Niveaulfläche des Punktes  $P_i$  liegt, also  $dn = 0$  ist. Schließlich ist in der Figur dem Normalfall Rechnung getragen, bei dem die Niveaulflächen in nördlicher Richtung (Azimut Null) zusammenrücken. Sind jetzt  $\varphi'_i$  und  $\lambda'_i$  die astronomisch bestimmbaren Komponenten der Lotrichtung in  $P_i$ ,

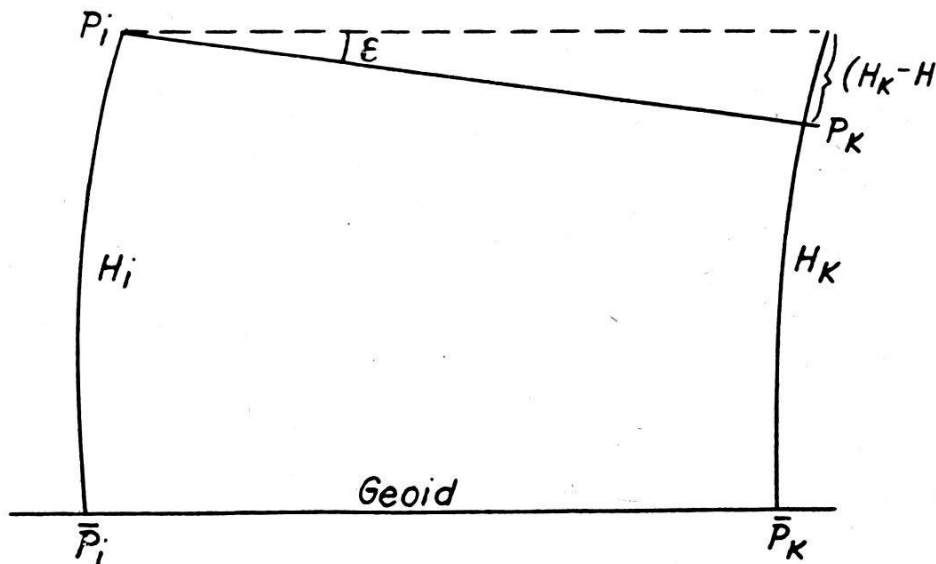


Fig. 2

hingegen  $\bar{\varphi}'_i$  und  $\bar{\lambda}'_i$  die entsprechenden Größen für die Lotrichtung im Fußpunkt  $\bar{P}_i$ , so haben die Reduktionen

$$d\varphi' = \bar{\varphi}' - \varphi'; \quad d\lambda' = \bar{\lambda}' - \lambda' \quad (4)$$

der astronomischen Beobachtungsdaten auf das Geoid im Azimut  $\alpha$  die Komponente

$$\varepsilon = d\varphi' \cos \alpha + d\lambda' \cos \varphi' \sin \alpha, \quad (5)$$

welche Gleichung an Stelle von (1) tritt. Es folgt sofort für die Differenz der Meereshöhen oder Lotlinienlängen:

$$\Delta H = H_k - H_i = + \varepsilon \cdot \Delta s. \quad (6)$$

Das Vorzeichen hat sich gegenüber (3) umgekehrt, weil die Differenzen (4) im Sinne von Korrekturen der Beobachtungswerte angesetzt wurden.

Da die beiden Punkte  $P_i$  und  $P_k$  nach Voraussetzung auf derselben Niveaulfläche liegen, haben sie dieselbe dynamische Höhenkote  $H'$ . Versteht man unter  $\gamma_{45} = 980,635$  gal die normale Schwerkraft im Meeresniveau unter  $45^\circ$  Breite, so gewinnt man aus dem Differential des Potentials

$$-dW = g dh = \gamma_{45} dh' \quad (7)$$

mittels Integration über die Lotlinie

$$\bar{g}H = \gamma_{45} H', \quad (8)$$

wobei  $\bar{g}$  den Durchschnittswert der Schwere in der Lotlinie im Sinne *Niethammers*<sup>3</sup> bedeutet. Für unsere beiden Punkte ist daher

$$\bar{g}_k H_k = \bar{g}_i H_i \quad (8a)$$

und man findet für die Differenz (6)

$$H_k - H_i = \frac{\bar{g}_i - \bar{g}_k}{\bar{g}_k} H_i = - \frac{\bar{g}_k - \bar{g}_i}{\gamma_{45}} \cdot H_i. \quad (9)$$

Gewöhnlich liegt nun  $P_k$  natürlich nicht in der Niveauläche von  $P_i$ , sondern weist einen positiven oder negativen Höhenunterschied  $\Delta n$  gegenüber  $P_i$  auf. Ist dann  $Q$  der in der Niveauläche von  $P_i$  liegende Punkt der Lotlinie von  $P_k$  und bezeichnet man seine Höhe entsprechend (9) mit  $H_k$ , so haben wir die beiden Fälle der Figuren 3 und 4 zu unterscheiden.

Bezeichnet man die topographische Reduktion, d. h. die negative Anziehung der Überschuß- und Defizitmassen gegenüber einer durch den Oberflächenpunkt  $P_k$  gelegten horizontalen Ebene, im laufenden Punkt  $U$  der Meereshöhe  $h$  mit  $T_U$  und beachtet, daß die Anziehung einer unendlichen *Bouguerschen* Platte der Dicke  $h$  auf einen über ihr liegenden Aufpunkt unter Verwendung der Sialdichte  $\vartheta = 2,67$

$$2 \pi k^2 \vartheta \cdot h = 0,1120 h_m \text{ mgal} \quad (10)$$

wird, so findet man zusammen mit der Freiluftreduktion  $0,3086 \Delta h_m$  mgal im Falle eines positiven  $\Delta n$ :

$$\begin{aligned} g_u + T_u &= g_P + T_P + (0,3086 - 0,2240) (H_k + \Delta n - h) = \\ &= g_P + T_P + 0,0846 (H_k + \Delta n - h). \end{aligned} \quad (11)$$

Es ist dies die Schwerereduktion von *Poincare-Prey* und  $g_U$  die wahre Schwerebeschleunigung in  $U$ , abgesehen höchstens von einer geänderten Wirkung der isostatischen Kompensationsmassen. Durch Integration findet man aus (11):

$$\begin{aligned} \int_{\bar{P}_k}^Q g_U dh &= \bar{g}_k H_k = [g_P + T_P + 0,0846 (H_k + \Delta n)] \cdot H_k - \\ &\quad - 0,0846 \frac{H_k^2}{2} - \int_{\bar{P}_k}^Q T_U \cdot dh, \end{aligned}$$

also

$$\bar{g}_k = g_P + T_P + 0,0423 \cdot H_k + 0,0846 \Delta n - \bar{T}_k, \quad (12)$$

<sup>3</sup> *Th. Niethammer*: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard, Teil II, Astr.-geod. Arbeiten in der Schweiz, Bd. 20, Bern 1939.

wenn man mit  $\bar{T}_k$  die „topographische Korrektur des Durchschnittswertes“

$$\bar{T}_k = \frac{1}{\bar{P}_k} \int_{P_k}^Q T_U, dh \quad (13)$$

bezeichnet. Es ist zu beachten, daß diese Definition von der *Niethammers* abweicht, da das Integral nicht bis zum Oberflächenpunkt  $P_k$ , sondern nur bis  $Q$  zu erstrecken ist.

Etwas komplizierter gestaltet sich die Ableitung im zweiten Falle  $\Delta n < 0$ , weil hier die Anziehung der *Bouguerschen* Platte nicht mehr ganz

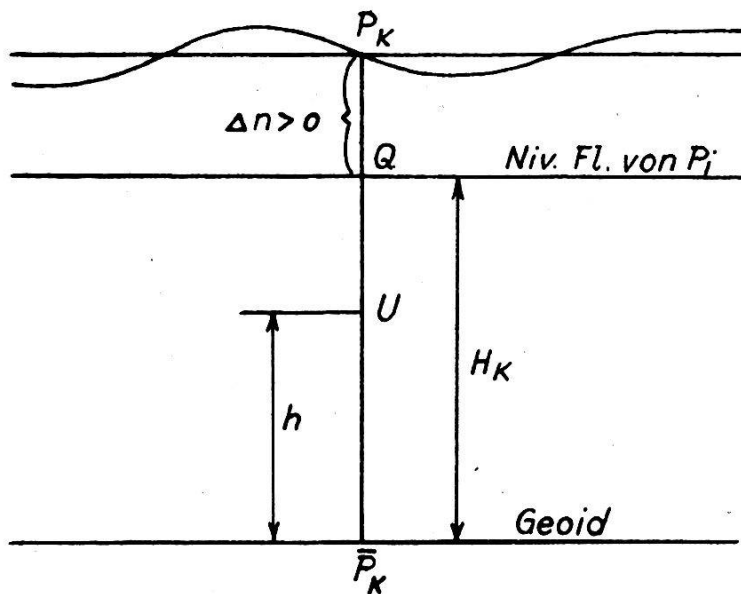


Fig. 3

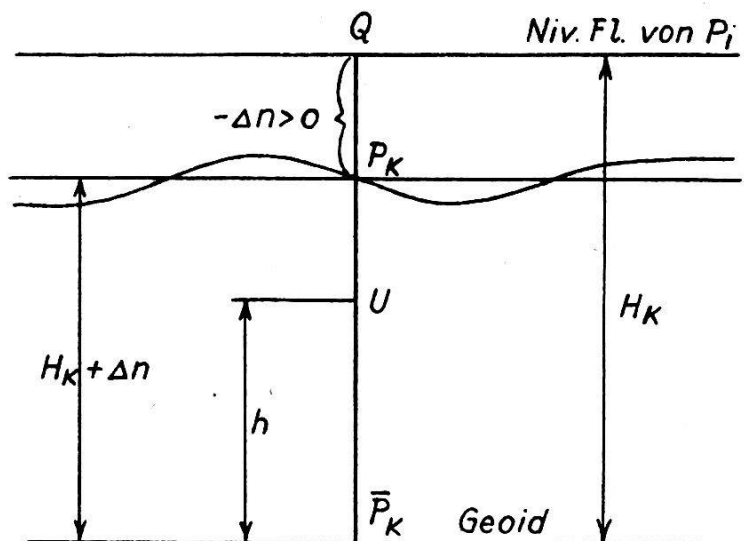


Fig. 4

linear mit  $h$  verläuft, sondern zwischen  $P_k$  und  $Q$  konstant ist. Während also von  $\bar{P}_k$  bis zur Oberfläche in  $P_k$  wieder die Gleichung (11) gilt, hat man oberhalb

$$g_U + T_U = g_P + T_P + 0,3086 (H_k + \Delta n - h) \quad (11a)$$

und es wird:

$$\begin{aligned} \bar{g}_k H_k &= \int_{\bar{P}_k}^{P_k} g_U \cdot dh + \int_{P_k}^Q g_U \cdot dh = (g_P + T_P - \bar{T}_k) \cdot H_k + 0,0846 (H_k + \Delta n)^2 \\ &- 0,0846 \frac{h^2}{2} \Big|_0^{H_k + \Delta n} - 0,3086 (H_k + \Delta n) \cdot \Delta n - 0,3086 \frac{h^2}{2} \Big|_{H_k + \Delta n}^{H_k} \end{aligned}$$

Nach leichten Umformungen folgt hieraus

$$\bar{g}_k = g_P + T_P - \bar{T}_k + 0,0423 H_k + 0,0846 \Delta n - 0,1120 \frac{(\Delta n)^2}{H}. \quad (12a)$$

Das letzte Glied des zweiten Falles wird nur selten zu berücksichtigen sein. Es wird bei gleichem  $\Delta n$  nur in kleinen Meereshöhen nennenswerte Beträge erreichen und darf immer vernachlässigt werden, wenn

$$(\Delta n)^2 < 0,05 H. \quad (13)$$

Gemäß (6) und (9) erhält man für die Reduktion wegen Lotkrümmung den einfachen Ausdruck:

$$\varepsilon'' = - \frac{\rho''}{\gamma_{45}} (\bar{g}_k - \bar{g}_i) \cdot \frac{H_i}{\Delta s}$$

oder wenn alle Schwerewerte in mgal ausgedrückt werden:

$$\varepsilon'' = - 0,2103 (\bar{g}_k - \bar{g}_i) \cdot \frac{H_i}{\Delta s}. \quad (14)$$

Wegen (12) und

$$\bar{g}_i = g_i + T_P - \bar{T}_i + 0,0423 H_i \quad (15)$$

folgt für die Differenz der Durchschnittswerte

$$(\bar{g}_k - \bar{g}_i) = (g_k - g_i) + \Delta T_{ki} + 0,0846 \Delta n \left( -0,1120 \frac{(\Delta n)^2}{H} \right), \quad (16)$$

wenn man für die Differenz der topographischen Korrekturen noch abkürzend setzt:

$$\Delta T_{ki} = (T_k - T_i)_P - (\bar{T}_k - \bar{T}_i). \quad (17)$$



Für die eindeutige Bestimmung der Lotkrümmung sind natürlich zwei womöglich senkrecht aufeinanderstehende Schnitte erforderlich, die am besten in den Azimuten  $0^\circ$  und  $90^\circ$  gelegt werden und in diesem Falle unmittelbar  $d\varphi'$  und  $d\lambda'$  liefern. Es empfiehlt sich, in jedem dieser Schnitte je nach der Geländeneigung etwa im Abstand von 30 m, 60 m und 90 m oder im Abstand von 15 m, 30 m und 45 m je drei Punkte (Fig. 5) der

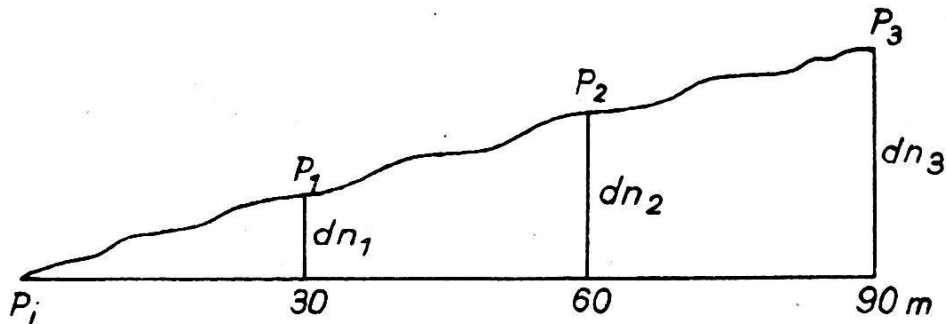


Fig. 5

relativen Höhe nach zu bestimmen und die beobachtete Schweredifferenz ( $g_k - g_i$ ) im Falle eines positiven Höhenunterschiedes um das vorletzte Glied, im Falle eines negativen Höhenunterschiedes um die beiden letzten Glieder von (16) zu korrigieren. Die topographische Korrektur  $\Delta T_{ki}$  wird bei so nahe gelegenen Punkten im allgemeinen sehr klein sein. Strebt man aber höchste Präzision an, so genügt sicherlich die Berechnung von  $(T_k - T_i)$  für einen kleinen Umkreis. Auch diese Teildifferenz verschwindet in dem häufigen Falle einer konstanten Geländeneigung vollends. Aus den je drei Quotienten

$$\frac{(\bar{g}_k - \bar{g}_i)}{\Delta s}$$

kann der horizontale Gradient des Durchschnittswertes  $\bar{g}$  in der Lotlinie für  $ds = 1$  m abgeleitet werden. Dann nimmt (14) die Gestalt an:

$$\varepsilon'' = -0,2103 \frac{d\bar{g}}{ds} \cdot H_m \quad (14a)$$

und speziell für die zwei Hauptrichtungen

$$(d\varphi' )'' = -0,2103 \frac{d\bar{g}}{dx} \cdot H_m; (d\lambda' )'' = -0,2103 \frac{d\bar{g}}{dy} \cdot H_m \sec \varphi. \quad (14b)$$

Am besten wird man (14a) für mehrere äquidistante Azimute berechnen und hieraus  $d\varphi'$  und  $d\lambda'$  durch Ausgleichung bestimmen, um mit den Abweichungen vom linearen Verlauf der horizontalen Gradienten den Einfluß der Topographie möglichst vollständig zu eliminieren.

Die erreichbare Genauigkeit der Lotkrümmungsreduktion ist vor allem eine Funktion der Meereshöhe der Station  $P_i$ . Einem Fehler von

0,0005 mgal im Gradienten des Durchschnittswertes entspricht bei einer Meereshöhe von 3000 m bereits ein Fehler von 0,3 in der berechneten Lotkrümmung. Mithin müssen die einzelnen Differenzen ( $\bar{g}_k - \bar{g}_i$ ) womöglich auf 0,01 mgal sicher bestimmt werden, was abgesehen von der topographischen Korrektur mit dem neuen Askania-Gravimeter GS 9 tatsächlich durchführbar ist<sup>4</sup>. Selbstverständlich müssen die Gravimetermessungen in  $P_i$  und allen Punkten  $P_k$  unmittelbar hintereinander ausgeführt werden, um sowohl den Gang des Instrumentes wie auch den Zeiteneinfluß auszuschalten. In der gewünschten Genauigkeit von 0,01 mgal liegt auch die obige Ungleichung (13) begründet.

Die erste Formel (14b) muß bei Verwendung der theoretischen Schwerkraft natürlich auf die normale Höhenreduktion der beobachteten astronomischen Breite führen. Aus

$$\bar{\gamma} = \gamma_{45} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi - \frac{H}{r} \right) \quad (18)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_i}{\gamma_{45}} &= - \frac{\beta}{2} (\cos 2\varphi_k - \cos 2\varphi_i) = \\ &= + \beta \sin (\varphi_k + \varphi_i) \sin (\varphi_k - \varphi_i) \end{aligned}$$

und für  $\varphi_k = \varphi_i + 1''$ :

$$\frac{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_i}{\gamma_{45}} = + 0,0052884 \sin 2\varphi \cdot \frac{1''}{\rho''}$$

Der Breitendifferenz von 1'' entspricht aber im Mittel ( $\varphi = 45^\circ$ ) ein Bogen  $\Delta s = 30,87$  m und man findet daher wirklich

$$(d\varphi'') = - \frac{\beta}{30,87} \sin 2\varphi \cdot H_m = - 0,000171 H_m \sin 2\varphi. \quad (19)$$

Nach einem Bericht von *D. A. Rice*<sup>5</sup> hat *W. D. Lambert*<sup>6</sup> in einem mir leider nicht zugänglichen unveröffentlichten Manuskript für die Lotkrümmungsreduktion formal mit (14b) übereinstimmende Formeln abgeleitet, in denen aber an Stelle der horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes die entsprechenden Gradienten der Freiluftanomalien  $\Delta g$  auftreten:

$$\begin{aligned} d\varphi'' &= - 0'',2103 \frac{d\Delta g}{dx} \cdot H_m \\ d\lambda'' &= - 0'',2103 \frac{d\Delta g}{dy} \cdot H_m \sec \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>4</sup> *F. Haalck*: Die Genauigkeit eines modernen Gravimeters, Sonderband der Zeitschrift für Geophysik, Braunschweig 1953.

<sup>5</sup> *D. A. Rice*: Deflections of the Vertical from Gravity Anomalies, Bull. Géod. Nr. 25, Paris, 1952.

<sup>6</sup> *W. D. Lambert*: The Comparison of Deflections Observed Astronomically with Those Determined Gravimetrically, Manuscript, 1950.

*Lambert* geht bei der Ableitung dieser Formeln von *Helmerts* äquivalenten Flächenbelegungen<sup>7</sup> aus. Diese „künstliche Topographie“ entsteht aus der Kondensation einer Schicht von der Dicke  $D$

$$D = 2 \left[ \frac{2R}{3\gamma_{45}} \cdot \Delta g + N \right], \quad (21)$$

worin  $R$  den mittleren Kugelradius und  $N$  die Geoidundulation bedeutet. Durch diese Höhen werden die in den Schwereanomalien zum Ausdruck kommenden Unregelmäßigkeiten der Dichte erfaßt. *Lambert* zeigt, daß bei der Berechnung der durch die künstliche Topographie erzeugten Lotabweichungen in den Oberflächen- und Geoidpunkten die endliche Summation der Anziehungen praktisch ausreichend durch eine Betrachtung der Gradienten der Freiluftanomalien in der Nachbarschaft der Station ersetzt werden kann. Für die Reduktion auf das Meeresniveau erfordern die Formeln (21) theoretisch noch eine zusätzliche Korrektur, die der Differenz der Anziehung der natürlichen Topographie vor und nach der Kondensation Rechnung trägt und näherungsweise durch

$$\begin{aligned} d_2\varphi'' &= 0'',024 \frac{\partial H}{\partial y} \cdot H_m \\ d_2\lambda'' &= 0'',024 \frac{\partial H}{\partial x} \cdot H_m \sec \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

gegeben ist. Der Faktor 0'',024 beruht auf der topographischen Dichte 2,67, der mittleren Erddichte 5,52 und dem mittleren Erdradius  $6371,10^6$  m. Diese Korrekturen (22) können zumeist vernachlässigt werden. Die *Lambertschen* Formeln erfassen im Gegensatz zu (14b) natürlich nur die Lotstörungen und nicht gleichzeitig die normale Lotkrümmung. Besonders bemerkenswert ist aber die formale Übereinstimmung von (14b) und (20) im Hinblick darauf, daß die zu den Formeln (20) führende Argumentation mehr hypothetische Elemente enthält als die frühere Beweisführung, was die hohe Brauchbarkeit der *Helmertschen* Kondensationsmethode unterstreicht.

Die Lotlinien des irdischen Schwerfeldes sind streng genommen Raumkurven und die Lotrichtungen im Oberflächenpunkt  $P$  und im Geoidpunkt  $\bar{P}$  daher im allgemeinen zueinander windschief. Wenn also in (14a) der Richtungsunterschied des Lotes in  $P$  und  $\bar{P}$  in Funktion des horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes  $\bar{g}$  der Schwere in der Lotlinie dargestellt ist, so hat man sich natürlich die Lotlinie auf die Ebene des Vertikalschnittes vom Azimut  $\alpha$  projiziert zu denken und diese Projektion als Kurve konstanter Krümmung, d. h. als Kreisbogen aufzufassen. Unter der gleichen Vorstellung werde nunmehr auch die Lotkrümmungsreduktion des astronomischen Azimutes abgeleitet.

<sup>7</sup> *F. R. Helmert*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Band 2, Leipzig 1884, Seite 259–261.

Für die Reduktion des astronomisch gemessenen Azimutes  $\alpha'$  des Vertikalschnittes von  $P_i$  nach  $P_k$  auf das Geoid hat *Vening Meinesz*<sup>8</sup> im im Jahre 1953 eine Formel entwickelt, die neben der ellipsoidischen Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes auch den Einfluß der Lotabweichung berücksichtigt:

$$da' = \frac{H_k}{s} [(\xi_k - \xi_i) \sin \alpha_{ik} - (\eta_k - \eta_i) \cos \alpha_{ik}] + \frac{H_k e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_i \sin 2\alpha_{ik}. \quad (23)$$

Es ist a priori klar, daß die Reduktion des beobachteten Azimutes auf das Geoid von jeglicher Beziehung auf ein Referenzellipsoid unabhängig sein muß. Dies hat jüngst auch *F. Mühlig*<sup>9</sup> gezeigt. In obiger Formel kommt dieser Umstand darin zum Ausdruck, daß die Differenz der relativen Lotabweichungen benachbarter Punkte weitgehend unabhängig ist von der Wahl des Referenzellipsoides. Wenn wir trotzdem die Aufspaltung der Reduktion in einen ellipsoidischen und einen Lotabweichungsanteil aufrecht halten, so hat dies einen sehr einfachen Grund; denn die *Laplace*-sche Gleichung erfordert eine bequeme Gegenüberstellung des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes.

In (23) ist die Lotkrümmung vernachlässigt, d. h. die Projektion der Oberflächenpunkte  $P$  auf das Geoid erfolgt ganz im Sinne der ursprünglichen Konzeption *Pizzettis* mit den geradlinig verlängerten Lotrichtungen. Der zugehörige Projektionspunkt  $P'$  wird sehr nahe dem wirklichen Lotfußpunkt  $\bar{P}$  liegen (Fig. 6a). Um den Abstand  $P'\bar{P}$  abzuschätzen, denken wir uns die Lotlinie zwischen  $P$  und  $\bar{P}$  durch einen Kreisbogen ersetzt. Durchstößt dann eine Gerade, die wir durch  $P$  parallel zur Lotrichtung in  $\bar{P}$  legen, das Geoid im Punkte  $P''$ , so liegt  $\bar{P}$  fast genau in der Mitte zwischen  $P'$  und  $P''$  und wir finden erst einen Abstand  $P'\bar{P} = 5$  cm, wenn wir für den Unterschied der beiden Lotrichtungen den großen Betrag von  $10''$  annehmen und die Meereshöhe von  $P$  2000 m ist. In meridionaler Richtung würde dem ein Breitenunterschied von nur  $0'',0016$  entsprechen. Zu bemerken ist noch, daß die Ebene  $PP'P''$  in aller Strenge den Lotfußpunkt  $\bar{P}$  nicht enthalten muß, doch dürfen wir bei dem äußerst flachen Verlauf der Lotlinie die genannte Ebene mit der durch die Lotrichtung von  $P$  und den Punkt  $\bar{P}$  bestimmten Ebene identifizieren. In dieser Ebene ist gemäß (5) die gesamte Richtungsreduktion  $\varepsilon$  von  $P$  auf  $\bar{P}$  im Azimut  $\alpha$ , d. h. in der Figur rechts von der Linie  $PP'$ , negativ, wenn die Lotlinie in Richtung dieses Azimutes konkav ist.

<sup>8</sup> *F. A. Vening Meinesz*: Physical Geodesy, Koninkl. Nederl. Akad. v. Wet., Amsterdam, Proceedings, Series B, 56, Nr. 1, 1953. Siehe auch: *K. Ledersteger*: Die Reduktion des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt, Österr. ZfV. 1954.

<sup>9</sup> *F. Mühlig*: Die Reduktion geodätischer und astronomischer Beobachtungsdaten auf das Geoid. ZfV., Stuttgart 1954.



die die Lotlinie von  $P$  projiziert ist, so ist der Normalabstand des Lotfußpunktes  $\bar{P}$  von der Visierebene durch die Strecke  $P'\bar{P}'$  gegeben, also positiv, wenn  $\varepsilon_n$  negativ ist:

$$P'_i\bar{P}'_i = q_i = -\frac{\varepsilon_{ni}}{2} \cdot H_i; P'_k\bar{P}'_k = q_k = -\frac{\varepsilon_{nk}}{2} \cdot H_k. \quad (25)$$

Die Richtigkeit des Vorzeichens erkennt man sehr leicht, wenn man  $\alpha' = 270^\circ$ , also  $(\alpha' + 90^\circ) = 0$  wählt. Dann ist  $\varepsilon_n d\varphi'$  und  $q$  positiv, wenn  $d\varphi'$  negativ ist. Somit wird (Fig. 6b) die Lotkrümmungsreduktion des Azimutes schließlich:

$$\begin{aligned} d_L \alpha' &= \frac{q_k - q_i}{s} = -\frac{1}{2s} [(\varepsilon_n H)_k - (\varepsilon_n H)_i] = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha' [(H d\varphi')_k - (H d\varphi')_i] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \alpha' [(H \cos \varphi' d\lambda')_k - (H \cos \varphi' d\lambda')_i] \end{aligned} \quad (26)$$

Sie tritt zu der Gleichung (23) additiv hinzu.

Erwähnt sei noch, daß der Übergang von  $P'_i P'_k$  zu  $\bar{P}_i \bar{P}_k$  selbstverständlich auch mit einer leicht zu berechnenden differentiellen Änderung der Seitenlänge  $s$  verbunden ist. Für die Netzseiten ist dies praktisch bedeutungslos, solange die Ausgleichung des Dreiecksnetzes auf Grund der Richtungen und nicht der Seiten erfolgt. Hingegen erfordert die Reduktion der Grundlinien eine entsprechende Erweiterung. Zu der Reduktion wegen Neigung auf den Horizont und wegen der Höhe über dem Referenzellipsoid tritt jetzt als drittes Glied

$$q_B - q_A = -\frac{1}{2} (\varepsilon_B H_B - \varepsilon_A H_A), \quad (27)$$

worin die Korrekturen  $\varepsilon$  in den beiden Endpunkten  $A$  und  $B$  der Grundlinie nach (5) für das Azimut  $\overrightarrow{AB}$  zu berechnen sind.

Damit sind alle Voraussetzungen für die strenge Durchführung der projektiven Methode der astronomischen Geodäsie geschaffen. In Verfeinerung der ursprünglichen Konzeption *Pizzettis* wird eine Doppelprojektion ausgeführt, indem die Oberflächenpunkte zuerst mittels der gekrümmten Lotlinie auf das Geoid ( $\bar{P}$ ) und sodann mittels der Ellipsoidnormalen auf das Referenzellipsoid projiziert werden. Letztere Projektion ist natürlich nicht wörtlich zu nehmen; sie erfolgt durch die astronomisch-geodätische Netzausgleichung, wobei die gegenseitige Lage von Geoid und Referenzellipsoid durch die Wahl der relativen Lotabweichung im Fundamentalpunkt und durch die Übernahme der ersten Grundlinie vom Geoid auf das Ellipsoid mit unveränderter Länge bestimmt ist. Die Projektion erfordert dann nur noch zweierlei:



1. müssen die weiteren Grundlinien strenge vom Geoid auf das in seiner relativen Lage zum Geoid fixierte Ellipsoid reduziert werden, was die Kenntnis der entsprechenden Geoidhöhen – im Falle des naturtreuen Netzes und des mittleren Erdellipsoides die Kenntnis der Geoidundulationen – voraussetzt;

2. müssen in die Ausgleichung die *Laplaceschen* Gleichungen eingezogen werden, die im Falle der *Pizzetti*-Projektion völlig ausreichend als theoretisch streng gültig betrachtet werden dürfen. Nach der Ausgleichung erhält man mit den durch geodätische Übertragung gewonnenen geodätischen Koordinaten die Komponenten der relativen Lotabweichung:

$$\xi = \varphi' - \varphi; \quad \eta \sec \varphi = \lambda' - \lambda. \quad (28)$$

Nicht zuletzt wegen der Unkenntnis der relativen Geoidhöhen wird man sofort das naturtreue Netz anstreben, d. h. die Projektion auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid, dessen Figurenmittelpunkt im Erdschwerpunkt liegt und dessen Figurenachse mit der (mittleren) Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Hierzu ist die Kenntnis der Parameter des mittleren Erdellipsoides, der absoluten Lotabweichung im Fundamentalpunkt und der Geoidundulationen erforderlich. Die Geoidundulationen ergeben sich aus dem *Stokesschen* Integral. Sind die übrigen Elemente im Zeitpunkt der Netzausgleichung nicht genügend bekannt, so kann die Korrektur nachträglich ohne Neuausgleichung mittels der projektiven Lotabweichungsgleichungen von *Vening Meinesz*<sup>10</sup> durchgeführt werden.

Abschließend seien noch einige Bemerkungen über die Größe der Lotkrümmungreduktionen gemacht. Der in (19) zum Ausdruck kommende überaus flache Verlauf der theoretischen Lotlinien läßt natürlich keinen Analogieschluß auf den Einfluß der durch die Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste bedingten Lotstörungen zu. Hier können nur empirische Prüfungen auf Grund der Formeln (14) den nötigen Einblick verschaffen. In diesem Sinne sind bereits die von *Rice*<sup>5</sup> in Tabelle 4 ausgewiesenen Reduktionen sehr aufschlußreich; die maximale Korrektur in Breite ist 0",14 und in Länge 0",10. Doch darf nicht übersehen werden, daß von seinen 16 Stationen 10 unter 500 m liegen und die größte Meereshöhe nur 0,94 km beträgt. Im Hochgebirge müssen wir aber beträchtlich größere Lotstörungseinflüsse erwarten; ein sehr instruktives Beispiel bringt *Baeschlin* in seinem eingangs erwähnten Bericht<sup>2</sup>, in dem die Lotstörungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  für je um 500 m abstehende Punkte der Lotlinie für die Forschungsstation Jungfrauoch ( $H = 3575$  m) berechnet sind, und zwar sowohl rein topographisch wie auch topographisch-isostatisch. Die Unterschiede in den Resultaten beider Berechnungsweisen sind verhältnismäßig gering, da ja die isostatischen Kompensations-

<sup>10</sup> *F. A. Vening Meinesz: New Formulas for Systems of Deflections of the Plumbline and Laplace's Theorem. Changes of Deflections of the Plumbline Brought About by a Change of the Reference – Ellipsoid, Bulletin géodésique, Nr. 15, Paris 1950.*

massen in erster Linie die Intensität der Schwerkraft, hingegen nur sehr geringfügig deren Richtung beeinflussen. Aus Tabelle 2 folgt

$$\begin{array}{rcc} & \text{top.} & \text{isost.} \\ d\varphi' & = + 2'',86 & + 3'',44 \\ d\lambda' \cos \varphi' & = - 4'',42 & - 4'',83. \end{array}$$

Zur Breitenreduktion ist natürlich noch der normale Anteil  $-0,61$  zu addieren. Es zeigt sich also, daß bei Hochgebirgspunkten die Lotkrümmungsreduktion keineswegs vernachlässigt werden darf.

## **Die Einführung der Photogrammetrie im türkischen Kataster**

*Von A. Brandenberger, z. Z. Ohio State University, Columbus, Ohio, USA*

Aus Gesprächen mit türkischen Katasterfunktionären geht hervor, daß schon im alten ottomanischen Reich gewisse Katasterarbeiten ausgeführt wurden. Aus der Zeit der letzten Sultane sind auch einige Erlasse bekannt, die sich mit der Katasteraufnahme befassen. Es wäre zweifellos interessant, diesen Spuren bis zurück zum byzantinischen Reich nachzugehen und festzustellen, ob bereits in jenen frühesten Zeiten Katastererhebungen bekannt waren. Hierzu ist ein eingehendes Quellenstudium erforderlich, wozu man der alten türkischen (arabischen) Schrift kundig sein sollte. – Die Wiedergabe einer derartigen geschichtlichen Entwicklung ist jedoch nicht der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, weshalb wir hier davon absehen.

Die Umwandlung des früheren Sultanreiches in eine Republik in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts brachte eine Reihe von Neuerungen im türkischen Staatswesen, wobei auch der Katasteraufnahme mehr Bedeutung eingeräumt wurde. Unter dem ersten Staatspräsidenten der neuen Republik – Kemal Atatürk – wurden im Jahre 1934 durch Parlamentsbeschluß neue Richtlinien für das Kataster festgelegt. Nach diesen Richtlinien hatte in Zukunft die Katasteraufnahme nach einem genauen meßtechnischen Verfahren zu erfolgen, d. h. die einzelnen Parzellen sollten geometrisch richtig nach dem damaligen Stand der Vermessungstechnik vermessen und flächenmäßig bestimmt werden. Diese Bedingungen stellten neue Anforderungen an die damalige türkische Katasterverwaltung, was zur Folge hatte, daß diese im Laufe der letzten Jahre immer weiter ausgebaut wurde und heute einen Personalbestand von rund 5000 Mann aufweist, dem bis zur Zeit die alleinige Weiterführung der Katasteraufnahme obliegt. Eine teilweise oder vollständige Ausführung der Katasterarbeiten durch private Vermessungsbüros war demzufolge vorerst nicht in Betracht gezogen worden. Diese Entwicklung hatte ihre historischen Gründe, indem im frühen ottomanischen Reich die Türken als herrschende Schicht sich vor allem als Würdenträger, Beamte, Offiziere und selbstän-