**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 56 (1958)

**Heft:** 2

**Artikel:** Normalsphäroid und Niveauellipsoid

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-214358

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

feldes der Erde. Nach meiner Auffassung würde die Verwendung des metrischen Systems unter Ausschaltung des dynamischen Systems eine Verarmung der Geodäsie bedeuten. Ich erinnere daran, daß nach der Auffassung von *H. Bruns* die Geodäsie die Beschreibung des Schwerefeldes der Erde bedeutet. Es ist nicht möglich, mit Hilfe der metrischen Auffassung ein in sich geschlossenes Höhensystem aufzustellen. Die von Herrn *Jessen* entwickelte Idee ist keine allgemeine Lösung.

*Bibliographie:*


[1] *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1934

[2] *J. Nielsen*, Vorlesungen über elementare Mechanik, Berlin 1935

[3] *F. Baeschlin*, Untersuchungen über die Reduktion der Präzisionsnivellements, Bern 1925.

[4] *C. F. Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie, Zürich 1948

[5] *C. F. Baeschlin*, Ergänzung zur Berechnung der mittleren Schwere in einer Lotlinie nach Th. Niethammer, München 1955. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wiss., math.-naturwiss. Klasse.

[6] *J. R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Band I, Leipzig 1880; Band II, Leipzig 1884.


# Normalsphäroid und Niveauellipsoid


*Von K. Ledersteger, Wien*


Unter dem Normalsphäroid der Erde versteht man bekanntlich die Figur des vollkommenen hydrostatischen Gleichgewichtes der Erde oder das künstliche Geoid und gleichzeitig die freie Oberfläche der regularisierten Erdmasse. Seine hypothesenfreie Bestimmung stößt auf große Schwierigkeiten, zumal das Gesetz, nach dem die Massen der Erdkruste zur Erreichung des hydrostatischen Gleichgewichtes umgruppiert werden müßten, das sogenannte «Regularisierungsgesetz», unbekannt ist. Für jede gedachte Massenanordnung, für welche das künstliche Geoid vom Potentialwert $W_0$ des tatsächlichen Geoides äußere Niveaufläche und gegebenenfalls auch Rand der Erdmasse wird, kann die in Kugelkoordinaten oder in rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten entwickelte Kräftefunktion formal in

$$W = U + T = W_0 \tag{1}$$

zerlegt werden, wobei die von der Länge unabhängigen Glieder bis einschließlich der 4.0. das Rotations-Niveausphäroid 4. Ranges definieren. Man erhält so in Kugelkoordinaten das Helmertsche Niveausphäroid:

$$U_K = \frac{k^2 E}{l}\left\{1 + \frac{K}{2\,l^2}(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2\,k^2 E}\cos^2\varphi' + \right. \\ \left. + \frac{D}{l^4}\left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right)\right\} = W_0 \tag{2}$$

mit

$$K = \frac{1}{E}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)$$

und in rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten:

$$U_E = k^2 E \frac{1}{e} \operatorname{arctg}\left(\frac{e}{u}\right) + \frac{\omega^2}{3}(u^2 + e^2) + \left[Q_{20}\left(\frac{iu}{e}\right) v_{20} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega^2}{3}(u^2 + e^2)\right] P_{20}(\cos\vartheta) + Q_{40}\left(\frac{iu}{e}\right) w_{40}\, P_{40}(\cos\vartheta) = W_0. \tag{3}$$

In der ersten Formel bedeutet $l$ den Radiusvektor des Niveausphäroides, $\varphi'$ die geozentrische Breite, $E$ die Erdmasse, während $A < B < C$ die Hauptträgheitsmomente der umgruppierten Erdmasse sind. In der zweiten Formel ist $e$ die lineare Exzentrizität der konfokalen Koordinatenellipsoide mit dem laufenden Polarradius $u$ und $\vartheta$ die reduzierte Poldistanz. $Q_{20}$ und $Q_{40}$ sind Legendresche Funktionen zweiter Art, $v_{20}$ und $w_{40}$ Konstante.

Die Beschränkung der beiden Kräftefunktionen $U$ auf die $\lambda$-freien Glieder ist völlig gerechtfertigt, da das Normalsphäroid der Erde a priori eine Rotationsfigur sein muß. Dies schließt aber bereits ein, daß die «Restfunktion» $T$ für die vollkommen regularisierte Erde verschwinden muß oder, anders ausgedrückt, daß das Normalsphäroid zu jenen künstlichen Geoiden gehören muß, die mit ihren eigenen Niveausphäroiden zusammenfallen, wie dies *F. Hopfner* [1] formuliert hat. Außerdem gibt es zu jedem Niveausphäroid $U = W_0$ ein achsengleiches Rotationsellipsoid, und wir haben den Unterschied dieser beiden Flächen näher ins Auge zu fassen.

Führt man bei Verwendung von Kugelkoordinaten den Parameter $\delta = D/a^4$ ein, wobei $a$ natürlich den Äquatorradius des Niveausphäroides bedeutet, so ist die Erhebung des Niveausphäroides über sein achsengleiches Rotationsellipsoid durch

$$h = \frac{a}{4}\left(\frac{5}{2}\alpha^2 - \alpha\beta - \delta\right)\sin^2 2\varphi' + Gl_6 \tag{4}$$

gegeben. Sie erreicht ihr Maximum unter 45° Breite. In (4) ist $\alpha$ die Abplattung und $\beta$ der Hauptkoeffizient der Formel für die normale Schwere

$$\gamma = \gamma_0\left(1 + \beta\sin^2\varphi - \frac{\beta_4}{4}\sin^2 2\varphi\right). \tag{5}$$

Nun ist der fundamentale Parameter der Theorie der Gleichgewichtsfiguren, das Verhältnis Fliehkraft zur Schwere am Äquator, weitgehend unabhängig von einem Fehler in der Achse $a$ und in der Äquatorschwere $\gamma_0$, so daß man mit den bekannten internationalen Näherungswerten

$$a = 63783.10^4 \text{ cm}; \qquad \gamma_0 = 978{,}049 \text{ cm sec}^{-2} \tag{6a}$$

hierfür findet

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} = 34678.10^{-7}, \tag{7}$$

worin die 7. Dezimale als gesichert gelten darf. $\varepsilon$ ist ebenso wie $\alpha$ und $\beta$ eine Größe 2.0., $\delta$ und $\beta_4$ sind Größen 4.0. Führt man daher in den Gliedern 4.0. von (4) die weiteren internationalen Näherungswerte

$$\alpha = 0{,}0033670; \qquad \beta = 0{,}0052884 \tag{6b}$$

ein, so resultiert für die maximale Erhebung des Niveausphäroides

$$h_m = \frac{a}{4}(105.10^{-7} - \delta). \tag{8}$$

Jedes Niveausphäroid, für das $\delta = +105.10^{-7}$, fällt bis auf Größen 6.0. mit seinem achsengleichen Rotationsellipsoid zusammen und darf dementsprechend als «Niveauellipsoid» bezeichnet werden. Im allgemeinen ist $U_K$ eine Fläche 22.0., worauf *K. Jung* [2] aufmerksam gemacht hat. Für $\delta = 0$ fällt $U_K$ mit dem *Bruns*schen Niveausphäroid vom zweiten Range zusammen, das eine Fläche 14.0. ist.

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei den rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten. Zunächst erkennt man aus (3) unmittelbar, daß allgemein das Niveausphäroid $U_E$ für $w_{40} = 0$ mit dem entsprechenden Niveausphäroid zweiten Ranges zusammenfällt, woraus sich bereits eine gewisse Analogie zwischen $w_{40}$ und dem Parameter $\delta$ des *Helmert*schen Niveausphäroides ergibt. In der Theorie identifiziert man aber mit Vorteil die lineare Exzentrizität des Koordinatensystems mit der Exzentrizität des Niveausphäroides (3), wodurch das achsengleiche Rotationsellipsoid ein Koordinatenellipsoid ($u = c$) wird, und man findet mit *K. Jung* (Seite 547):

$$v_{20}\, Q_{20}\left(\frac{ic}{e}\right) = \frac{\omega^2}{3}(c^2 + e^2) - \frac{5}{12} w_{40}\, Q_{40}\left(\frac{ic}{e}\right). \tag{9}$$

In diesem Falle nimmt die Gleichung (3) des Niveausphäroides die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} U_E = {} & k^2 E \frac{1}{e} \operatorname{arctg}\left(\frac{e}{u}\right) + \frac{\omega^2}{3}(u^2 + e^2)\left[1 - P_{20}(\cos\vartheta)\right] + \\ & + \frac{Q_{20}\left(\frac{iu}{e}\right)}{Q_{20}\left(\frac{ic}{e}\right)}\left[\frac{\omega^2}{3}(c^2 + e^2) - \frac{5}{12} Q_{40}\left(\frac{ic}{e}\right) w_{40}\right] P_{20}(\cos\vartheta) + \\ & + Q_{40}\left(\frac{iu}{e}\right) w_{40}\, P_{40}(\cos\vartheta) = W_0. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Ist jetzt abermals $w_{40} = 0$, so verschwindet für $u = c$ der Koeffizient der Kugelfunktion $P_{20}$, und das Niveausphäroid fällt streng mit dem Koordinatenellipsoid $u = c$ zusammen, welches damit zum Niveauellipsoid wird.

Bezeichnet man die zweite numerische Exzentrizität des mit dem Niveausphäroid $U_E$ achsengleichen Koordinatenellipsoides $u = c$ mit $\eta$ ($\eta = e/c$), so kann man die Gleichung (9) wegen

$$v_{20}\, Q_{20}\left(\frac{ic}{e}\right) = -\frac{45}{4}\frac{k^2}{e^3}\frac{c^2}{e^2}\left[\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)\operatorname{arctg}\eta - \eta\right]\cdot$$

$$\cdot\left(C - \frac{A + B}{2} - \frac{e^2}{3}E\right),$$

$$Q_{40}\left(\frac{ic}{e}\right) = -\frac{8\,i}{315}\eta^5 + \ldots$$

bei gleichzeitiger Multiplikation mit $e^5/(k^2 E\, c^4)$ in die Form bringen:

$$-\frac{45}{4}\left[\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right)\operatorname{arctg}\eta - \eta\right]\left(\frac{K}{c^2} - \frac{\eta^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\omega^2 c^3}{3\,k^2 E}\eta^5(1 + \eta^2) + \frac{2\,i}{189}\frac{c}{k^2 E}\eta^{10} w_{40}.$$

Die eckige Klammer wird mit der arctg-Reihe in

$$\frac{4}{45}\eta^5\left(1 - \frac{6}{7}\eta^2\right)$$

transformiert, so daß sich schließlich

$$\frac{K}{c^2} = \frac{\eta^2}{3} - \frac{\omega^2 c^3}{3\,k^2 E}\left(1 + \frac{13}{7}\eta^2\right) - \frac{2\,i}{189}\frac{c}{k^2 E}\eta^5 w_{40} \tag{9a}$$

ergibt. Abermals mit *K. Jung* läßt sich dann zeigen, daß die Erhebung des Niveausphäroides über sein achsengleiches Rotationsellipsoid $u = c$ durch die Entwicklung

$$h = \left[\frac{8}{15} + \frac{8}{21}P_{20}(\cos\vartheta) - \frac{32}{35}P_{40}(\cos\vartheta)\right]h_m \tag{10}$$

gegeben ist, wobei der Maximalwert $h_m$ der Erhebung mit $w_{40}$ durch die Relation

$$\eta^5 w_{40} = -i\frac{k^2 E}{c^2}36\,h_m \tag{11}$$

zusammenhängt. Damit läßt sich (9a) noch schreiben:

$$\frac{K}{c^2} = \frac{\eta^2}{3} - \frac{\omega^2 c^3}{3 k^2 E}\left(1 + \frac{13}{7}\eta^2\right) - \frac{8}{21}\frac{h_m}{c}. \tag{9b}$$

Die allgemeine Entwicklung (1) gilt bei Verwendung von Kugelkoordinaten außerhalb einer die ganze Erdmasse einschließenden Kugel und bei Verwendung der rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten außerhalb des die Erdmasse einschließenden Koordinatenellipsoides $u = c_0$. Bei letzterer Entwicklung gibt es überhaupt keine Konvergenzbedenken, wenn nur die lineare Exzentrizität der Koordinatenellipsoide entsprechend der gedachten Massenkonfiguration gewählt wird. Je vollkommener dabei die Erdmasse regularisiert ist, desto geringer wird der Höhenunterschied $(c_0 - c)$ der beiden Koordinatenellipsoide $u = c_0$ und $u = c$ sein. Versteht man nämlich unter der Geoidhöhe die Erhebung des künstlichen Geoides $W = W_0$ über sein zugehöriges Niveausphäroid $U_E = W_0$, so braucht man bloß eine ungefähr um die maximale Geoidhöhe höher gelegene Niveaufläche $W = W_0 - \Delta W$ zu betrachten, die ganz außerhalb des Ellipsoides $u = c_0$ verläuft, welches das künstliche Geoid gerade einschließt. Die Abplattung des zugehörigen Niveausphäroides darf dann völlig mit der des Niveausphäroides $U_E = W_0$ identifiziert werden. Besonders einfach liegen die Verhältnisse, wenn, wie im Falle des Normalsphäroides, die Restfunktion $T$ und damit die Geoidhöhen verschwinden. Dann kommt nur die maximale Erhebung des Niveausphäroides oder eben des künstlichen Geoides über sein achsengleiches Ellipsoid $u = c$ in Frage; $h_m$ ist aber etwa von der Größenordnung 20 m $\sim 3.10^{-6}\, a$, also eine Größe 5.0., zumal ja aus dem internationalen Näherungswert $\eta = 0{,}0823$ folgt: $\eta^5 \sim 38.10^{-7}$. Bei Verwendung der üblichen Kugelkoordinaten liegt aber selbst im Idealfall des Normalsphäroides die die Erdmasse einschließende Kugel am Pol um rund 21 km über der Erdoberfläche. Um daher die Brauchbarkeit der gewöhnlichen Kugelfunktionsentwicklung wenigstens für das *Helmert*sche Niveausphäroid bis an die Erdoberfläche nachzuweisen, müssen die Kräftefunktion (3) und ebenso die zugehörige Formel für die theoretische Schwere bei einer Transformation in Kugelkoordinaten bis auf Größen 6.0. auf die *Helmert*schen Formeln zurückführen. Der Beweis hierfür wurde von *K. Jung* erbracht, es genügt aber ebenso zu zeigen, daß alle in beiden Formelsystemen abgeleiteten physikalischen Größen bis auf kleine Glieder der 6.0. übereinstimmen, was tatsächlich der Fall ist. So hat *Helmert* zum Beispiel für die uns später besonders interessierende Größe $K$, welche die Trägheitsmomente mit der Gesamtmasse $E$ verbindet, den Ausdruck

$$K = \frac{a^2}{3}\left(4\,\varepsilon - 2\,\beta - 4\,\mathfrak{a}^2 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^2 + \frac{6}{7}\,\delta\right) \tag{12}$$

abgeleitet, der wirklich mit der gewünschten Genauigkeit mit (9b) zusammenstimmt.

Bei dieser Sachlage ist es nach wie vor am bequemsten, von den *Helmert*schen Entwicklungen auszugehen und alle physikalisch wichtigen Größen in Funktion der Erdmasse $E$, von Achse und Abplattung des Niveausphäroides und in Funktion des Parameters $\delta$ auszudrücken. Führt man in die Glieder 4.0. wieder die internationalen Näherungswerte ein, so kann das Formelsystem auf folgende einfachste Form gebracht werden [3]:

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= 86524.10^{-7} - \alpha + \frac{2}{7}\delta \\
\beta_4 &= 3\,\delta - 81.10^{-7} \\
\gamma_0 &= \frac{k^2 E}{a^2}\left[1 - 51919.10^{-7} + \alpha + \frac{4}{7}\delta\right] \\
K &= \frac{2\,a^2}{3}\left[\alpha + \frac{1}{7}\delta - 17304.10^{-7}\right] \\
W_0 &= \frac{k^2 E}{a}\left[1 + 11540.10^{-7} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\delta\right] \\
h &= \frac{a}{4}(105.10^{-7} - \delta)\sin^2 2\,\varphi'.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Will man diese Gleichungen auf das Normalsphäroid der Erde anwenden, so liegt wegen der Unkenntnis des Regularisierungsgesetzes die erste Schwierigkeit in der Bestimmung des zugehörigen Parameters $\delta$, der die Abweichungen des Normalsphäroides von seinem achsengleichen Rotationsellipsoid, dem sogenannten mittleren Erdellipsoid, mißt. Mehrere Forscher – *E. Wiechert*, *W. Klußmann*, *G. H. Darwin*, *H. Haalck*, *E. C. Bullard* – haben nun unter verschiedenen hypothetischen Annahmen über die Dichteverteilung im Erdinnern Normalfiguren berechnet, für die sich $\delta$-Werte zwischen $+123.10^{-7}$ und $+132.10^{-7}$ ergeben. Für den Mittelwert $\delta = +128.10^{-7}$ folgt mit der letzten Gleichung (13) $h_m = -3{,}7$ m, das heißt das Normalsphäroid wird vom mittleren Erdellipsoid vollkommen umschlossen, wobei die maximale Abweichung in radialer Richtung bloß 3,7 m beträgt. Es liegt demnach eigentlich recht nahe, zwecks Umgehung aller Hypothesen das Normalsphäroid per definitionem als Niveauellipsoid festzulegen, das heißt $\delta = +105.10^{-7}$ zu fordern. Trotzdem wäre es erwünscht, entweder die Annahme des Niveauellipsoides gleichfalls hypothesenfrei stützen oder den wirklichen Wert von $\delta$ hypothesenfrei ableiten zu können.

Die Lösung des Stokesschen Problems nach *Pizzetti* und *Somigliana* [4] kann hier nicht weiterhelfen. Denn diese Theorie geht von der Voraussetzung aus, daß es für die mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotierende Erde eine Massenanordnung gibt, bei welcher die freie Oberfläche eine Niveaufläche von rotationsellipsoidischer

Gestalt ist. Die allgemeine Lösung des Problems gipfelt nämlich in dem Satz, daß für jeden beliebigen Körper, dessen freie Oberfläche eine Niveaufläche ist, das Schwerefeld dargestellt werden kann aus der um die Fliehkraft vermehrten Anziehung der homogen im Innern verteilten Gesamtmasse und einer über die Oberfläche verteilten Flächenbelegung, die den Effekt der Inhomogenität zum Ausdruck bringt, teils positiv, teils negativ ist und in ihrer Summe verschwindet. Diese Lösung wendet *Somigliana* auf das Niveauellipsoid an. Ausgehend vom Potential des homogenen Ellipsoides werden zwei im Außenraum des Ellipsoides harmonische Funktionen mit den Randwerten 1 und $(x^2 + y^2)$ bestimmt, derart, daß das Gravitationspotential des inhomogenen Niveauellipsoides als eine bestimmte äquivalente Linearkombination dieser beiden Funktionen dargestellt werden kann. Diese fiktive Theorie vermag natürlich keinen Beweis für die physikalische Berechtigung des Niveauellipsoides zu liefern.

Es scheint sich aber die Möglichkeit einer Prüfung der physikalischen Berechtigung des Niveauellipsoides beziehungsweise die Möglichkeit einer exakten, hypothesenfreien Bestimmung des tatsächlichen Normalsphäroides der Erde mit Hilfe der obigen Größe $K$ zu eröffnen. Glücklicherweise ist, wie bereits oben festgestellt wurde, der fundamentale Parameter $\varepsilon$ stark unempfindlich gegen Fehler in $a$ und $\gamma_0$, so daß wir seinen numerischen Wert (7) auch unverändert für das Normalsphäroid beibehalten können, wie wir es in den Gleichungen (13) bereits allgemein für die Niveausphäroide aller gedachten künstlichen Geoide postuliert haben. Der physikalische Inhalt dieses Postulates ist die Konstanz des Drehimpulses der Erde, wodurch der Kreis der möglichen Massenumgruppierungen natürlich stark eingeschränkt wird. Denn nimmt man nach irgendeiner Vorschrift Massenverschiebungen lediglich mit dem Ziel vor, daß das entstehende künstliche Geoid äußere Niveaufläche oder Rand der umgruppierten Erdmasse wird, so wird eine Verlagerung des Erdschwerpunkts und der Hauptträgheitsachsen sowie eine Änderung der Hauptträgheitsmomente und damit im allgemeinen eine Änderung des Drehimpulses eintreten.

Um die Frage zu studieren, welche Änderung die Trägheitsmomente bei der Regularisierung der Erdmasse erfahren, dürfen wir die Erde mit weit ausreichender Genauigkeit als starren Körper betrachten. Die tatsächliche Erde habe die zentralen Hauptträgheitsmomente $A < B < C$; die Achse des größten Trägheitsmomentes $C$ durch den Schwerpunkt ist die Figurenachse. Bezogen auf das mitrotierende Koordinatensystem $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ der Trägheitshauptachsen des Schwerpunkts, ist der in die instantane Drehungsachse fallende Rotationsvektor

$$\mathfrak{w} = w_1 \mathfrak{i} + w_2 \mathfrak{j} + w_3 \mathfrak{k} \tag{14}$$

und der bei Abstraktion vom Drehmoment der äußeren Kräfte konstante Drehimpulsvektor, der die invariable Achse definiert,

$$\mathfrak{G} = A\, w_1 \mathfrak{i} + B\, w_2 \mathfrak{j} + C\, w_3 \mathfrak{k}. \tag{15}$$

Die Absolutbeträge dieser beiden Vektoren sind:

$$G^2_0 = A^2 w^2_1 + B^2 w^2_2 + C^2 w^2_3; \quad \omega^2 = w^2_1 + w^2_2 + w^2_3 \tag{16}$$

und die Eulerschen Rotationsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B)\, w_2\, w_3 &= 0 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C)\, w_3\, w_1 &= 0 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A)\, w_1\, w_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Bekanntlich sind nun die beiden äquatorialen Trägheitsmomente der Erde $A$ und $B$ fast gleich groß. Außerdem sind $w_1$ und $w_2$ so klein gegenüber $w_3$, daß ihr Produkt und ihre Quadrate vernachlässigt werden können. Somit ist $w_3$ fast konstant und fast gleich $\omega$. Für $A = B$ ist streng $w_3 = n = \text{const}$, das heißt, die Erde dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $n$ um die Figurenachse; die Periode $\tau$ dieser Drehung ($n = 2\,\pi/\tau$) ist sehr nahe gleich dem Sterntag $\tau^*$ ($\omega = 2\,\pi/\tau^*$). Jetzt ist auch streng $(w^2_1 + w^2_2) = c^2 = \text{const}$, und die Integration von (17) liefert

$$w_1 = c \cos kt; \quad w_2 = c \sin kt, \tag{18}$$

wobei $k$ das Produkt aus $n$ und der zweiten dynamischen Abplattung bedeutet:

$$k = \frac{2\,\pi}{\tau} \frac{C - A}{A} \approx 0{,}003281\, n. \tag{18a}$$

Die Kurve, die der Endpunkt des Rotationsvektors im mitrotierenden Koordinatensystem, also im Erdkörper, beschreibt, die «Polhodie», ist ein Kreis vom Radius $c$, dessen Ebene senkrecht zur Figurenachse liegt. Die Periode des Umlaufs in diesem Kreis, die «freie Nutation» der starren Erde, ist

$$\tau' = \frac{2\,\pi}{k} = \left(\frac{A}{C - A}\right)\tau \approx 304{,}8 \text{ Sterntage.} \tag{19}$$

Der Öffnungswinkel $\nu$ des Polhodienkegels, dessen Spitze im Erdschwerpunkt liegt, wird

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{c}{n} \approx \nu \approx 0{,}3'' \approx 15.10^{-7}; \quad \nu^2 \approx 2.10^{-12}, \tag{19a}$$

wobei der numerische Betrag den Beobachtungen der Polhöhenschwankung der allerdings elastisch deformierbaren Erde entnommen ist.

Ähnlich ist die «Herpolhodie», die Bahn der Spitze des Rotationsvektors im Raume um die invariable Achse, im Falle $A = B$ ein Kreis

vom Radius $d = kcA/G_0$, dessen Ebene senkrecht zur Impulsachse liegt. Die Periode des Umlaufs in ihr ist

$$\bar{\tau} = \frac{2\,\pi A}{G_0} \tag{20a}$$

oder, da $G_0$ sehr nahe gleich $nC$ ist,

$$\bar{\tau} \approx \frac{2\,\pi}{n} \cdot \frac{A}{C} \approx \frac{A}{C}\,\tau^*, \tag{20b}$$

also etwas kürzer als der Sterntag. Für das Verhältnis der beiden Radien von Polhodie und Herpolhodie ergibt sich aber leicht mit großer Annäherung die erste dynamische Abplattung:

$$\frac{d}{c} = \frac{kA}{G_0} \approx n\left(\frac{C-A}{A}\right)\frac{A}{nC} = \left(\frac{C-A}{C}\right) = \frac{1}{305{,}8} \tag{21}$$

und man erkennt, daß die Bewegung des Rotationsvektors im Raume gänzlich vernachlässigt werden darf: die Instantanachse fällt in jedem Augenblick fast völlig mit der invariablen Achse zusammen.

Nach dieser gedrängten Darstellung der klassischen Resultate für die Rotation des starren Körpers wenden wir uns den Folgerungen für die regularisierte Erde zu. Für das Normalsphäroid werden wir mit gutem Recht Gleichheit der äquatorialen Hauptträgheitsmomente fordern:

$$A' = B' \tag{22}$$

Mit gleichem Recht fordern wir:

$$w'_1 = w'_2 = 0 \text{ und damit } c' = 0, \tag{22a}$$

das heißt, es müssen die Figurenachse und die instantane Drehachse mit der Impulsachse zusammenfallen. Die Konstanz des Drehimpulses liefert dann die einzige Bestimmungsgleichung:

$$G^2_0 = A^2 w_1^2 + B^2 w_2^2 + C^2 w_3^2 = C'^2\,\omega^2 \tag{23}$$

Der erste Teil dieser Gleichung kann leicht transformiert werden:

$$G^2_0 \approx A^2 c^2 + C^2 w_3^2 = A^2 c^2 + C^2(\omega^2 - c^2) =$$

$$= C^2\omega^2\left[1 - \frac{C^2 - A^2}{C^2}\,\frac{c^2}{\omega^2}\right] \approx C^2\omega^2\left[1 - 2\left(\frac{C-A}{C}\right)\frac{c^2}{\omega^2}\right] \approx$$

$$\approx C^2\omega^2\left[1 - 0{,}00655\,\frac{c^2}{\omega^2}\right] \approx C^2\omega^2\,[1 - 13.10^{-15}].$$

Mit sehr großer Annäherung muß also werden:

$$C' = C;\; A' = B' = \tfrac{1}{2}\,(A + B) \tag{24}$$

Mithin muß auch das Verhältnis $K$ der Differenz der Hauptträgheitsmomente zur Erdmasse unverändert bleiben. **(Schluß folgt)**