L'extension au cas de mesures linéaires d'un théorème de Schreiber

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **55 (1957)**

Heft 2

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-213557

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 2 • LV. Jahrgang **Erscheint monatlich** **12. Februar 1957**

L'extension au cas de mesures linéaires d'un théorème de Schreiber

Par A. Ansermet

Dans les réseaux déterminés en fonction de mesures angulaires un problème fut posé, il y a longtemps déjà, tendant à répartir les poids de façon favorable lorsque la somme de ces poids est une constante. Un problème analogue peut se poser dans le cas de mesures linéaires. Le but de ces lignes est de formuler quelques considérations à ce sujet.

Généralités

Désignons par l_i les longueurs mesurées des côtés du réseau, p_i les poids y relatifs, v_i les corrections ou résidus ($i = 1, 2 \ldots n$).

De plus désignons par w_1, w_2, w_3 ... les discordances ou termes absolus des équations de condition qui ne jouent ici pas de rôle.

Quelle que soit la solution choisie pour la compensation, nous aurons recours à une solution provisoire, ce qui confère aux développements une forme plus explicite.

Il faut donc distinguer les valeurs mesurées l_i, provisoires l'_i et compensées $(l_i + v_i) = l'_i + dl'_i$:

$$(1) \qquad v_i = (l'_i - l_i) + dl'_i = f_i + dl'_i$$

En particulier pour un quadrilatère complet on a ([6] p. 7):

$$(2) \quad \begin{cases} -f_1 + v_1 = a'_1\,(dx_2 - dx_1) + b'_1\,(dy_2 - dy_1) = dl'_1 \text{ (poids } p_1) \\ -f_2 + v_2 = a'_2\,(dx_3 - dx_1) + b'_2\,(dy_3 - dy_1) = dl'_2 \text{ (poids } p_2) \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots \quad \ldots\ldots \\ -f_6 + v_6 = a'_6\,(dx_4 - dx_3) + b'_6\,(dy_4 - dy_3) = dl'_6 \text{ (poids } p_6) \end{cases}$$

où les dx, dy sont les corrections à faire subir aux coordonnées provisoires des 4 sommets. Trois de ces 8 inconnues dx, dy sont arbitraires et l'élimination des cinq autres donne

$$[av] + w_1 = [adl'] = 0. \tag{3}$$

Les machines à calculer modernes facilitent beaucoup ces éliminations.

Une solution consisterait à éliminer dl'_6 par exemple. On obtiendrait un système de 6 équations à 5 inconnues dl'_1, $dl'_2 \dots dl'_5$. Pratiquement les coefficients a_i dans (3) sont souvent calculés par voie semi-graphique (voir [4]).

Solution directe. Toujours dans le quadrilatère à 6 côtés mesurés considérons deux angles α, β ayant le même sommet, dans le canevas provisoire.

En différenciant des formules trigonométriques on obtient:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \varphi_1 (dl'_1, dl'_2, dl'_5) \\ d\beta &= \varphi_2 (dl'_3, dl'_4, dl'_5) \\ d(\alpha + \beta) &= \varphi_3 (dl'_1, dl'_4, dl'_6) \end{aligned} \tag{4}$$

et en éliminant $d\alpha$ et $d\beta$:

$$[adl'] = 0$$

Le calcul est simple si la formule de Ptolémée est applicable aux valeurs *provisoires:*

$$l'_5 l'_6 = l'_1 l'_3 + l'_2 l'_4, \tag{4}$$

ce qui fournit immédiatement les coefficients a_i en différenciant cette relation. On voit le rôle que peuvent jouer les éléments provisoires quand, dans un problème, les discordances w ne sont pas nécessaires.

Système central. Considérons (Fig. 2) un système central de côtés 1, 2, 3, ... dont les angles au centre, opposés à ces côtés, sont respectivement α_1, α_2, α_3, ... Entre les valeurs provisoires on a:

$$l'^2_1 = l'^2_7 + l'^2_8 - 2 l'_7 l'_8 \cos \alpha_1$$

$$l'_1 dl'_1 = (l'_7 - l'_8 \cos \alpha_1)\, dl'_7 + (l'_8 - l'_7 \cos \alpha_1)\, dl'_8 + l'_7 l'_8 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \tag{5}$$

Si le système central constitué par les éléments provisoires est un hexagone régulier on aura: $\cos 60° = 0{,}5$,

par suite: $$dl'_1 = 0{,}5\, dl'_7 + 0{,}5\, dl'_8 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, d\alpha_1$$

si $l'_1 = l'_2 = \dots = l'_{12} = 1$; $[dl'_i]_{i=1}^{i=6} = [dl'_i]_{i=7}^{i=12}$ car $[d\alpha]_1^6 = 0$

$$[dl']_1^6 - [dl']_7^{12} = [v]_1^6 - [v]_7^{12} + w_1 = 0 \tag{6}$$ ([1] p. 209)

Ce résultat trouvera son application ci-après.

Théorème de Schreiber

La somme $[p]_1^n$ étant constante le problème à résoudre consiste à répartir ces poids de la façon la plus favorable pour conférer à la fonction $\varphi\ (l_1 + v_1,\ l_2 + v_2,\ l_3 + v_3 \ldots)$ le poids P le plus grand possible. En général les n binômes $(l + v)$ ne figurent pas tous dans la fonction. On sait ([5] II p. 186) que:

$$1 : P = [FF : p] \qquad \text{où}$$

$$F_i = f'_i + a_i r_1 + b_i r_2 + c_i r_3 + \ldots \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{7}$$

certains f'_i étant nuls car ce sont les coefficients des v_i dans:

$$\varphi\ (l_1 + v_1,\ l_2 + v_2,\ l_3 + v_3 + \ldots) = \varphi\ (l_1,\ l_2,\ l_3 \ldots) + [f'_i v_i]$$

Les $r_1, r_2, r_3 \ldots$ se déduisent du système d'équations dit parfois transitoire ou équations en r:

$$[aF : p] = o,\ [bF : p] = o,\ [cF : p] = o \ \ldots \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} [av] + w_1 = o \\ [bv] + w_2 = o \\ [cv] + w_3 = o \\ \ldots \end{array} \right. \tag{8}$$

contrôle: $[f'F : p] = [FF : p]$

Critère: La somme $[|F|]$ doit tendre vers un minimum et de plus:

$$p_1 : p_2 : p_3 \ldots : p_n = |F_1| : |F_2| : |F_3| \ldots : |F_n| \tag{9}$$

([5] p. 189 II)

Essayons d'appliquer ces résultats dans le cas d'un réseau à mesures linéaires.

Applications:

1er cas (Fig. 1). Graphiquement on trouve 1.00 pour la longueur de chaque côté du pentagone et 1.62 pour chaque diagonale. La formule de Ptolémée est applicable. La longueur du côté 9 est considérée comme exempte d'erreur. C'est le poids P de la diagonale non mesurée 10 qui nous intéresse et la fonction φ est la longueur obtenue pour cette diagonale. On a le 1er calcul suivant:

côtés	p	a	b	f'	F	côtés	p	F
1	1	+ 1.62		— 1.00	+ 0.04	1	0.1	0.00
2	1	+ 1.00			+ 0.64	2	1.45	+ 0.62
3	1		+ 1.00		+ 0.64	3	1.45	+ 0.62
4	1		+ 1.62	— 1.00	+ 0.04	4	0.1	0.00
5	1	— 1.62		+ 1.62	+ 0.58	5	1.45	+ 0.62
6	1	— 1.62	+ 1.00		— 0.40	6	1.00	— 0.38
7	1	+ 1.00	— 1.62		— 0.40	7	1.00	— 0.38
8	1		— 1.62	+ 1.62	+ 0.58	8	1.45	+ 0.62
$[p]=8$					$[\|F\|] = 3.32$		$[p]=8.00$	$[\|F\|]=3.24$

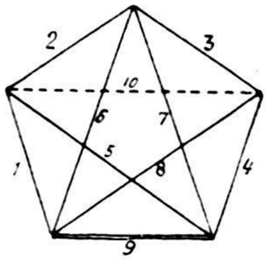

Fig. 1

$$[aa] = [bb] = 9.86; [ab] = -3.24$$
$$[af'] = [bf'] = -4.24$$
$$r_1 = r_2 = +0.64;$$
$$[f'F] = [FF] = 1.81$$

La somme $[f'f']$ est relativement forte car la détermination de la longueur 10 par les seuls côtés 1, 4, 5, 8 est précaire.

Pour le 2e calcul ci-dessus on a appliqué la relation (9) en arrondissant les poids

$$[aa:p] = [bb:p] = 32.3; [ab:p] = -3.24$$
$$[af':p] = [bf':p] = -18.00$$
$$r_1 = r_2 = +0.62; [aF:p] = [bF:p] = 0$$
$$[f'F:p] = [FF:p] = 1.36 = 1:P$$

Ces résultats sont de nature à fournir au calculateur d'utiles indications.

A priori il était manifeste que les côtés 1 et 4 exerçaient peu d'influence sur la longueur de la diagonale 10.

2e cas. Chaîne double (Fig. 2)

Graphiquement on obtient la longueur 1.00 pour chacun des 26 côtés; il y a donc 3 systèmes centraux, et considérons la fonction:

$$\varphi = (l_7 + v_7) + (l_{10} + v_{10}) + (l_{21} + v_{21}) + (l_{24} + v_{24})$$
$$p_1 = p_2 = p_3 \ldots = p_{26} = 1 \qquad n = 26$$

côtés	a	b	c	f'	F	côtés	a	b	c	f'	F
								Report $[\|F\|] =$			3.16
1	+1				+0.24	14		+1			+0.29
2	+1				+0.24	15		—1	+1		—0.05
3	+1	—1			—0.05	16			+1		+0.24
4	+1	—1			—0.05	17			+1		+0.24
5	+1				+0.24	18			+1		+0.24
6	+1				+0.24	19			+1		+0.24
7	—1			+1	+0.76	20		—1	+1		—0.05
8	—1				—0.24	21		—1	—1	+1	+0.47
9	—1	+1			+0.05	22		+1	—1		+0.05
10	—1	—1		+1	+0.47	23			—1		—0.24
11	—1	+1			+0.05	24			—1	+1	+0.76
12	—1				—0.24	25			—1		—0.24
13		+1			+0.29	26		+1	—1		+0.05
		Report $[\|F\|] =$			3.16				$[\|F\|] =$		6.32

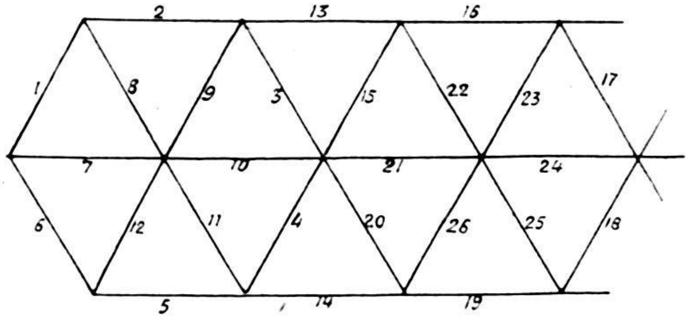

Fig. 2

$[aa] = [bb] = [cc] = 12$

$[ab] = [bc] = -3 \qquad [ac] = 0$

$[af'] = [bf'] = [cf'] = -2$

$r_1 = r_3 = +0.24; \; r_2 = +0.29$

$[f'F] = [FF] = 2.47$

En appliquant encore la loi de proportionnalité (9) on trouverait approximativement

$$p_7 = p_{24} \cong 3$$

et $p \cong {}^1/_5$ pour les côtés 3, 4, 9, 11, 15, 20, 22, 26 et des valeurs intermédiaires pour les autres côtés.

Le nombre des conditions étant impair il en résulte une certaine ambiguité à cause de la symétrie du réseau. Mais la convergence vers un résultat est mise en évidence.

3e cas. Chaîne simple (Fig. 3)

$n = 22$. Le côté 23 a une longueur considérée comme exempte d'erreur.

Graphiquement on trouve 1.00 pour la longueur des côtés 1, 2, 3, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19 et 1.62 pour les autres côtés. La formule de Ptolémée est encore applicable. La fonction φ est la longueur obtenue pour la diagonale 24. Son poids est P.

1er calcul: $\quad p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_{22} = 1 \qquad [p] = 22$

$\qquad [|F|] = 4.92 \qquad [f'F] = [FF] = 1.34$

1re répartition: les poids obtenus par la règle de proportionnalité varient entre $p_1 = p_{19} = 0.15$ et $p_7 = p_{13} = 1.8$ (valeurs arrondies)

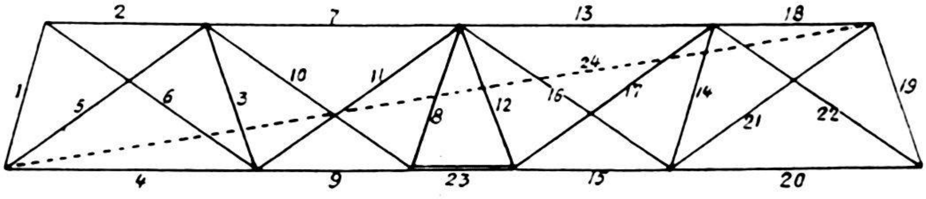

Fig. 3

2e calcul: $[|F|] = 4.42 \quad [FF:p] = 0.95 = 1:P = [f'F:p]$

2e répartition: $p_1 = p_{19} = 0.00;\; p_8 = p_{12} = 0.2$

$p_{10} = p_{11} = p_{16} = p_{17} = 0.3;\; p_3 = p_{14} = 0.65;\; p_5 = p_6 = p_{21} = p_{22} = 0.75$

$p_2 = p_4 = p_{18} = p_{20} = 1.85;\; p_9 = p_{15} = 2.0;\; p_7 = p_{13} = 2.4$

(valeurs arrondies)

En poussant le calcul jusqu'au bout on rend nuls 4 poids sur 22 ([5] II p. 189). Théoriquement il y a $\binom{22}{4} = 7315$ manières de dissocier 4 poids sur les 22. Si certains poids sont égaux deux à deux il peut y avoir de l'ambiguité quand le nombre de conditions est impair. En pratique c'est rarement le cas. L'emploi d'éléments provisoires présente parfois de l'intérêt quel que soit le mode de compensation adopté. Au point de vue didactique ces éléments facilitent le raisonnement et le rendent plus explicite.

Dans les exemples traités ci-dessus la convergence vers un résultat est assez rapide. Les réseaux choisis ont une structure schématique mais ils suffisent pour donner un aperçu de l'application du théorème de Schreiber. Ce dernier présente de l'intérêt surtout dans le cas de mesures angulaires. Un problème analogue se posera cependant à l'occasion au calculateur lors de la détermination de réseaux au moyen de mesures linéaires. C'est pourquoi il a paru opportun de lui consacrer quelques lignes.

Certains praticiens mesurent aussi des azimuts et combinent ces éléments avec les mesures linéaires. Dans cette première étude il n'a pas été jugé opportun de tenir compte de ces azimuts, qui rendent le problème plus complexe.

Bibliographie:

[1] *K. Arnold:* Zur Fehlertheorie der Streckenmessenden Triangulation (Technik, Berlin).

[2] *C. F. Baeschlin:* Die sphärische Berechnung von Streckennetzen (Publication Comm. géodésique suisse).

[3] *W. Grossmann:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung (Springer, Berlin)

[4] *K. Rinner:* Geometrie mit Strecken (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1950, Nrn. 7, 8).

[5] *S. Wellisch:* Ausgleichungsrechnung (Fromme, Wien).

[6] *A. Ansermet:* Compensation de mesures linéaires (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1955, Nr. 1).