

Le calcul semi-graphique d'ellipsoïdes d'erreur mutuellement liés

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **55 (1957)**

Heft 12

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-213602>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 • LV. Jahrgang

Erscheint monatlich

10. Dezember 1957

Le calcul semi-graphique d'ellipsoïdes d'erreur mutuellement liés

Par A. Ansermet

Généralités

Dans le N° 9, 1956, de la présente Revue fut publié un intéressant article relatif à l'ellipsoïde d'erreur ([3] p. 266). L'auteur, dans ses conclusions, constate que jusqu'ici ce problème reçut assez peu d'applications pratiques. A l'avenir, grâce à l'évolution des méthodes, il en sera peut-être autrement. Citons deux domaines éventuels d'application: l'aéromensuration d'une part et la détermination de réseaux par les méthodes modernes de mesures linéaires d'autre part. Dans des régions accidentées, on déterminera des longueurs entre des points d'altitudes fort différentes ce qui impliquera le calcul simultané des trois coordonnées et leur compensation. Ces éléments pourront être combinés avec des mesures angulaires, altimétriques et planimétriques ou même des nivellements. En aéromensuration des points sont parfois situés sur la rive d'une même nappe liquide (lac, océan); il en résulte, altimétriquement, des conditions. Des observations par voie astronomique ne sont non plus pas exclues (azimuts de côtés, etc.). Le problème devient donc assez complexe.

Une fois pour toutes posons, en appliquant la formule connue:

$$m^2 \cong [pvv] : (n - u) = 1$$

valeur résultant de mesures linéaires ou angulaires ou d'une combinaison de celles-ci. L'équation de dimension des divers éléments du calcul doit tenir compte de ces diverses éventualités. La dimension de chaque paramètre est à établir au préalable.

Une autre remarque s'impose: ces déterminations d'ellipsoïdes n'exigent en général pas une grande précision. Les éléments initiaux (poids, etc.) ne sont souvent pas connus avec beaucoup d'exactitude. Et si la surface est peu aplatie, presque une sphère, la précision de l'orientation des axes principaux devient précaire. C'est pourquoi une solution semi-graphique peut être envisagée. Dans le plan, pour ce qui est de l'ellipse d'erreur, le praticien se contente fréquemment de connaître un parallélogramme circonscrit à la courbe, les côtés étant parallèles respectivement à deux diamètres conjugués. L'extension à l'ellipsoïde d'une telle solution est-elle susceptible de présenter de l'intérêt? C'est là une question à élucider; il s'agit de déterminer un parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués. Quelques lignes sont consacrées ci-dessous à cette face du problème.

Rappel de notions usuelles

Appliquons la méthode de la variation des inconnues par exemple au cas où les mesures sont linéaires et considérons un point $P(x, y, z)$ à déterminer.

L'équation résiduelle a la forme générale:

$$(1) \quad v = ax + by + cz + f; (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

les inconnues étant des accroissements à ajouter à des valeurs provisoires; f est le terme absolu. Admettons l'égalité des poids entre les mesures. Dans le voisinage immédiat du point compensé, considéré comme origine nouvelle d'un système ξ, η, ϕ parallèle au système x, y, z , on aura en un point:

$$(2) \quad v' = a\xi + b\eta + c\phi + v$$

et de plus: $[av] = [bv] = [cv] = 0$, donc: $[vv'] = [vv]$

d'où: $[v'v'] = (QT) + [vv]$

(QT) étant une forme quadratique ternaire en ξ, η, ϕ ([4] p. 28)

$$(3) \quad (QT) = \text{constante}$$

est l'équation d'un ellipsoïde d'erreur dont on sait déterminer les axes principaux. Utilisons la méthode depuis longtemps appliquée, dite des invariants, pour éliminer les termes rectangles, en posant pour simplifier:

$[aa] = a_{11}, [bb] = a_{22}, [ab] = a_{12} = a_{21} = [ba] \dots \dots [cc] = a_{33}$ (dans le cas général $[paa], [pbb], [pab] \dots$ au lieu de $[aa], [bb], [ab] \dots$)

Les trois invariants sont: $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ([1] p. 400)

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Equation en S. Elle fournit immédiatement les valeurs relatives des demi-axes principaux de la surface en fonction de ces invariants et des racines de l'équation (4)

$$(4) \quad S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

les trois racines S_1, S_2, S_3 étant liées aux demi-axes principaux A, B, C par la relation:

$$(5) \quad A^2 S_1 = B^2 S_2 = C^2 S_3$$

Equation en K. Considérons, au lieu de l'ellipsoïde, sa surface podaire par rapport au centre; on a, pour l'équation de celle-ci:

$$(6) \quad T_4 - (QT)_1 = 0$$

où T_4 est un groupe de termes de quatrième ordre indépendant de l'orientation des axes de coordonnées et $(QT)_1$ une nouvelle forme quadratique ternaire obtenue en substituant aux coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{22} \dots a_{33}$ les coefficients de poids $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} \dots Q_{33}$ relatifs aux trois inconnues x, y, z ([3] p. 267). Le centre de la surface podaire est un point isolé; de plus l'ellipsoïde est une surface unicursale ce qui n'est pas le cas pour la surface podaire.

Quant à l'échelle de ces deux surfaces elle dépend de la valeur m^2 . En désignant par I_1', I_2' et I_3' les nouveaux invariants on a:

$$(7) \quad K^3 - I_1' K^2 + I_2' K - I_3' = 0 \quad (\text{racines } K_1, K_2, K_3)$$

$$\begin{aligned} &\text{puis finalement: } A^2 : B^2 : C^2 = K_1 : K_2 : K_3 = \\ &= \frac{1}{S_2} : \frac{1}{S_2} : \frac{1}{S_3} \end{aligned} \quad (8)$$

La discrimination faite ici entre équations en S et en K a été inspirée surtout par des considérations d'ordre didactique; dès que deux ellipsoïdes d'erreur sont mutuellement liés, on ne peut plus suivre le raisonnement qui a conduit à l'équation (3); en d'autres termes les six coordonnées des centres de ces surfaces ne sont pas susceptibles d'être complètement dissociées, point par point, au cours de la compensation.

Résolution des équations en S et en K

Graphiquement, il y a diverses solutions; l'équation en S par exemple est ramenée, en éliminant le terme en S^2 , à la forme:

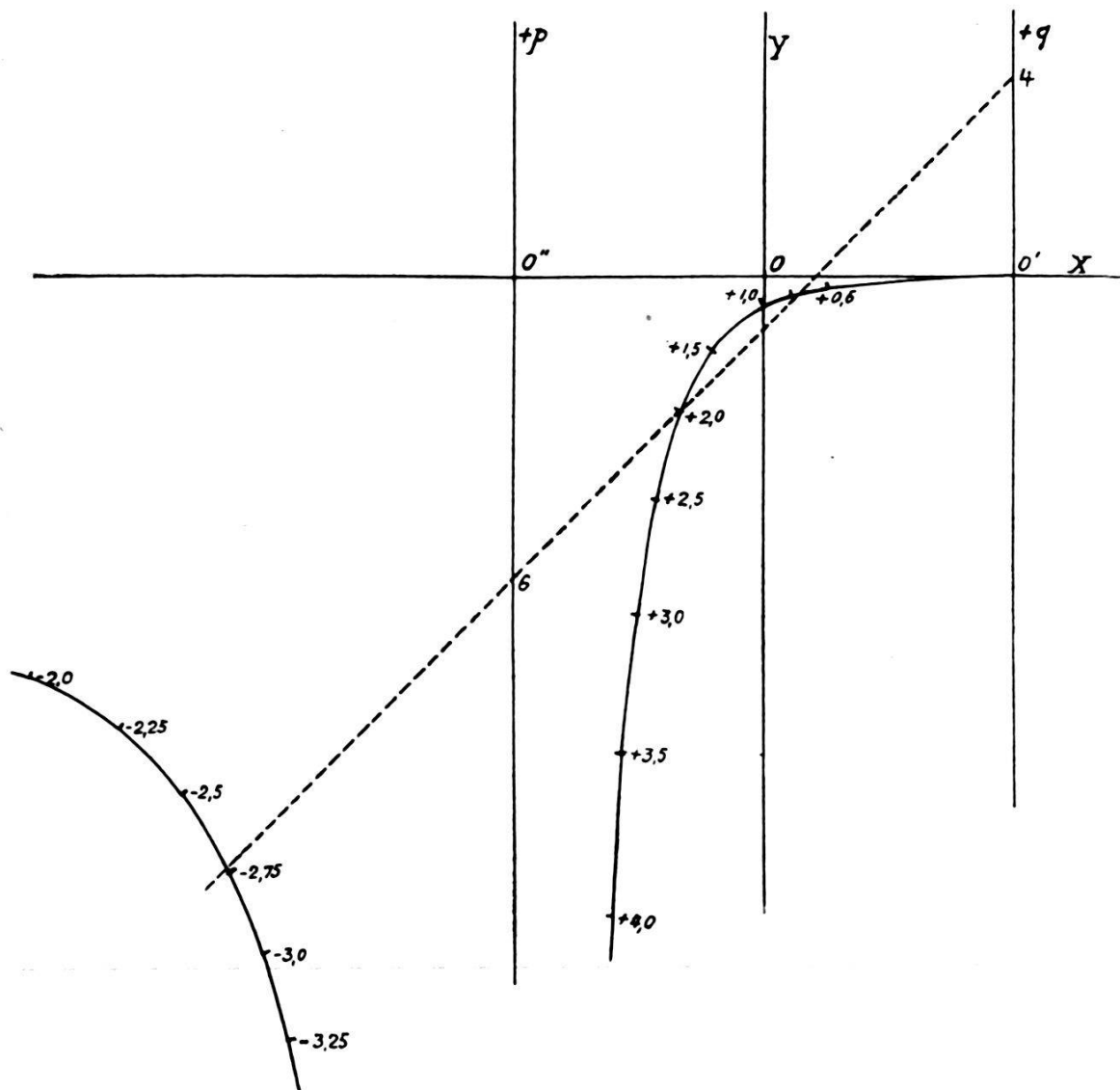
$$(9) \quad S'^3 + pS' + q = 0 \quad ([1] \text{ p. 442})$$

L'abaque est à points alignés sur deux droites et une courbe. Posons, en valeur absolue, $OO' = OO'' = D$. Les échelles des p et des q sont parallèles à OY tandis que l'échelle des S' est curviligne; c'est une cubique unicursale représentée paramétriquement par les expressions:

$$(10) \quad X = D(1 - S') : (1 + S') \text{ et } Y = -S'^3 : (1 + S'),$$

car on a:

$$(Y - p) : (X + D) = (Y - q) : (X - D) \text{ ou } \begin{vmatrix} XY & 1 \\ D & q & 1 \\ -D & p & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Il y a un point d'inflexion en O' , un point de rebroussement de première espèce à l'infini sur l'axe des p et une seconde asymptote $2 DY = X - 5D$.

Exemple: $S^3 - 6S' + 4 = 0$ ($p = -6, q = +4$)

on lit immédiatement les valeurs des trois racines: $+0,73, +2,0, -2,73$. L'orientation des axes principaux est calculable aussi par voie semi-graphique.

Observations fictives équivalentes

Cette solution consiste, on le sait, à substituer aux observations réelles, en nombre surabondant, des observations fictives en nombre non surabondant. Celles-ci ne donnent plus lieu à compensation. Dans le plan le problème est simple: chaque observation fictive se traduit par une paire de tangentes parallèles; les directions de ces tangentes, reportées au centre, sont mutuellement conjuguées dans une involution.

Dans l'espace, il faut considérer trois diamètres conjugués soit trois paires de plans tangents et, pratiquement, une seule solution pourrait être éventuellement envisagée; elle consisterait à choisir deux des trois diamètres conjugués de la surface (équation (3) dans un des plans: $\xi = 0$, ou $\eta = 0$, ou $\varphi = 0$.

Graphiquement, on tracerait une épure de géométrie cotée. L'intérêt d'une telle solution demeure cependant plutôt théorique.

Forme sphérique de la surface ellipsoïdale

Dans ce cas particulier, l'orientation des axes principaux est indéterminée. Admettons encore, pour fixer les idées, des mesures linéaires en attribuant des poids qui sont fonctions des longueurs (visées).

Il suffit par exemple, pour réaliser la forme sphérique, que les visées servant à déterminer un point soient trois à trois égales et mutuellement perpendiculaires (trièdres trirectangles). Ce n'est du reste pas le seul cas entraînant la forme sphérique. On sait que, dans le plan, des visées deux à deux égales et mutuellement perpendiculaires donnent lieu à un cercle d'erreur. Pratiquement il n'est pas nécessaire que ces conditions soient rigoureusement satisfaites.

Applications

On se bornera ici, et toujours pour $m^2 = 1$, au cas de deux points nouveaux, mais avec des conditions à remplir planimétriquement et altimétriquement. Le raisonnement peut être étendu au cas d'un groupe de points nouveaux.

Les deux points $P(x, y, z)$ et $P'(x', y', z')$ donnent lieu, pour la compensation, à six inconnues dx, dy, dz et dx', dy', dz' .

Pour simplifier les calculs et rendre ainsi plus explicites les développements, les éléments choisis sont fictifs et recevront des valeurs particulières: $y \cong y'$ et $z \cong z'$.

Le côté spatial PP' est donc à peu près parallèle à l'axe des x .

Dans l'équation relative à la longueur mesurée PP' quatre termes sont par suite négligés (en dy, dy', dz, dz').

Désignons de plus par Q_{ij} les coefficients de poids quadratiques et non quadratiques où $\left. \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots, 6$.

En se bornant à écrire la matrice des coefficients des inconnues dans les relations d'observation on a:

$$(11) \quad \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc|ccc} dx & dy & dz & dx' & dy' & dz' \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & & a_1' & b_1' & c_1' \\ & & & a_2' & b_2' & c_2' \\ & & & a_3' & b_3' & c_3' \\ + 1 & & & - 1 & & \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{poids (mesures linéaires)} \\ p_1 = 1 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 1 \\ p_4 = 1.5 \\ p_5 = 1.5 \\ p_6 = 1.5 \\ p_7 = 1.5 \text{ (côté spatial } PP') \end{array}$$

Les coefficients non-inscrits sont nuls ou négligeables.

$$\begin{aligned} \text{Admettons en outre: } [ab] \cong [ac] \cong [bc] \cong 0 & \quad a_7 \cong + 1 \\ [a' b'] \cong [a' c'] \cong [b' c'] \cong 0 & \quad a_7' \cong - 1 \end{aligned}$$

Ce sont les conditions connues d'orthogonalité.

En d'autres termes, les points P et P' sont les sommets, chacun, d'un trièdre à peu près trirectangle, chaque arête donnant lieu à une équation. On a donc, avec assez d'exactitude, toujours ensuite de l'orthogonalité

$$\begin{aligned} [paa] = 2.5, [pbb] = [pcc] = 1, [paa'] = - 1.5, [pa' a'] = 3, \\ [pb' b'] = 1.5 = [pc' c'], \end{aligned}$$

les autres coefficients non-quadratiques étant négligeables, ainsi que les coefficients correspondants Q_{ij} .

$$\begin{aligned} 2.5 Q_{11} - 1.5 Q_{14} &= 1 & 2.5 Q_{41} - 1.5 Q_{44} &= 0 \\ - 1.5 Q_{11} + 3 Q_{14} &= 0 & - 1.5 Q_{41} + 3 Q_{44} &= 1 \\ Q_{22} = Q_{33} &= 1, & Q_{11} &= 0.57, & Q_{14} &= + 0.285, & Q_{44} &= 0.475, \\ Q_{55} = Q_{66} &= 2/3 \end{aligned}$$

Poids amplifiés. Désignons par $P_1, P_2 \dots P_7$ les poids amplifiés grâce à la compensation:

$$\begin{aligned}
(p_1 : P_1) + (p_2 : P_2) + (p_3 : P_3) &= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 2.57 = R^2 = \\
&\qquad\qquad\qquad A^2 + B^2 + C^2 \\
(p_4 : P_4) + (p_5 : P_5) + (p_6 : P_6) &= 1.5 (Q_{44} + Q_{55} + Q_{66}) = 2.713 \\
p_7 : P_7 &= 1.5 (Q_{11} + Q_{44}) - 3Q_{14} = 0.713 \quad . \\
([2] \text{ p. 159}) \quad [p : P] &= 6.00 \text{ (six inconnues)}
\end{aligned}$$

R étant le rayon de la sphère orthoptique de l'ellipsoïde d'erreur en P ; le calcul est analogue en P' .

Cas où il y a des conditions

On peut concevoir bien des conditions; admettons qu'on connaisse l'azimut du côté PP' et la différence d'altitude, très faible, entre P et P' ; ces éléments sont considérés ici comme étant exempts d'erreurs.

En partant encore des valeurs provisoires on aboutit à des équations de condition très simples

$$(12) \quad \begin{cases} dz - dz' = \text{quantité connue (pour l'altimétrie)} \\ dy - dy' = \text{quantité connue (pour l'azimut)} \end{cases}$$

la réduction à quatre inconnues est immédiate, d'où la nouvelle matrice des coefficients des inconnues dans les équations aux erreurs (dy' et dz' éliminés)

	dx	dy	dz	dx'	(poids inchangés)	
(13)	1	a_1	b_1	c_1	Il y a encore orthogonalité mutuelle (ou à peu près) entre les visées 1, 2, 3 d'une part, et 4, 5, 6 d'autre part	
	2	a_2	b_2	c_2		
	3	a_3	b_3	c_3		
	4		b_1'	c_1'		a_1'
	5		b_2'	c_2'		a_2'
	6		b_3'	c_3'		a_3'
	7	+ 1		- 1		

$$\begin{aligned}
[pa a] &= 2.5 = [pbb + pb' b'] = [pcc + pc' c']; [pa' a'] = 3; [paa'] = -1.5 \\
Q_{11} &= 0.57; Q_{22} = Q_{33} = 0.4; Q_{44} = 0.475; Q_{14} = +0.285
\end{aligned}$$

Contrôle des poids:

$$\begin{aligned}
(p_1 : P_1) + (p_2 : P_2) + (p_3 : P_3) &= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 1.37 = R^2 \\
(p_4 : P_4) + (p_5 : P_5) + (p_6 : P_6) &= 1.5 (Q_{22} + Q_{33} + Q_{44}) = 1.913 \\
p_7 : P_7 &= 1.5 (Q_{11} + Q_{44}) - 3Q_{14} = 0.713 \\
[p : P] &= 4.00 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(quatre inconnues)}
\end{aligned}$$

Pour le point P' et son ellipsoïde d'erreur le calcul est analogue. Grâce aux deux conditions (12) la valeur R^2 , carré du rayon de la sphère orthoptique en P , est ramenée de 2.57 à 1.37, gain appréciable. On voit le rôle joué par ces conditions même si les éléments fictifs furent choisis pour réaliser une certaine simplification. On évitait ainsi l'équation du troisième degré dont la résolution, en pratique, sera de règle; en dressant l'abaque résultant de l'équation (10), c'est-à-dire en traçant la cubique unicursale à une échelle suffisante, on obtient instantanément les trois racines cherchées avec une précision qui en général sera suffisante. Le problème des ellipsoïdes d'erreur gagnera en actualité en fonction du développement futur des méthodes d'aéromensuration et des procédés modernes de mesures linéaires en terrain accidenté. Le sujet n'est ici qu'effleuré; il est susceptible encore de bien des développements.

Littérature:

- [1] *Bouasse A.*, Mathématiques générales (Paris, Delagrave).
- [2] *Großmann W.*, Ausgleichungsrechnung (Berlin, Springer).
- [3] *Holsen J.*, Das mittlere Fehlerellipsoid (SZfV 1956, Nr. 9).
- [4] *Wellisch S.*, Ausgleichungsrechnung II (Wien, Fromme).

De l'emprise de terrains nécessaires aux autoroutes par voie de remaniement parcellaire en Allemagne occidentale

Blaise Petitpierre, Ingénieur-Conseil,
ancien chef du Service des améliorations foncières
du canton de Vaud

La loi du 18 décembre 1933 sur les «Reichsautobahnen» instituait la possibilité de réserver les surfaces d'emprise par voie de remaniement parcellaire. Cette loi a été modifiée par les nouvelles dispositions légales du 14 juillet 1953 (entrée en vigueur le 1^{er} janvier 1954), dispositions qui cherchent à répartir la perte de terrain sur un nombre de propriétaires aussi grand que possible. Certaines exploitations spécialisées (cultures maraîchères, fruitières, etc.) sont exclues de cette participation; mais les grandes propriétés peuvent être touchées davantage. Enfin, il est tenu compte des surfaces de terrain faisant partie d'une exploitation en dehors du périmètre intéressé par l'autoroute. Les exploitations de surface restreinte, qui de ce fait sont à la limite de la viabilité, sont exclues de la participation à l'emprise de l'autoroute.

Les conditions locales, la topographie et plus particulièrement le morcellement de la propriété foncière dans les régions que nous avons visitées, présentent certaines analogies intéressantes avec le pays de Vaud.