Les projections géodésiques conformes à variables non dissociées

Der Vergleich der Δ mit den v zeigt, daß beide von der gleichen Größenordnung sind. Naturgemäß sind die Δ für $L = 20$ Partes am kleinsten, da diese Werte zur Iteration verwendet wurden. Die interpolierten Werte für $L = 22$ Partes zeigen etwas größere Abweichungen, die aber im Vergleich mit den v nicht unwahrscheinlich sind. Auffallend ist die gleich gute Übereinstimmung der extrapolierten Werte für $L = 26$ Partes. Alle weiteren Kontrollen ergaben ähnliche Resultate.

Diese Ergebnisse zeigen, daß trotz der nicht einwandfreien Libelle, deren Blase bei kleinen Längen hängenbleibt, der Ansatz (8) zu einer natürlichen Summenlinie führt, mit der unter Umgehung jeder Interpolation Neigungen genügend genau bestimmt werden können.

Les projections géodésiques conformes à variables non dissociées

Par A. Ansermet

En géodésie les systèmes conformes sont en général du type à variables dissociées en ce sens que, dans les séries exprimant les déformations linéaires, les variables sont séparées, d'où plus de simplicité dans les calcûls. Il n'est cependant pas toujours possible, suivant l'orientation et la configuration du territoire considéré, d'avoir recours à ce genre de projection. Il a paru opportun de consacrer quelques lignes à ce problème en faisant abstraction tout d'abord des cas où l'étendue du territoire nécessite le fractionnement de celui-ci en zones juxtaposées. La présente note constitue, à certains égards, un complément à la note publiée en août dernier.

Equations initiales

Considérons encore celles développées par G. Darboux ([4] p. 228); elles ont ceci de particulier que les termes indépendants des paramètres A et B ne sont pas incorporés dans les autres termes mais mis en évidence:

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} X &= x + \frac{x^3 + 3xy^2}{4R^2} + \frac{A}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3}(3x^2y - y^3) + \ldots \\ Y &= y + \frac{y^3 + 3x^2y}{4R^2} - \frac{A}{3}(y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3}(3y^2x - x^3) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où X, Y sont les coordonnées planes conformes, et x, y des coordonnées orthogonales sur la sphère de référence de rayon R. De plus:

$$(2)\qquad m - 1 \cong \frac{X^2 + Y^2}{4R^2} + A(X^2 - Y^2) + 2BXY$$

(m = coefficient de déformation linéaire)

Le paramètre d'orientation dépend du quotient $A:B$ et celui de forme du binôme $(A^2 + B^2)$. Pour des valeurs données de m et de $A:B$ on sait que l'équation (2) est celle d'un faisceau circonscrit à un carré. La solution où, à priori, $B = 0$, est la plus fréquente ([4] p. 229). Mais on peut aussi envisager, comme hypothèse initiale, celle où $A = 0$; seul subsiste le paramètre B. Les variables ne sont plus dissociées, et sur les axes de coordonnées ($X = 0$ ou $Y = 0$), le coefficient m est indépendant de tout paramètre, ce qui caractérise cette solution.

Avant de poursuivre transformons les équations (1) pour faciliter leur interprétation géométrique:

$$(3) \qquad X + iY = X_0 + iY_0 + \tfrac{1}{3}(A - iB)(X_0 + iY_0)^3 + \dots \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{ou } X + iY = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} + \dots\dots,$$

expressions qui montrent clairement comment les géodésiques issues de l'origine se déforment. Admettons, pour une position considérée comme initiale, que les directions des vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ coïncident; à des rotations de 45°, 90°, 135° ..... du premier vecteur, correspondent pour le second des rotations de 135°, 270°, 405° ..... La géodésique OP s'incurve et, de 45° en 45°, la courbure prend alternativement des valeurs nulles et extrêmes, ce qui se voit aussi autrement. Ces propriétés subsistent, à plus forte raison, si $A = 0$ ou $B = 0$. Le cas où A et B sont nuls est bien connu. Etudions maintenant la

solution où $A = 0$ ($B \neq 0$).

Pratiquement elle peut intervenir quand on veut faire coïncider la projection du méridien central du territoire considéré avec un axe de coordonnées quelle que soit l'orientation générale de ce territoire et sa configuration. Dans l'équation (2) les coefficients de X^2 et Y^2 sont toujours égaux, d'où une simplification, et sur les axes de coordonnées, on l'a déjà signalé, une variation du paramètre B est sans influence sur la valeur de m. Il en résulte, pour le calcul des déformations, certaines simplifications; d'autre part il ne sera question dans ces lignes que de la courbure des transformées planes des côtés du réseau et des réductions à la corde dites aussi réductions d'azimut.

Formules pour les réductions à la corde

Dans les cas les plus fréquents où $B = 0$ on peut calculer ces réductions par voie semi-graphique. Dans la présente hypothèse ($A = 0$) le calcul est aussi assez simple, et des formules seront établies pour la somme S et la différence D de ces corrections r_1 et r_2 prises en valeur absolue. Il est fait abstraction des cas où la courbure change de signe, c'est-à-dire si la transformée plane du côté considéré du réseau présente un point d'inflexion.

Courbure des transformées. La formule de Schols ([1] p. 260) donne immédiatement, en désignant par V l'azimut de l'arc élémentaire de la courbe et toujours pour $A = 0$, la valeur C de cette courbure en un point XY:

$$(4) \quad C = \left(\frac{X}{2R^2} + 2BY\right) \sin V - \left(\frac{Y}{2R^2} + 2BX\right) \cos V + \ldots\ldots,$$

où $\operatorname{tg} V = dY : dX$

$$C = C_{90} \sin V + C_0 \cos V \qquad (C_0 \text{ et } C_{90} \text{ pour } V = 0,\ V = 90^\circ)$$

$$(5) \quad C^2{}_m = C^2{}_{90} + C_0{}^2 \qquad (C_m \text{ valeur maximum})$$

Calcul de la somme S. Pour abréger les écritures, les éléments angulaires seront exprimés non en secondes mais en radians. En outre ([3] p. 282), il est fait abstraction de la surcorrection ou terme secondaire, élément qui n'intervient que pour certains longs côtés et s'obtient par voie graphique.

Fractionnons la somme: $S = T_0 + T_B$,

où T_0 est un binôme indépendant du paramètre B; en d'autres termes: $T_0 = S$ pour $B = 0$. La courbure est alors constante ($|r_1| = |r_2|$).

Si $B \neq 0$ on a: (6) $T_B \cong 2B \left(\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial(XY)}{\partial X} dY - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial(XY)}{\partial Y} dX \right)$,

([3] p. 63)

tandis que T_0 est l'excès sphérique du triangle OP_1P_2.

$$(7) \quad T_B \cong B\left\{(Y^2{}_2 - Y^2{}_1) - (X^2{}_2 - X^2{}_1)\right\} \cong B\left\{(Y^2{}_2 - X_2) - (Y^2{}_1 - X^2{}_1)\right\}$$

Résultat interprétable géométriquement de façon simple; il suffit de considérer un réseau d'hyperboles équilatères (plaque hyperbolique):

$$B(Y^2 - X^2) = H \qquad 0 < |B| \leq 1 : 4R^2,$$

en attribuant à la constante H des valeurs appropriées $H_1, H_2, H_3 \ldots\ldots$ correspondant respectivement aux sommets $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ du canevas; éventuellement on procède par interpolation. Une fois de plus on vérifie que, pour un contour fermé tel que $P_1P_2P_3P_1$, la somme

$$(H_2 - H_1) + (H_3 - H_2) + (H_1 - H_3) = 0$$

exprime que le paramètre B est sans influence sur la variation totale de courbure du contour fermé. Il en est de même si la projection est définie par deux paramètres au lieu d'un (changement d'orientation).

Si P_1P_2 est une corde de la courbe $m = $ const., la corde d'un cercle de centre 0 ou encore est normal aux courbes H, on obtient des valeurs extrêmes respectivement pour S, T_0 ou T_B (longueur P_1P_2 donnée).

De plus on peut avoir $T_0 = 0$ ou $T_B = 0$ et $S \gtrless T_0$.

Calcul de la différence D. Ce calcul est particulièrement simple, car les termes indépendants de B s'éliminent:

$$D \cong \tfrac{1}{2}\, P_1 P_2 \,(C' - C''),$$

où C' et C'' sont les courbures respectivement aux premier et second tiers du côté P_1P_2. On trouve sans peine, toujours en radians et valeur absolue,

$$D \cong \tfrac{1}{3}\, B\,(\Delta X^2 - \Delta Y^2) \tag{7'}$$

$$\Delta X = X_2 - X_1, \qquad \Delta Y = Y_2 - Y_1.$$

Pour une longueur donnée $P_1 P_2$, l'extrêmum de D correspond à $\Delta X = 0$ ou $\Delta Y = 0$. Quant aux valeurs algébriques des réductions, elles ne sont pas difficiles à discerner; en particulier on voit sans peine dans quel sens la courbure est croissante.

Dans les applications, les solutions pour lesquelles $A = 0$ ou $B = 0$ présentent le plus d'intérêt quant à l'ampleur des calculs. La solution intermédiaire $A^2 = B^2$ pourrait aussi être envisagée mais donne lieu à des développements moins simples. Dans le système conforme, à axe neutre, adopté pour l'île de Madagascar, la valeur du quotient $A : B = 1{,}29$

Une fois de plus on voit que le calcul des réductions r_1, r_2 par la somme et la différence des valeurs absolues (algébriquement c'est l'inverse) présente des avantages. En particulier le calcul de D est simple.

Adaptation mutuelle de deux systèmes conformes

Un peu en marge du problème traité ci-dessus, mais en corrélation tout de même avec ce dernier, il faut envisager le cas où certains sommets sont communs à deux réseaux. D'autres circonstances encore peuvent donner lieu à deux paires de coordonnées (x, y) et (x', y') pour ces sommets. Ce problème n'est pas nouveau mais il s'est révélé assez complexe.

Une solution ([3] p. 374) consiste à développer les valeurs (x', y') en fonction des coordonnées (x, y) sous forme de polynômes:

$$x' + iy' = A_0 + iB_0 + (A_1 + iB_1)(x + iy) + (A_2 + iB_2)(x + iy)^2 + \ldots\ldots, \tag{8}$$

les inconnues étant les paramètres $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots\ldots A_n, B_n$. Pour chaque paire d'inconnues il faut connaître au moins deux paires de valeurs (x, y) et (x', y') d'un même sommet dans les deux systèmes. Si les éléments connus sont en nombre surabondant, il y a surdétermination; des valeurs provisoires des paramètres sont alors calculées. En se basant sur l'équation (8), et en dissociant les termes en i des autres termes, on obtient les équations résiduelles, sous forme générale également:

$$-f + v_x = a_0 + x a_1 - y b_1 + (x^2 - y^2)\, a_2 - 2xy b_2 + \ldots\ldots \tag{9}$$

$$-f' + v_y = b_0 + y a_1 + x b_1 + 2\, xy\, a_2 + (x^2 - y^2)\, b_2 + \ldots\ldots, \tag{10}$$

où les $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots\ldots$ sont des accroissements à ajouter aux valeurs provisoires des inconnues, tandis que les f et f' sont les termes absolus. Le principe des moindres carrés est appliqué aux résidus v_x et v_y. Sous forme condensée les équations normales sont:

pour l'inconnue a_0: $[v_x] = 0$ (11)

pour l'inconnue b_0: $[v_y] = 0$ (12)

pour l'inconnue a_1: $[xv_x + yv_y] = 0$ (13)

pour l'inconnue b_1: $[xv_y - yv_x] = 0$ (14)

pour l'inconnue a_2: $[(x^2 - y^2)\, v_x] + [2xy\, v_y] = 0$ (15)

pour l'inconnue b_2: $[-2xy\, v_x] + [(x^2 - y^2)\, v_y] = 0$ (16)

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Comme on pouvait le présumer, les équations (11) à (14) caractérisent la transformation d'Helmert, soit: deux translations (équations 11–12), une variation d'échelle (équation 13) et une rotation (équation 14).

Le calcul devient laborieux quand les doubles paires de coordonnées des sommets sont en nombre élevé. Il faut en outre prendre garde aux dimensions, car chaque paire d'inconnues a sa propre dimension (longueur pour a_0, b_0, inverse d'une longueur pour a_2, b_2, etc.). Les discordances v_x, v_y ne peuvent pas être éliminées complètement. Dans l'équation générale (8), en poussant suffisamment loin le développement, on pourrait éventuellement éviter une surdétermination. Dans les applications on s'en tient généralement aux termes en (A_3, B_3), exceptionnellement en (A_4, B_4).

Littérature:

[1] *C. F. Baeschlin:* Lehrbuch der Geodäsie (Zürich, Orell Füssli).

[2] *G. Darboux:* Construction des cartes (Bull. Sci. mathémat. 1911, p. 23, 55).

[3] *J. Laborde:* Traité des projections, fasc. IV (Paris, Hermann).

[4] *A. Ansermet:* Le calcul semi-graphique de réseaux (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung 1956, N° 8).

Einführung des kulturtechnischen Redaktors

Einem ausführlichen Bericht des schweizerischen Konsulates in Marseille über großzügige Meliorationsvorhaben in dem westlich der Rhonemündung, zwischen Cevennen und Mittelmeer, gelegenen Teil Südfrankreichs entnehme ich die folgenden, auch für unsere Leser interessanten Einzelheiten. Die kulturtechnischen Projekte sind dabei nicht für sich allein betrachtet, sondern zum vorneherein in eine umfassende Planung im Zuge der unerläßlichen landwirtschaftlich-industriellen Neuorganisation der zwei hauptsächlich in Frage stehenden Departemente

Gard	5880 Quadratkilometer	mit rund 400 000 Einwohnern
und Hérault	6225 Quadratkilometer	mit rund 470 000 Einwohnern

einbezogen. *Lü.*