Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate [Schluss]

Autor(en): **apanov, Christo**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **55 (1957)**

Heft 10

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-213595

$$f(v) = F_n \cdot e^{-\frac{n-1}{2} v^2} \, v^{n-2}$$

wo für gerades n $\quad F_n = \dfrac{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot (n-3)(n-5) \ldots . 3 \cdot 1}$

und für ungerades n $\quad F_n = \dfrac{2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}$

Die Verteilungskurven sind nicht symmetrisch; tatsächlicher Wert v_μ, häufigster Wert v_W und Mittelwert v_M fallen nicht zusammen. Der tatsächliche Wert v ist konstant. Es ist

$$v_\mu = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right]_1^N}{N}} = 1.0$$

Daraus ergibt sich, daß der tatsächliche mittlere Fehler μ aus den Stichprobenwerten m nach

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]_1^N}{N}}$$

berechnet werden kann. **(Schluß folgt.)**

Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von Dipl.-Ing. Christo Čapanov, Haskovo, Bulgarien

(Schluß)

Zahlenbeispiel:

Es ist der wahrscheinlichste Kreis zwischen den Punkten (Tafel 1) unter folgenden Bedingungen zu finden: der ausgeglichene Kreis muß

1. durch den Punkt M führen ($Xm \neq o$ $Ym \neq o$),
2. die Ordinatenachse $Y = t$ berühren.

I. Methode: *Ausgleichung nach Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten.*

Es werden angenommen:

$p_x = p_y = 1;$

$\alpha_0 = 127{,}00$ m, $\beta_0 = -23{,}00$ m und $R_0 = 127{,}00$ m (40)

Nach (6) und (9) stellen wir Tafel 2 auf. Mit den Koeffizienten aus Tafel 2 berechnen wir die Koeffizienten der Normalgleichungen (19), die, in Zahlen ausgedrückt, folgendes ergeben:

$$
\begin{aligned}
&2{,}5784\, \Delta\alpha - 1{,}3318\, \Delta\beta - 3{,}5682\, \Delta R + 2{,}4980\, k' - \\
&\qquad - 1{,}0000\, k'' - 0{,}3630 = \Phi \\
&- 1{,}3318\, \Delta\alpha + 0{,}7921\, \Delta\beta + 1{,}5758\, \Delta R - 0{,}4600\, k' + \\
&\qquad + \Phi k'' + 0{,}1025 = \Phi \\
&- 3{,}5682\, \Delta\alpha + 1{,}5758\, \Delta\beta + 4{,}0056\, \Delta R - 2{,}5400\, k' + \\
&\qquad + 1{,}0000\, k'' + 0{,}3759 = \Phi \\
&2{,}4980\, \Delta\alpha - 0{,}4600\, \Delta\beta - 2{,}5400\, \Delta R + \Phi k' + \\
&\qquad + \Phi k'' + 0{,}0010 = \Phi \\
&- 1{,}0000\, \Delta\alpha + \Phi \Delta\beta + 1{,}0000\, \Delta R + \Phi k' + \\
&\qquad + \Phi k'' + \Phi = \Phi
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Aus der Auflösung von (41) nach dem Gaußschen Algorithmus finden wir

$$\Delta\beta = -0{,}0006 \quad \Delta R = -0{,}0059 \quad k' = +0{,}2248 \quad k'' = +0{,}1936 \tag{42}$$

und berechnen nach den Formeln (3):

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha = 127{,}0060 \\
&\beta = \beta_0 + \Delta\beta = -23{,}0006 \text{ und } R = R_0 + \Delta R = 127{,}0059
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Die Korrelaten k werden nach Formeln (17) und die Verbesserungen v_x und v_y nach Formeln (15) berechnet. Hieraus berechnen wir wiederum $[kW]$ und $[v_x^2] + [v_y^2]$ (Tafel 3). Es wird die zweite Kontrolle (21) durchgeführt; zu diesem Zweck berechnen wir nach Formeln (2):

$$X = x + v_y \text{ und } Y = y + v_y \text{ (Tafel 4).}$$

II. Nach dem Verfahren der *Vorelimination von Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten:*

Es werden angenommen: $\alpha_0 = R_0 = 127{,}00$ m. Aus (17) berechnen wir $\beta_0 = \sqrt{R^2 - (\alpha - Xm)^2} = -22{,}9998$ und nach (31) die Koeffizienten A, D, E, H und den Widerspruch W (Tafel 5).

Mit den Koeffizienten aus Tafel 5 berechnen wir die Koeffizienten der Normalgleichung (37), die, in Zahlen ausgedrückt, folgendes Bild zeigt:

$$2602{,}7753\, \Delta\alpha + 229{,}0359 = \Phi$$

Aus der Auflösung der letzteren finden wir $\Delta\alpha = -0{,}0880$ und berechnen nach Formel (3) $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha = 126{,}9039$ und nach Formel (7) $\beta = \sqrt{R^2 - (\alpha - Xm)^2} = -22{,}9910$. Die Korrelate k werden nach Formel (35) und die Verbesserungen v_x und v_y nach Formel (33) berechnet (Tafel 6). Es wird die zweite Kontrolle (39) durchgeführt und zu diesem Zweck berechnet: $X = x + v_x$ und $Y = y + v_y$ (Tafel 7).

Schlußfolgerung. Aus der Gegenüberstellung dieser beiden Verfahren lassen sich folgende Schlüsse über die Genauigkeit, Berechnungsdauer und den Umfang der Rechenarbeit ziehen:

1. Beide Verfahren sind gleich genau, denn beide ergeben:

$$[v_x^2] + [v_y^2] = 0{,}2274;$$

2. Bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten erhöht jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins;

3. Bei der Vorelimination der Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten vermindert jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins;

4. Bei beiden Methoden wird angenommen, daß alle beobachteten Größen (Abszissen und Ordinaten von Punkten) mit Fehlern belastet sind;

5. Angenommen, daß wir in (22) anstatt zwei beobachtete Größen (X und Y) nur eine beobachtete Größe haben, so führt diese Annahme schon zu einer mittelbaren Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten. Folglich kann die Methode der Vorelimination von Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten auch bei der mittelbaren Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten angewandt werden.

Literatur:

C. F. Baeschlin, Schweizerische Zeitschrift für Vermessungskunde und Kulturtechnik, 1929, Heft 2.

Tafel 1

i	x	y
1	0·82	—8·10
2	5·15	11·20
3	23·52	50·43
4	26·13	54·37
M	2·10	

Tafel 2

i	A	B	C	W	$Q = \Sigma$	H
1	252·36	— 29·80	—254·00	+ 14·402	— 17·038	64 574
2	243·70	— 68·40	—254·00	—111·938	—190·638	64 068
3	206·96	—146·86	—254·00	— 28·925	—222·825	64 400
4	201·74	—154·74	—254·00	+ 31·874	—175·125	64 643
M	249·80	— 46·00	—254·00	+ 0·010		

Tafel 3

i	$-\frac{A}{H}\Delta\alpha$	$-\frac{B}{H}\Delta\beta$	$-\frac{C}{H}\Delta R$	$-\frac{W}{H}$
1	— 0·00002345	— 0·0000002796	0·00002321	— 0·0002230
2	— 0·00002282	— 0·0000006404	0·00002339	+ 0·00174717
3	— 0·00001928	— 0·0000013682	0·00002327	+ 0·00044914
4	— 0·00001873	— 0·000001436	0·00002318	— 0·00049308
[ ]				

i	K	$-KW$	$v_x = DK$	$v_y EK$	$v_x^2 + v_y^2$
1	— 0·0002235		+ 0·0564	— 0·0067	
2	+ 0·0017472		— 0·4258	+ 0·1195	
3	+ 0·0004517		— 0·0935	+ 0·0663	
4	— 0·0004900		+ 0·0989	— 0·0758	
[ ]		0·2275			0·2275

Tafel 4

i	x	y	$\alpha-x$	$\beta-y$	R^2	R
1	0·8764	—8·1067	126·1296	14·8939	16 130·50	127·006
2	4·7242	11·3195	122·2818	34·3201	16 130·65	127·006
3	23·4265	50·4963	103·5795	73·4969	16 130·52	127·006
4	26·2289	54·2942	100·7771	77·2948	16 130·48	127·006
M	2·70		124·9060	23·0006	16 130·53	127·006

Tafel 5

i	A	W	$Q=\Sigma$	H
1	+ 1·0807	+ 14·40	+ 15·4807	64 574
2	— 4·0551	— 111·95	— 116·0051	64 068
3	— 33·6317	— 28·95	— 62·5817	64 400
4	— 38·1323	+ 31·84	— 6·2923	64 643
[ ]				

Tafel 6

i	$-\frac{A}{H}\Delta l$	$-\frac{W}{H}$	K	$-KW$
1	+ 0·00000161	— 0·0002230	— 0·0002214	0·003181
2	— 0·00000608	+ 0·0017474	+ 0·0017413	0·194936
3	— 0·00005096	+ 0·0004495	+ 0·0003986	0·011539
4	— 0·00005667	— 0·0004975	— 0·0005542	0·017645
[ ]				0·2273

i	v_x	v_y	$v_x^2 + v_y^2$
1	+ 0·0559	— 0·0066	
2	— 0·4243	+ 0·1191	
3	— 0·0825	+ 0·0585	
4	+ 0·1118	— 0·0858	
[ ]			0·2275

Tafel 7

i	x	y	$\alpha - x$	$\beta - y$	R^2	R
1	0·8759	—8·1066	126·0280	— 14·8844	16 104·60	126·904
2	4·7257	11·3191	122·1782	— 34·3101	16 104·69	126·904
3	23·4375	50·4885	103·4664	— 73·4795	16 104·53	126·904
4	26·2418	54·2842	100·6621	— 77·2752	16 104·31	126·903
M	2·10		124·8039	— 22·9910	16 104·60	126·904

Feinmessungen mit der Schlauchwaage

Von dipl. Ing. Georg Zahel, Berlin

1. Einführung

Höhendifferenzen auf größere Entfernungen mit einer «Genauigkeit» von 0,1 mm und einem noch geringeren mittleren Fehler zu bestimmen vermag kein Nivelliergerät, da hier die Ablesemöglichkeit bei 0,05 mm endet. Solche kleine Höhenunterschiede werden nur noch durch die Schlauchwaage genau registriert, die nachweisbar mindestens bis auf 50 m Entfernung der Höhenpunkte einsatzfähig ist.

Neben der hohen Meßgenauigkeit besitzt die Schlauchwaage den wesentlichen Vorzug, auch bei noch so beschränkten Raumverhältnissen verwendungsfähig und unabhängig von auftretenden Bodenerschütterun-