

# Sur l'application en géodésie des théorèmes de Gauss-Bonnet et de Tchebychef-Darboux relatifs aux projections conformes

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **56 (1958)**

Heft 4

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-214371>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bestimmung der Auswirkung von Änderungen in Material- und Lohnkosten,  
Berechnung der Auswirkung von Änderungen in Steuertarifen,  
Lineare Programmierung, zum Beispiel für Misch- oder Transportprobleme,  
Tarifrechnungen in der Versicherungsmathematik usw.,  
Projektierung von Autobahnen,  
Bestimmung von Zufallszahlen,  
Bestimmung des optimalen Einsatzes des Rollmaterials in Eisenbahnbetrieben,  
Auswertung von Marktanalysen,  
Automatische Terminierung,  
Vorausbestimmungen der Maschinenbelastung.

Viele dieser Arbeiten werden erleichtert durch das Vorhandensein von Bibliotheksprogrammen, die zum Beispiel von den Herstellerfirmen der Maschinen oder von wissenschaftlichen Organisationen gesammelt und Interessenten zur Verfügung gestellt werden. Neben den immer wiederkehrenden mathematischen Standardproblemen umfassen solche Sammlungen auch Programme für sehr spezielle technische Anwendungen.

Für die Verbreitung des elektronischen Rechnens spielen die Rechenzentren eine entscheidende Rolle. Solche Organisationen bestehen bereits in vielen Ländern, sei es als Hochschulinstitute oder als Unternehmen der Privatwirtschaft. Außer leistungsfähigen Maschinen und reichhaltigen Programmbibliotheken verfügen sie über Mitarbeiter, die im elektronischen Rechnen speziell ausgebildet sind. Sie geben Interessenten die Möglichkeit, Rechenarbeiten programmieren zu lassen oder selbst hergestellte Programme durchzurechnen, ohne die mit der Anschaffung solcher Maschinen verbundenen notwendigen Investitionen machen zu müssen.

## **Sur l'application en géodésie des théorèmes de Gauss-Bonnet et de Tchebychef-Darboux relatifs aux projections conformes**

*Par A. Ansermet*

Le premier de ces théorèmes fut déjà évoqué succinctement dans ces colonnes et il a paru opportun de rechercher l'intérêt qu'il peut présenter dans son application; quant au second de ces théorèmes, il n'est pas sans corrélation avec le premier et un cas concret révélera le rôle qu'il peut jouer en pratique. Pour ne pas donner trop d'ampleur à ce texte seules seront considérées les projections à variables dissociées et celles à axe neutre (pour la Suisse l'axe  $x = 0$ ). Ces dernières sont les plus répandues, mais il faut reconnaître, qu'au point de vue purement mathématique, elles constituent une solution un peu simpliste du problème posé; d'autres éléments jouent en effet un rôle dans le choix d'un système de coordonnées

conformes. D'autre part si le territoire en cause est étendu le fractionnement en zones juxtaposées ne peut guère être évité.

### *La formule de Gauss-Bonnet*

Cette formule, on le sait, a trait à l'invariance de l'altération totale de courbure d'un contour fermé en projection conforme. Dans le cas général, il faut compter aussi avec la présence de points singuliers, mais il en sera fait abstraction ici.

Dans la littérature mathématique, on rencontre la solution classique tirée des écrits de C. F. Gauss et Ossian Bonnet ([3] p. 73). L'intégrale curviligne exprimant la variation totale de courbure est convertie en une intégrale double. Plus tard, en géodésie, le problème fut repris en partant de la formule de Schols ([1] p. 243-260); enfin, assez récemment, une solution très générale fut développée par R. Nevanlinna (voir [2]).

En coordonnées planes conformes  $(x, y)$  on a:

$$(1) \quad m - 1 = \frac{1}{4R^2} \left\{ (1+n)x^2 + (1-n)y^2 + \dots \right\}$$

où  $m$  est le rapport de similitude ou coefficient de déformation linéaire,  $R$  le rayon de la sphère de référence,  $n$  un paramètre définissant le mode de projection ( $0 \leq |n| \leq 1$ ); pour la courbure de la transformée plane d'un côté du réseau géodésique, on obtient:

$$(2) \quad (dz : ds) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial m}{\partial x} \sin z - \frac{\partial m}{\partial y} \cos z \right) \cong \frac{1}{2R^2} [(1+n)x \sin z - (1-n)y \cos z]$$

où:  $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ;  $\operatorname{tg} z = dy : dx$

Mettons en évidence les termes en  $n$  en intégrant:

$$(3) \quad \int dz \cong \frac{1}{2R^2} \left\{ \dots + n \int (xdy + ydx) \right\} = \\ = \frac{1}{2R^2} \left\{ \dots + n \int d(xy) \right\}$$

Dans un contour fermé tel que le triangle  $P_1 P_2 P_3 P_1$ , les termes en  $n$  s'éliminent ce que l'on devait présumer.

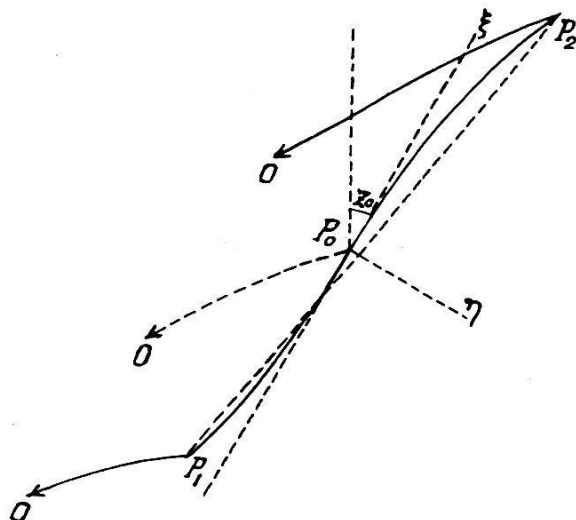
### *Cas où la transformée plane présente un point d'inflexion*

Ce cas, assez peu traité dans la littérature géodésique, constitue précisément une application intéressante comme on le verra; il se présente lorsque la transformée plane d'un côté du réseau coupe l'axe neutre de la projection ( $|n| = 1$ ). Le calcul est alors tellement simple qu'il paraît superflu de s'y arrêter.

Pour une valeur quelconque du paramètre  $n$  il y a, en chaque point  $(x, y)$ , une direction de courbure nulle; à l'origine 0 des coordonnées toutes les transformées ont une courbure nulle. De l'équation (2) on déduit que pour

$$(4) \quad \operatorname{tg} z_0 = \frac{1-n}{1+n} \cdot \frac{y_0}{x_0}$$

les valeurs  $x_0, y_0, z_0$  correspondent à:  $(dz : ds) = 0$



Considérons le point  $P_0(x_0, y_0)$  comme origine d'un nouveau système de coordonnées  $(\xi, \eta)$ , l'axe des  $\xi$  étant tangent en  $P_0$  à la transformée; pour un point  $(x, y)$  de celle-ci on a

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos z_0 - \eta \sin z_0 \\ y &= y_0 + \xi \sin z_0 + \eta \cos z_0 \end{aligned}$$

$$(5) \quad (dz : ds) \cong \frac{1}{2R^2} (2n\xi \sin z_0 \cos z_0) = \frac{1}{2R^2} n\xi \sin 2z_0$$

en négligeant les  $\eta$  ce qui est en général possible. En désignant par  $K$  un facteur, fonction de  $n$  et  $z_0$ :

$$(6) \quad (dz : ds) \cong \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = K\xi$$

$$(7) \quad \int dz \cong \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{K}{2}\xi^2 \quad \text{et} \quad (8) \quad \eta = \frac{K}{6}\xi^3$$

la formule (7) donne la variation de courbure avec assez de précision, en radians.

En pratique le problème se présente de façon inverse; on connaît deux sommets du réseau  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$ , et l'on constate que la

courbure de la transformée change de signe en passant de  $P_1$  à  $P_2$  mais le calcul est facile. Le théorème de Gauss-Bonnet permet de contrôler les résultats ou même d'éviter le calcul direct de la variation de courbure entre  $P_1$  et  $P_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Application. } x_0 &= + 50 \text{ km} & y_0 &= + 50\sqrt{3} \text{ km} & n &= + 0.5 \\ y_0 : x_0 &= \sqrt{3} & \text{tg } z_0 &= 1 : \sqrt{3} = \text{tg } 30^\circ & & [\text{d'après (4)}] \\ \text{tg } z_0 \cdot \text{tg } z_m &= - 1; & \text{tg } z_m &= - \sqrt{3} \end{aligned}$$

donne la direction de courbure maxima  $z_m$  en  $P_0$ ; dans le cas particulier celle-ci coïncide avec la direction  $z_i$  à courbure indépendante du paramètre  $n$  en  $P_0$ , car il y a contact en  $P_0$  entre 2 courbes:

$$\begin{aligned} xy &= \text{const. et } m = \text{const.} \\ nx_0 \sin z_i + ny_0 \cos z_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donne: } \text{tg } z_i = - (y_0 : x_0) = - \sqrt{3}; z_i = z_m$$

$$\text{soient: } \left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 - 17,32 \text{ km}; & y_1 &= y_0 - 10 \text{ km} \\ x_2 &= x_0 + 26,00 \text{ km}; & y_2 &= y_0 + 15 \text{ km} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{valeurs} \\ \text{arrondies} \end{array}$$

Pour le calcul du facteur  $K$ , on peut indifféremment utiliser  $z_0$  ou le  $z$  de la corde  $P_1P_2$

$$\begin{array}{lll} P_1P_0 = 20 \text{ km} & P_0P_2 = 30 \text{ km} & \text{Côté auxiliaire:} \\ & & OP_0 = 100 \text{ km} \end{array}$$

De ces éléments on déduit, en faisant intervenir l'origine 0, la

*Variation totale de courbure des contours*

	$OP_1P_0O:$		$OP_2P_0O:$	
	$n = 0$	$n = 0,5$	$n = 0$	$n = 0,5$
côté $OP_1$ :	0",000	-3",175	côté $OP_0$ :	0",000
côté $P_1P_0$ :	+2",535	+0",220	côté $P_0P_2$ :	+3",800
côté $P_0O$ :	0",000	+5",490	côté $P_2O$ :	0",000
Totaux :	+2",535	+2",535	Totaux :	+3",800

$$(\text{secondes sexag.}) \quad \rho''/R^2 = 5'',07/1000 \text{ km}^2$$

Pour le côté  $P_1P_2$ , la variation de courbure est:  $+0'',220 - 0'',495 = -0'',275$ , résultat qui sera aussi obtenu autrement. Si  $P_0P_1 = P_0P_2$ , la variation de courbure pour  $P_1P_2$  est nulle. Les contours fermés choisis ici contiennent le point 0, car le calcul des transformées issues de 0 est particulièrement simple. Quand il n'y a pas de point d'inflexion, il suffit d'ajouter les valeurs absolues des réductions à la corde (Sehnenreduktionen) pour obtenir la variation de courbure pour le côté (valeur absolue).

La formule (7) fournit un contrôle utile:

$$0'',220 : 0'',495 = (P_0P_1)^2 : (P_0P_2)^2 = \xi_1^2 : \xi_2^2 = 4/9$$

En pratique, les éléments initiaux sont donc les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$ ; on obtiendra, d'après la formule (2):

$$(dz : ds)_1 = \frac{1}{2R^2} (-8,668) = K\xi_1 \quad (\text{courbure en } P_1)$$

$$(dz : ds)_2 = \frac{1}{2R^2} (+13,002) = K\xi_2 \quad (\text{courbure en } P_2)$$

$$\xi_1 : \xi_2 = -\frac{2}{3}$$

*Contour  $OP_1P_2O$ , variation totale de courbure:*

	$n = 0$	$n = 0,5$
côté $OP_1$ :	0",000	-3",175
côté $P_1P_2$ :	+6",335	-0",275
côté $P_2O$ :	0",000	+9",785
Totaux :	+6",335	+6",335

Le théorème de Gauss-Bonnet est particulièrement utile pour déterminer la valeur  $-0",275$ . On en déduit les valeurs  $+0",220$  et  $-0",495$  dont on connaît le quotient, puis les ordonnées  $\eta_1 = -7,1$  mm et  $\eta_2 = +24,0$  mm en  $P_1$  et  $P_2$  ainsi que l'angle compris entre la corde  $P_1P_2$  et la tangente à la transformée en  $P_0$  ( $0",128$ ); ce point est à 5,4 mm de la corde, mais à l'intérieur du triangle  $OP_1P_2$ . Tous les éléments de la transformée  $P_1P_0P_2$  sont ainsi déterminés. Le théorème de Gauss-Bonnet a aidé à calculer ou tout au moins à contrôler ces éléments; le rôle de ce théorème est ainsi mis en évidence.

On aurait aussi pu considérer d'autres contours fermés et confronter d'autres valeurs que  $n = 0$  et  $n = 0,5$ . Dans le cas le plus général (variables non dissociées), il y a deux paramètres lesquels sont éliminés dans l'équation (3) pour un contour fermé.

Pour rendre le calcul plus facile aux praticiens, on pourrait dresser une table à double entrée ou mieux un nomogramme donnant les valeurs  $n$ ,  $z_0$  et  $y_0/x_0$  qui répondent à l'équation (4). C'est le choix du paramètre qui est un problème complexe, et ceci nous amène à consacrer de nouveau quelques lignes au

#### *Théorème de Tchebychef-Darboux*

L'élément introduit ici est la valeur moyenne du carré du gradient de  $\text{Log } e^m$  qui doit permettre de comparer divers systèmes de coordonnées conformes d'un même territoire; désignons-le par  $(MG^2)$  et faisons une application à un cas concret pour mieux juger, sur la base de chiffres, ce que l'on peut attendre de cet élément d'appréciation. A cet effet, on fait varier non seulement le paramètre  $n$ , mais aussi la position et l'orientation des axes de coordonnées. Le territoire choisi est celui de la Suisse, et le

nombre des solutions étudiées sera restreint. Les formules initiales sont connues ([4] p. 230)

$$\frac{\partial \text{Log } m}{\partial x} = \frac{1}{2 R^2} (1 + n) x + \dots; \quad \frac{\partial \text{Log } m}{\partial y} = \frac{1}{2 R^2} (1 - n) y + \dots$$

A un facteur près la valeur ( $MG^2$ ) est donnée par l'expression:

$$\iint [(1 + n)^2 x^2 + (1 - n)^2 y^2] dx dy$$

dont le calcul est facile à l'aide d'un planimètre à moments. Sans planimètre, on opère graphiquement en plaçant un papier calque millimétré sur la carte du territoire. De faibles sinuosités de la frontière peuvent être égalisées, compensées. Il est avantageux de convertir l'intégrale double en intégrale curviligne au moyen de la formule attribuée tantôt à Gauss, tantôt à Green-Riemann:

$$\iint \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c (Pdy - Qdx)$$

Lorsque les variables sont dissociées le calcul est particulièrement simple; il fut effectué sur la carte de la Suisse au 1 : 1 000 000 en fractionnant convenablement le contour à intégrer.

Pour la comparaison entre diverses projections conformes l'unité admise pour ( $MG^2$ ) fut celle obtenue pour le système suisse de coordonnées

$$(1) \quad (MG^2)_B = 1,00 \quad (n = + 1, \text{ origine Berne})$$

*Variantes:* origine au Brunig, axe des  $x$  coïncidant avec la projection du méridien en ce lieu

$$(2) \quad (MG^2)_{Br} = 0.92 \quad (n = + 1)$$

$$(3) \quad (MG^2)_{Br} = 0.80 \quad (n = 0)$$

Dans cette solution (3) l'orientation des axes de coordonnées est indifférente.

$$(4) \quad (MG^2)_{Br} = 0.66 \quad (n = + 0.44) \text{ c'est un extréma}$$

Dans le voisinage de l'extréma ( $+0,4 < n < + 0,5$ ) la valeur de ( $MG^2$ ) varie très peu; quand  $n$  varie entre 0 et + 1, et pour des axes de coordonnées donnés, on obtient une parabole à axe vertical pour la représentation graphique ( $MG^2$ ) =  $f(n)$ .

En modifiant un peu l'orientation des axes ou en admettant un système à variables dissociées, il serait possible d'abaisser encore un peu l'extréma 0,66 ci-dessus. C'est le but du théorème.

Sans attribuer une importance excessive à cette notion qu'est la valeur moyenne du carré du gradient de  $\text{Log } e m$  pour le territoire considéré on peut admettre qu'il y a là un élément d'appréciation susceptible de jouer un rôle en géodésie. Il a paru opportun de traduire une fois en chiffres cette valeur ( $MG^2$ ) en lui conférant ainsi un caractère moins abstrait.



### *Littérature:*

- [1] *Baeschlin C. F.*, Lehrbuch der Geodäsie (Zürich, Orell Füßli).
- [2] *Nevanlinna R.*, Über den Gauß-Bonnetschen Satz (Festschrift zur Feier der Wissenschaften in Göttingen, 1951).
- [3] *Vessiot*, Géométrie supérieure (Paris 1919).
- [4] *Ansermet A.*, Le calcul semi-graphique de la déformation de réseaux (Schweiz. Zeitschr. f. Verm., 1956, N° 8).

## **La Belgique connaît les mêmes difficultés que la Suisse**

Depuis plusieurs dizaines d'années, on a pu assister au développement continu de la zone d'habitations (d'une densité sans cesse accrue) qui s'étend autour de cet ensemble de villes et communes dénommé agglomération bruxelloise.

Chaque jour, par vagues successives, la capitale absorbe, puis refoule son quantum d'ouvriers, employés, fonctionnaires et commerçants, lesquels par les divers modes de locomotion regagnent, la journée finie, d'abord les appartements et buildings érigés sur la périphérie même, ensuite les villas des quartiers résidentiels, puis les cités et complexes d'habitation à bon marché, enfin la banlieue et la province.

Les régions maraîchères, les campagnes paisibles, les sites champêtres, lieux de délassements et de promenades de nos ancêtres, ont été pourvus de voirie, lotis et bâtis à une cadence sans cesse accélérée, généralement sans autres considérations que celle de politique locale et de profits immobiliers.

Une bonne volonté illimitée, des réalisations souvent heureuses, une recherche de confort et de présentation, se sont heurtées à une anarchie quasi totale, à un esprit d'indépendance tel que les moindres réglementations d'ordre général, les disciplines qu'impose l'intérêt commun n'ont suscité que les sentiments de rébellion et ont, autant que possible, été contournées et rendues inopérantes. Seuls quelques organismes ont réussi à imposer un style, une unité à leurs créations. Mais rien de valable n'a été édifié, et l'on s'acharne encore à rogner, à abattre, à détruire des œuvres, des plantations témoins d'un passé plus humain.

Bruxelles-Ville, financièrement malade, est désarmée; les communes qui l'entourent, par une survivance tenace de l'esprit de clocher, constituent autant d'unités autonomes, agissant chacune à sa façon, suivant des idées et des moyens propres.

Une solution d'urgence paraît s'imposer qui serait le blocage total et sans délai de toutes les zones de verdure situées dans un rayon suffisamment étendu autour de la capitale, plus spécialement dans la région industrielle; ces zones comprenant les terres de cultures agricoles, horticoles et maraîchères, les sites naturels, les grandes et moyennes propriétés susceptibles de rachat et d'aménagement. Il existe encore beaucoup de grandes propriétés; certaines, occupées par des communautés religieuses,