

Le calcul semi-graphique de la déformation de réseaux projetés dans un système conforme

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **54 (1956)**

Heft 8

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-212709>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le calcul semi-graphique de la déformation de réseaux projetés dans un système conforme¹

Par A. Ansermet

Le problème traité ici a pour but de faciliter, dans la mesure du possible, le calcul des réseaux géodésiques dans le plan. Il convient au préalable de procéder à un

Rappel de notions fondamentales

A cet effet suivons partiellement la voie tracée par G. Darboux qui traita ce problème de façon magistrale. Notons en passant que ce mathématicien rend dans son mémoire un hommage vibrant à l'œuvre de C. F. Gauß ([3] p. 64).

Rapportée à son plan tangent et à des tangentes principales l'équation d'une surface est

$$Z = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \dots\dots$$

où R, R' désignent les rayons principaux de courbure ([3] p. 56)

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{xdx}{R} + \frac{ydy}{R'} \right)^2 + \dots\dots$$

A l'élément ds correspond dans le plan l'élément $ds' = m \cdot ds$

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 \quad (X, Y \text{ coordonnées conformes})$$

$$\text{où} \quad X = x + u_3 + \dots\dots \quad Y = y + v_3 + \dots\dots$$

u_3 et v_3 étant du 3^e ordre en x, y .

$$\begin{aligned} ds'^2 &= dx^2 + dy^2 + 2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} dx dy + \frac{\partial v_3}{\partial x} dx dy + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy^2 \right) + \dots\dots = \\ &= m^2 ds^2 \cong (1 + 2m_0) \left(dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2} (xdx + ydy)^2 \right) + \dots\dots \end{aligned}$$

où m_0 désigne le groupe homogène de 2^e ordre dans m et en admettant $R = R'$. En identifiant les coefficients respectifs de $dx^2, dx dy, dy^2$ on a :

$$2 \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{x^2}{R^2} + 2m_0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{xy}{R^2}; \quad 2 \frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{y^2}{R^2} + 2m_0$$

d'où :

$$(2) \quad m_0 = \frac{x^2 + y^2}{4R^2} + A(x^2 - y^2) + 2Bxy$$

¹ Rédigé en hommage à M. le professeur Dr Baeschlin, Rédacteur en chef du S.Z.f.V. à l'occasion de son 75^e anniversaire.

On pourrait substituer X, Y à x, y dans ce groupe de 2^e ordre

$$(3) \quad \begin{cases} u_3 = \frac{x^3 + xy^2}{4R^2} + \frac{A}{3} (x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3} (3x^2y - y^3) \\ v_3 = \frac{y^3 + x^2y}{4R^2} - \frac{A}{3} (y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3} (3y^2x - x^3) \end{cases}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} = \frac{1}{R^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} = \frac{1}{RR'} \quad (R \neq R')$$

Résultats faciles à interpréter. Le système est à *axe neutre* si

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4R^2} + A & B \\ B & \frac{1}{4R^2} - A \end{vmatrix} = 0$$

C'est le cas le plus fréquent en pratique.

L'équation (2) définit un faisceau linéaire circonscrit à un carré si m_0 est donné ainsi que le quotient $A : B$. Dans cette équation (2) les paramètres de forme et d'orientation ne sont pas dissociés. Pour le calcul des courbures admettons *a priori* $B = 0$; seul subsiste le paramètre A (variables séparées).

Courbures. Considérons un côté P_1P_2 et sa transformée plane en faisant abstraction du cas où il y a un point d'inflexion sur cette transformée. Celle-ci a donc une courbure $1 : \rho$ qui ne change pas de signe entre P_1 et P_2 . Le calcul de $1 : \rho$ dépend de la formule de C. M. Schols (voir [1] p. 243–260).

$$(5) \quad 1 : \rho \cong F_0 + F_A$$

où F_0 est un binôme indépendant de A tandis que F_A est un binôme contenant A linéairement ([4] p. 79).

Cette courbure donne lieu pour chaque transformée P_1P_2 à deux *corrections angulaires* δ_1 et δ_2 et on peut calculer rapidement ou contrôler par voie graphique les valeurs $S = |\delta_1| + |\delta_2|$, la *différence* $D = |\delta_1| - |\delta_2|$ et même le quotient $q = \delta_1 : \delta_2$. Le calcul de D est particulièrement rapide.

$$(6) \quad S = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\rho} ds \quad (ds = \text{élément de transformée})$$

Considérons l'origine O des coordonnées et le contour fermé OP_1P_2O .

On sait que le paramètre A , qui définit la projection, est éliminé dans l'expression:

$$\oint_c \frac{1}{\rho} ds \quad (\text{contour } OP_1P_2O)$$

A cet effet on applique la formule de Green-Riemann qui permet de convertir une intégrale double en une intégrale curviligne et réciproquement; cette formule sera rappelée ci-dessous. Les termes en A s'éliminent aussi dans l'équation (6) si le côté P_1P_2 est une corde de l'hyperbole équilatère: $XY = \text{constante}$ ce qui résulte de l'équation:

$$(7) \quad 1 : \rho \cong \frac{1}{2R^2} \left\{ (1 - n) X \sin V - (1 + n) Y \cos V \right\}$$

([4] p. 79, [5] p. 105)

— $n = 4R^2 \cdot A$, V étant l'azimut de P_1P_2 . Pour ce calcul on ne fait pas la discrimination entre la corde et la transformée.

Désignons par $1 : \rho_0$ et $1 : \rho_{90^\circ}$ les courbures pour $V = 0$ et $V = 90^\circ$

$$(8) \quad \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_{90^\circ}}\right)^2} = \frac{1}{2R^2} \sqrt{(1 - n)^2 X^2 + (1 + n)^2 Y^2} = 1 : \rho_{\text{max.}} \quad (\text{maximum})$$

car ce résultat subsiste pour deux azimuts quelconques V et $(V + 90^\circ)$ au lieu de 0° et 90° . Si P_1P_2 est une corde commune à l'ellipse $m_0 = \text{const.}$ et à l'hyperbole $XY = \text{const.}$ on réalise à la fois une valeur maximum pour la somme S (équation [6]) et l'élimination du paramètre n (ou A).

Choix du paramètre. Ce problème est assez complexe car on peut formuler diverses hypothèses ([3] p. 25, 60), par ex.:

- 1° rendre aussi petite que possible la valeur moyenne de $(m - 1)^2$ pour tout le territoire considéré.
- 2° rendre aussi petite que possible la valeur moyenne du carré du gradient de $\log. m$.

Cette seconde solution fut déjà traitée partiellement dans notre Revue; un bref rappel des résultats acquis suffit.

La valeur moyenne à rendre minimum s'obtient en divisant l'intégrale double

$$(9) \quad I = \iint \Delta \log. m \cdot d\sigma \quad (d\sigma = \text{élément de surface})$$

par la surface du territoire. G. Darboux a recours à la formule de Green-Riemann ([2] p. 284, [3] p. 25) pour trouver une solution générale.

En représentation plane, qui nous intéresse ici, on a:

$$(10) \quad \begin{aligned} I &= \iint \left[\left(\frac{\partial \log. m}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log. m}{\partial Y} \right)^2 \right] dX \cdot dY = \\ &= \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right) dX \cdot dY = \oint_c (PdX + QdY) \end{aligned}$$

D'une façon ou d'une autre ce calcul ne présente aucune difficulté; le résultat est connu. Les variables sont donc ici dissociées.

Ces notions fondamentales étant rappelées on peut passer au

Calcul des corrections au moyen d'abaques.

Il suffit d'appliquer les formules relatives à la courbure des transformées en tenant compte du paramètre choisi. Les éléments de l'abaque dépendent de ce paramètre.

Désignons par $1 : \rho_1$, $1 : \rho_m$ et $1 : \rho_2$ les courbures respectives de la transformée au premier tiers, au milieu et au second tiers de celle-ci.

$$\Delta X = P_1 P_2 \cos V; \quad \Delta Y = P_1 P_2 \sin V$$

$$\text{Quotient } q: \quad |q| \cong \frac{1}{\rho_1} : \frac{1}{\rho_2} \quad 2 \geq |q| \geq 0.5 \quad (11)$$

Ce quotient est indépendant du paramètre n (ou A) si on a:

$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$, c.-à-d. si la corde $P_1 P_2$ prolongée passe par l'origine 0.

$$\text{Différence } D. \quad D \cong \frac{n}{6R^2} \Delta X \cdot \Delta Y = \frac{P_1 P_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (12)$$

en valeur absolue et en radians. [5] p. 105)

Pour une longueur donnée $P_1 P_2$ et $\Delta X = \Delta Y$, cette différence D a une valeur extrême, le paramètre étant aussi donné.

L'abaque à alignement de la Fig. 1 est applicable au réseau Suisse (axe neutre). Considérons un cas concret:

Côté Feldberg-Lägern (corrections 6",76 et 5",65)

$$\begin{array}{ll} \Delta X = 43,35 \text{ km} & \Delta Y = 30,2 \text{ km} \\ D = 1",11 \text{ (sexag)} & \text{(chiffres non soulignés)} \end{array}$$

Ce moyen de contrôle est rapide et efficace

$$\begin{array}{ll} \text{quotient } |q| = 1.20 & \text{(chiffres soulignés)} \\ \text{pour } X_1 = + 102,75 \text{ km} & X_2 = + 59,4 \text{ km} \end{array}$$

Pratiquement ces abaques sont à dresser à une *échelle suffisante* et moyennant la précision voulue. Les résultats ci-dessus furent obtenus avec un tel abaque.

Somme S. Par ex. pour Feldberg-Lägern 12",41.

L'abaque de la Fig. 2 n'est pas conçu pour une projection à axe neutre mais pour un paramètre $n = - 0,5$. Une seule lecture ne suffit

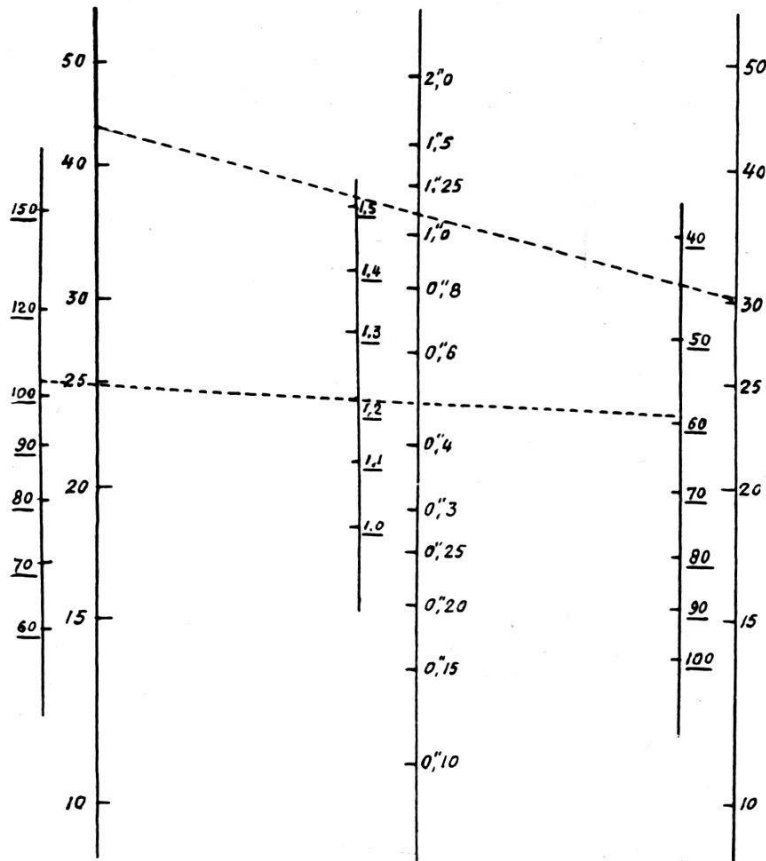


Fig. 1

alors plus car on a un binôme, mais le calcul graphique est cependant rapide. Ici surtout il faut un abaque assez grand en pratique

$$S \cong P_1 P_2 \cdot \frac{1}{\rho_m} = P_1 P_2 \cdot \frac{1}{2R^2} (1,5 X_m \sin V - 0,5 Y_m \cos V) =$$

(indice m pour le milieu de $P_1 P_2$)

$$= \frac{1}{2R^2} (1,5 X_m \Delta Y - 0,5 Y_m \cdot \Delta X) \quad (\text{radians})$$

Exemple

X_m	= + 80 km	Y_m	= + 100 km
ΔY	= + 25 km	ΔX	= - 35 km
S	= 7",61 + 4",43 = + 12",04		(sexag)

Les deux termes du binôme ne sont pas toujours à additionner. L'abaque convient surtout pour les réseaux de 2^e et 3^e ordre. Une sur-correction peut être nécessaire dans certains cas ([4] p. 279). On peut concevoir d'autres abaques que ceux des Fig. 1 et 2.

Effectivement la transformée fut assimilée à une courbe de 3^e ordre:

$$\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3$$

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = P_1 P_2, \quad a = \delta_1$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 2b + 6c\xi \cong 1 : \rho$$

Si on forme la différence D on constate que le terme $2b$ est éliminé ce qui explique aussi pourquoi ce calcul de D est simple.

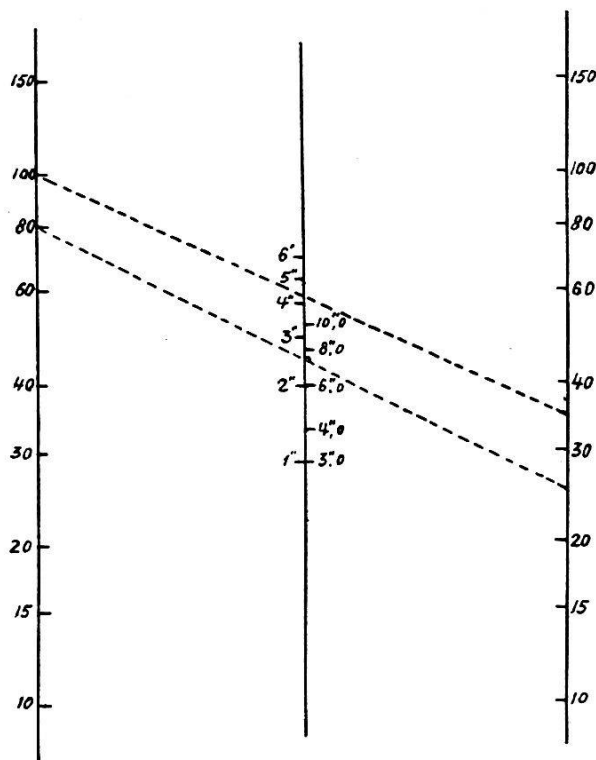


Fig. 2

On vérifie en outre que:

$$S \cong P_1 P_2 \cdot \frac{1}{\rho_m} = P_1 P_2 \left(2b + 6c \cdot \frac{P_1 P_2}{2} \right) = \int_{P_1}^{P_2} (2b + 6c\xi) d\xi$$

En résumé on voit qu'on peut rapidement calculer ou, tout au moins, contrôler les corrections angulaires. Pratiquement la *différence D* surtout constitue un contrôle rapide et bienvenu. La solution préconisée ci-dessus n'est du reste pas la seule.

Littérature

- [1] Baeschlin C. F., Lehrbuch der Geodäsie (Orell Füssli, Zürich)
- [2] Blanc C., Calcul différentiel et intégral, Lausanne
- [3] Darboux G., Construction des cartes (Bulletin sciences mathématiques, 1911, p. 23, 55)
- [4] Laborde J., Traité des projections, fasc. IV
- [5] Ansermet A., Calcul des déformations dans les réseaux (Schweiz. Zeitschr. f. Verm. 1949, n° 4)