Nivellement und Schwere

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **56 (1958)**

Heft 1

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-214353

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 1 • LVI. Jahrgang **Erscheint monatlich** **14. Januar 1958**

Nivellement und Schwere

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

Einleitung. Seit der 9. Hauptversammlung der Internationalen Geodätischen und Geophysikalischen Union im Jahre 1951 in Brüssel wurde in der Internationalen Assoziation für Geodäsie die Frage systematisch behandelt, wie man die Schweremessung heranziehen könne, um mit ihrer Hilfe die Nivellementsergebnisse, speziell von Präzisionsnivellements, einwandfrei zu gestalten. Zu diesem Zwecke werden heute im wesentlichen moderne *Gravimeter* verwendet, welche es ermöglichen, auf sehr viel billigere Weise dicht gelegene Schwerestationen zu bestimmen, als dies mit Hilfe von Pendelmessungen möglich gewesen war. Besonders günstig liegen die Verhältnisse, wenn die Schwerestationen sich auf Straßen befinden, da das Gravimeter hier mit dem Auto transportiert werden kann und die Messung daher sehr rasch erfolgt, obgleich, wenigstens für Schweremessungen eines Netzes erster Ordnung, jede Station mehrmals besucht werden muß.

Wir wollen nun in dem folgenden Aufsatz darlegen, weshalb für genaue Nivellements die Bestimmung der Schwere auf einer Anzahl von Fixpunkten des Nivellements notwendig ist.

§ 1. Das metrische Problem der Höhenbestimmung

In jedem Punkt der physischen Erdoberfläche existiert eine ausgezeichnete Richtung, die *Lotrichtung*, als die Richtung der Schwerkraft. Sie kann durch ein Schnurlot oder genauer durch eine Libelle in jedem Punkte bestimmt werden, indem die durch eine Libelle aufgezeichnete horizontale Richtung senkrecht zur Lotrichtung steht.

Wir stellen uns zunächst ein kleines Objekt vor, etwa ein einzelnes Haus, das wir nach Lage und Höhe ausmessen wollen. Wir setzen voraus, daß die Meßgenauigkeit die Krümmung der Horizontalebene in einem Punkt, etwa in der Mitte des Hauses, nicht festzustellen gestatte. Dann können wir die Projektion der einzelnen Punkte des Hauses mit Hilfe der durch sie gehenden Lotlinien auf eine geeignet gewählte Horizontalebene bestimmen, zum Beispiel durch Abloten mit Hilfe eines Schnurlotes. Wo Teile des Hauses die direkte Ablotung verunmöglichen, wird sie auf eine am Objekt ausgebildete Horizontalebene vorgenommen. Durch Horizontalmessungen wird bis an den Rand der Horizontalebene gegangen, um dann von dort aus eine direkte Messung der Höhe bis auf eine tiefer gelegene Horizontalebene vorzunehmen. Wenn wir die Krümmung der Horizontalebene nicht feststellen können, so entgeht uns auch die Konvergenz der Lotlinien. Wir dürfen auch ein Nivellierinstrument verwenden. Unsere Messung besteht darin, durch direkte Längenmessungen Höhendifferenzen und horizontale Distanzen zu messen, aus denen wir alle Dimensionen des Hauses abzuleiten imstande sind. Wir dürfen auch schiefe Distanzen verwenden, wenn wir deren Neigung mit einem Neigungsmesser bestimmen. Außer der Bestimmung von Lotrichtungen und horizontalen Teilstücken (eventuell auch schiefer Geraden, deren Neigung bekannt ist) setzt unsere Vermessung des Hauses direkte Längenmessungen voraus, als Längen von vertikalen und horizontalen Geraden.

Wenn aber das zu vermessende Objekt so groß ist, daß wir die Nichtparallelität der Lotlinien feststellen können, indem wir etwa deren Abstand oben und unten als verschieden bestimmen, so bereitet es schon Mühe, die Dimensionen des Objektes einwandfrei zu ermitteln. Während wir hier nur die ausgezeichnete Richtung der Lotlinien zur eindeutigen Orientierung der Messungen verwendet haben, wollen wir nun zusehen, ob sich nicht eine Methode finden läßt, bei der nicht nur die Richtung, sondern auch der Betrag der Schwerkraft berücksichtigt wird.

§ 2. Das Schwerefeld der Erde

In § 1 haben wir festgestellt, daß in jedem Punkt der Erde eine ausgezeichnete Richtung, die Lotrichtung, existiert. Es existiert aber auch in jedem Punkt der Erdoberfläche, und außerhalb und innerhalb derselben, eine bestimmte Kraft, die *Schwerkraft*, welche die Richtung der Lotlinie hat. Wir operieren im nachstehenden mit der spezifischen Schwerkraft, das heißt der Kraft pro Maßeneinheit, welche gleich der *Schwerebeschleunigung* $\vec{g}$ ist. $\vec{g}$ ist also ein variabler Vektor, dessen eindeutige Richtung nur in dem Punkt des Raumes versagt, wo $g = 0$ ist. Bekanntlich rührt die Schwerkraft von der Gravitation der Massen und der Rotation der Erde her. Die spezifische Schwerkraft $\vec{g}$ stellt die resultierende Kraft aus Gravitation und Zentrifugalkraft dar. Schwere heißt auf französisch pesanteur, auf englisch gravity.

Wir nennen einen Raum, in dessen Punkten je ein bestimmter Kraftvektor besteht, ein *Kraftfeld*.

Es gibt nun im Raum ein mit diesem Kraftfeld zusammenhängendes Feld eines Skalars, ein sogenanntes *Skalarfeld*. Bekanntlich haben Gravitation und Zentrifugalkraft eine *Kräftefunktion*, so daß auch die Schwere

$\vec{g}$ eine Kräftefunktion besitzt. Wenn eine Kraft, zum Beispiel eine spezifische Kraft, eine Kräftefunktion hat, so gibt es einen Skalar, dessen *Gradient* gleich der Kraft ist.

Es ist daher

$$\vec{g} = \overrightarrow{grad}\, W \tag{1}$$

Wir nennen den Skalar W die potentielle Energie oder das Potential des betreffenden Massenpunktes. Wenn sich der Massenpunkt P mit der Masse *Eins* nach einem benachbarten Punkt P' um den Vektor $\vec{ds}$ verschiebt, so wird dabei die *Arbeit* dA geleistet

$$dA = \vec{g} \cdot \vec{ds} = grad\, W \cdot \vec{ds} \tag{2}$$

W ist dabei eine Funktion der Koordinaten von P, x, y, z, W (x, y, z), es ist eine skalare Feldfunktion. Alle Punkte, für welche die Feldfunktion einen festen Wert besitzt, erfüllen eine Fläche

$$W\,(x, y, z) = c \tag{3}$$

Gibt man c verschiedene Werte, so entsteht eine *Flächenschar*, die Schar der *Niveauflächen* des skalaren Feldes.

Aus (2) entnehmen wir, daß, wenn $\vec{ds}$ senkrecht zu $\vec{g}$ steht, dA gleich Null ist, weil das skalare Produkt zweier senkrecht aufeinanderstehender Vektoren Null ist. Verschiebt man daher den Punkt P auf einer Niveaufläche, so ist $dA = 0$. Eine solche Verschiebung geht ohne Arbeitsleistung vor sich. Wenn $\vec{ds}$ gleichgerichtet mit $\vec{g}$ ist, so ist dA ein positives Maximum. Wir bezeichnen diese Richtung mit $\vec{dt}$. Es ist dann

$$dA = \overrightarrow{grad}\, W \cdot \vec{dt} = \vec{g} \cdot \vec{dt} \tag{4}$$

Es ist hier $dA = dW$. Der Gradient steht senkrecht zu den Niveauflächen. Er ist positiv beim Übergang von einer Niveaufläche niederen Niveaus zu einer Niveaufläche höheren Niveaus.

Trägt man auf jeder orientierten s-Achse $\frac{dW}{ds}$ von P aus ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken eine Kugel durch P mit dem Gradienten als Durchmesser.

Diese Kugel muß die Niveaufläche durch P in P berühren, da $\frac{dW}{ds}$ verschwindet, wenn die s-Achse die Niveaufläche $W\,(x, y, z) = W_{(P)}$ berührt. Der Gradient steht senkrecht auf der Niveaufläche und ist der Größe nach gleich der Richtungsableitung in der zur Niveaufläche senkrechten Richtung. $\frac{dW}{ds}$ stellt die Projektion des Gradienten auf die Richtung s durch P dar. Wir haben also

$$dW = \vec{g} \cdot \vec{dt};\ \vec{g} = \overrightarrow{grad}\, W \tag{5}$$

Wählen wir $\vec{z}$ in Richtung der Höhe, in welcher Richtung das Potential W abnimmt, so haben wir

$$-dW = \vec{g} \cdot \vec{dz} \tag{6}$$

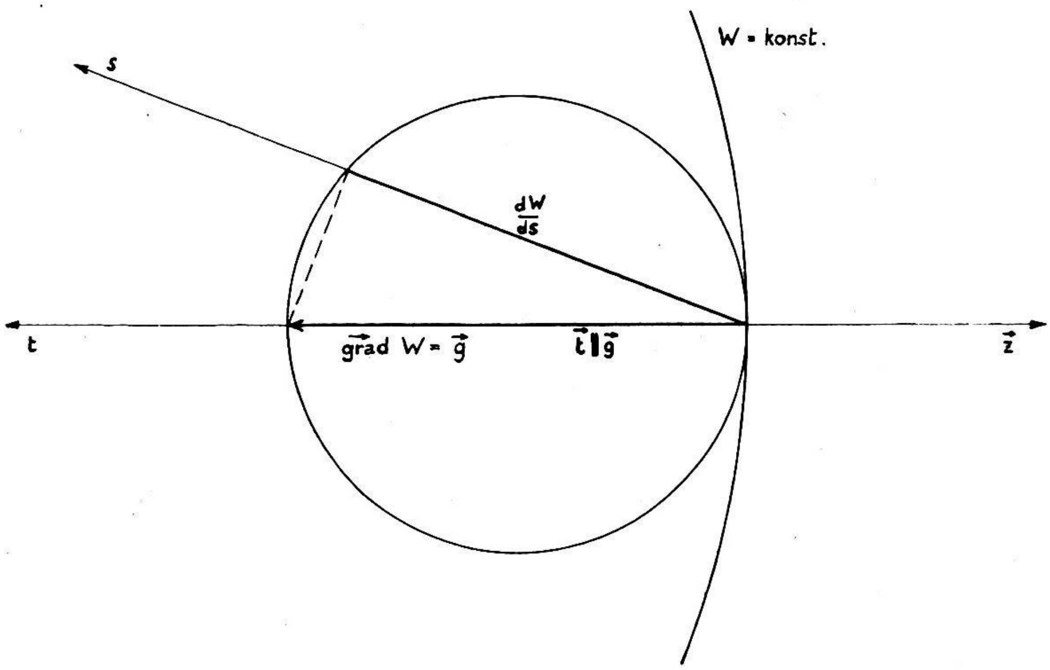

Fig. 1

Da die Lotlinien normal zu den Niveauflächen stehen, bilden sie das System der orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen. Da diese keine Parallelflächen sind, stellen die Lotlinien doppelt gekrümmte Kurven dar.

Wenn wir von P_1 nach P_2 längs einem beliebigen Weg auf der Erdoberfläche gehen, so erhalten wir durch Integration

$$-(W_2 - W_1) = + \int_{P_1}^{P_2} g dz \tag{7}$$

Stellen wir uns nun ein Präzisionsnivellement vor, von P_1 nach P_2 durchgeführt, so müssen wir dz durch die Differenz der Lattenablesungen Δz ersetzen. g ersetzen wir durch g_{mi} wo

$$g_{mi} = \frac{g_{i-1} + g_i}{2}; \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

so erhalten wir durch numerische Integration, die Trapezformel verwendend,

$$-(W_2 - W_1) = + \sum_{i=1}^{n} g_{mi} \Delta z_i \tag{8}$$

n stellt die Anzahl der Intervalle von P_1 ($i = 0$) bis P_2 ($i = n$) dar. Die rechte Seite der Gleichung (8) ist natürlich nicht mehr genau gleich dem

Wert des Integrals (7). Wenn aber die Höhendifferenzen Δz durch Nivellement ermittelt werden und der Wert von g für jeden Lattenumstellpunkt bestimmt wird, so kann man den Fehler von (8) vernachlässigen, selbst für ein sehr langes Nivellement. (Siehe Helmert [6], Band II, Seiten 502 ff., oder auch Baeschlin [4], Seiten 789 ff.)

Wir betrachten jetzt ein Nivellement mit Schweremessungen, das von einem Punkt O auf dem Geoid ausgeht, für den das Geopotential gleich W_o ist.

Gleichung (8) wird dann

$$-(W_P - W_o) = C_P = + \sum_{O}^{P} g_{mi} \, \Delta z_i \tag{9}$$

Wir bezeichnen $-(W_P - W_o) = W_o - W_P$ mit C_P und nennen diese Größe *geopotentielle Kote* (französisch: cote géopotentiel, englisch: geopotential number). Diese Bezeichnung wurde von Prof. *P. Tardi*, Direktor des Zentralbüros der Internationalen Assoziation für Geodäsie anläßlich der Diskussion an der 10. Hauptversammlung der Assoziation für Geodäsie vorgeschlagen. Dieser Vorschlag wurde dann durch die Hauptversammlung aufgenommen.

In Wirklichkeit messen wir aber die Schwere g nicht für jeden Lattenumstellpunkt, sondern nur für die Nivellementsfixpunkte in Entfernungen von 300 Metern bis zu mehreren Kilometern.

In diesem Falle haben wir mit einem Fehler von C_P nach (9) zu rechnen. Auf diesen Fehler werden wir noch zu sprechen kommen. Sehen wir von diesem Fehler ab, so können wir mit Hilfe der Formel (9) ohne eine Hilfshypothese aus Nivellementsdifferenzen und Schwerewerten die Differenzen von geopotentiellen Koten, das heißt von Arbeitsgrößen, bestimmen. Dagegen erhalten wir so keine Höhen oder Höhendifferenzen.

§ 3. Orthometrische Höhen

Wir definieren als die orthometrische Höhe H_P eines Punktes P an der physischen Erdoberfläche die Länge der gekrümmten Lotlinie von P bis zum Schnitt mit dem Geoid in P'. Abgesehen von dem Fall, daß ein Schacht bis auf das Geoid zur Verfügung stünde, können wir diese orthometrischen Höhen nicht durch reine Längenmessungen bestimmen. Nach der Integralformel (7) ist

$$C_P = \int_{P'}^{P} g_Q \, dz_Q \tag{10}$$

wo Q ein Punkt der Lotlinie von P und g_Q der Schwerewert in Q ist.

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung setzen wir

$$\int_{P'}^{P} g_Q \, dz_Q = + \bar{g}_P \int_{P'}^{P} dz_Q = + \bar{g}_P \cdot H_A \tag{11}$$

Hier ist $\bar{g}_P$ der Mittelwert der Schwere in den Punkten der Lotlinie von A' bis A. $H_A = A'A$ = orthometrische Höhe.

Da $\int\limits_{P'}^{P} g_Q \, dz_Q = C_P$ ist, erhalten wir:

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}_P} = \text{orthometrische Höhe} \tag{12}$$

Wir können allerdings den Durchschnittswert der Schwere $\bar{g}_P$ nicht durch Messung bestimmen, weil im allgemeinen die Punkte Q in der Lotlinie von P unzugänglich sind. Wir können $\bar{g}_P$ nur mit Hilfe einer Hypothese über die Dichte in den Punkten Q berechnen.

§ 4. Schlußfehler einer Nivellementsschleife

Wenn wir ein Nivellement von einem Punkt der Erdoberfläche aus durchführen und nach längerem Wege wieder zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, so haben wir eine Nivellementsschleife durchlaufen. Wären die Niveauflächen konzentrische Kugelflächen, wie wir dies in der Vermessungskunde voraussetzen, so müßte der durch das Nivellement gefundene Höhenunterschied in aller Strenge gleich Null sein.

Setzen wir aber die wirklichen Niveauflächen, die keine Parallelflächen sind, voraus, so erhalten wir bei vollständig fehlerlosem Nivellement einen von Null verschiedenen Höhenunterschied, den wir den *theoretischen Schlußfehler* der betreffenden Nivellementsschleife nennen.

Die Differenz der Geopotentiale für zwei Punkte P_1 und P_2 wird durch das Integral ausgedrückt

$$C_{P_2} - C_{P_1} = \int\limits_{P_1}^{P_2} g \, dz \tag{13}$$

Somit wird

$$C_A - C_A = \int\limits_{A}^{A} g \, dz = 0.$$

Setzen wir

$$g = g_0 + (g - g_0)$$

wobei wir g_0 geeignet wählen, zum Beispiel als Durchschnittswert aller g_P der Schleife. So erhalten wir

$$\int\limits_{P_1}^{P_1} g_0 \, dz + \int\limits_{P_1}^{P_1} (g - g_0) \, dz = 0.$$

$$g_0 \int\limits_{P_1}^{P_1} dz = - \int\limits_{P_1}^{P_1} (g - g_0) \, dz$$

$$\text{Theoretischer Schlußfehler} = \int\limits_{P_1}^{P_1} dz = - \frac{1}{g_0} \int\limits_{P_1}^{P_1} (g - g_0) \, dz \tag{14}$$

Ersetzen wir die Integrale durch Summen, so erhalten wir:

$$\text{Theoretische Schlußfehler des Polygons} = -\frac{1}{g_0}\sum (g - g_0)\,\Delta z \tag{15}$$

wobei die Summe über das ganze Polygon zu erstrecken ist.

Wenn wir auf verschiedenen Wegen von der Meeresfläche aus nach einem Punkt im Innern eines Kontinentes nivellieren, wobei wir annehmen, daß die Meeresfläche eine Niveaufläche, das Geoid, sei, so müßten wir bei fehlerlosem Nivellement dieselbe geopotentielle Kote finden. Dagegen werden die einzelnen rohen Nivellements $\sum\limits_{o}^{P} \Delta z$ verschieden ausfallen. Die Nivellementsresultate sind vom Wege abhängig.

Wir erkennen aber, daß wir Nivellements ausgleichen können, mit Hilfe der Differenzen der geopotentiellen Koten. Wir haben also gar nicht nötig, die orthometrischen Höhen zu bilden und diese auszugleichen; natürlich würde auch das zum Ziele führen.

§ 5. Methode von Niethammer zur Bestimmung orthometrischer Höhen

Die Methode besteht in folgendem: Wir nehmen an, daß die Massen, welche sich zwischen der physischen Erdoberfläche und dem Geoid befinden, eine konstante Dichte Θ haben. Wir bestimmen die spezifische Anziehung g_Q dieser Massen auf einen Punkt Q, der sich auf der Lotlinie durch P an der Erdoberfläche befindet; damit bestimmen wir g_Q und daraus durch numerische Integration $\bar{g}_P$.

Die zwischen Geoid und physischer Erdoberfläche befindlichen Massen denken wir uns wie folgt zusammengesetzt:

1. Aus einer Platte von der Dichte Θ und der Dicke H_A; die Platte geht vom Meeresniveau bis zum Niveau der Station.
2. Aus Massen von der Dichte $+\Theta$, welche sich über das Stationsniveau erheben, und Massen von der Dichte $-\Theta$, die sich in dem Raum befinden zwischen dem Niveau der Station und dem Teil der physischen Erdoberfläche, welche sich unterhalb dieses Niveaus befindet.

Wir nennen die Massen 2 die «Topographie». Wir zerlegen diese «Topographie» in analoger Weise in Zonen und Sektoren, wie wir das für die Berechnung der «topographischen Reduktion» einer beobachteten Schwere auf das Geoid machen. Die Radien der von *Niethammer* verwendeten Zonen sind 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 6.0, 8.0, 11.0, 15.0, 20.0, 26.0, 33.0, 42.0 km. Die Anzahl der Sektoren ist 8, so daß die mittlere Höhe in den 136 Kompartimenten mit Hilfe von geeigneten Kurvenkarten zu bestimmen ist; man nimmt an, daß jedes Kompartiment durch eine horizontale Deckfläche begrenzt sei, deren Höhe gleich dem Mittelwert der Höhen in dem Kompartiment sei.

Für jede der 17 Zonen hat Niethammer für die Dichte $\Theta = 1$ zwei Funktionen $F\,(H_A, h)$, $\Phi\,(H_A, h)$ berechnet und in Tafeln zusammengestellt, weil die Interpolation aus Tafeln mit zwei Eingängen sehr mühsam ist. Die Berechnung wurde unter Vernachlässigung der Erdkrümmung durchgeführt.

Wenn die Isostasie berücksichtigt werden soll, so müssen besondere Tafeln berechnet werden nach *Baeschlin* [5]. Liegen solche Tafeln vor, so ist die Bestimmung genau so einfach wie nach den Tafeln von Niethammer.

(Schluß folgt)

Bodengewinnung in Dänemark

(Ein Vortrag für eine Gruppe von schweizerischen Meliorationsingenieuren am 29. August 1957)

Von K. Barnekow,
Sekretär des staatlichen Bodengewinnungsausschusses

Eine kurzgefaßte Darlegung der Bodengewinnungsfrage hat eine Erläuterung der gesetzlichen Vorschriften und Aufklärung über die Art und Weise der Durchführung des Gesetzes zu umfassen. Auf die technischen und speziell wirtschaftlichen Probleme einzugehen wird die Aufgabe anderer Referenten sein. Das Gesetz über die Bodengewinnung wurde 1940 erlassen und ist mit einigen unerheblichen Änderungen von 1942 und 1953 weiterhin in Kraft.

Der Zweck der Bewerkstelligung von Arbeiten ist ein doppelter: die Produktion von Getreide und Futtermitteln zu fördern und der Arbeitslosigkeit entgegenzutreten.

Die Arbeiten, die bewerkstelligt werden können, sind verschiedener Art, zerfallen jedoch im wesentlichen in vier Gattungen:

1. bessere Entwässerung bereits genutzten Bodens;
2. Entwässerung oder Kultivierung nicht genutzter Flächen, zum Beispiel Moorflächen, Heideflächen u. a. m.;
3. Arbeiten zur Küstensicherung. Diese Arbeiten umfassen den Bau von Deichen und Buhnen, deren Zweck es ist, die landwirtschaftlich genutzten Flächen gegen Angriffe durch das Meer zu sichern;
4. Eindeichung und Trockenlegung von Meeresboden.

Der größte Teil der seit 1940 bewerkstelligten Arbeiten entfällt auf die beiden ersten Gattungen.

Es kann hier bisweilen schwierig sein, die Grenze zu ziehen zwischen Arbeiten, die nach dem Bodengewinnungsgesetz durchzuführen sind, und Arbeiten, die nach dem Meliorationsgesetz durchzuführen sind. Die Bodengewinnungsarbeiten bilden mehrfach die Grundlage der Meliorationsarbeiten. Die Bodengewinnungsarbeiten umfassen die größeren Arbeiten im Interesse mehrerer Eigentümer, wie die Regulierung und die Vertiefung von Wasserläufen und deren Zuflüssen, die Errichtung von Pumpenanlagen u. a. m., während die sich anschließenden Dränungsarbeiten nach dem Meliorationsgesetz durchgeführt werden. Dies schließt