

# Die Bestimmung der Lotkrümmung auf dem TP Rosalionkapelle

Autor(en): **Ledersteger, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **56 (1958)**

Heft 10

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-214399>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- [2] *Baeschlin*, Ableitung einer Formel für den Richtungsfehler eines Theodoliten unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe. Schweiz. Zeitschr. f. Vermessungswesen und Kulturtechnik, 1932, S. 274–278, und 1933, S. 2–5.
- [3] *Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.
- [4] *Jordan-Eggert*, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III/2, Stuttgart 1941.
- [5] Über den Azimutunterschied konjugierter Normalschnitte auf dem Ellipsoid. Acta Technica Akad. Scient. Hung., Bd. VI (1953), S. 189–199.

## Die Bestimmung der Lotkrümmung auf dem TP Rosalienkapelle

Von *K. Ledersteger*, Wien

### 1. Die theoretischen Grundlagen

Ohne Zweifel muß das Endziel jeglicher Großraumvermessung das naturtreue Netz sein, worunter wir eine Pizzetti-Projektion auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid verstehen wollen. Diese Projektion ist bekanntlich eine Doppelprojektion. Die Oberflächenpunkte werden zuerst mittels ihrer gekrümmten Lotlinie auf das Geoid und von diesem mittels der geraden Ellipsoidnormalen auf das Erdellipsoid projiziert. Der erste Teil der Pizzetti-Projektion besteht also in einer Reduktion aller astronomischen und geodätischen Messungen wegen Lotkrümmung, während der zweite Teil dieser Projektion durch die astronomisch-geodätische Netzausgleichung erzielt wird. Hierin liegt auch einwandfrei die Bevorzugung der Pizzetti-Projektion vor der älteren Helmert-Projektion begründet. Denn nur im Falle der Pizzetti-Projektion ist das Laplacesche Binom theoretisch streng Null, das heißt, nur in diesem Falle treten in der Laplaceschen Gleichung, die zur wichtigsten Bedingung für die Netzausgleichung wird, keine Glieder 2.0. auf, die bei einem Großnetz nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Die erste Aufgabe, die uns somit bei der geplanten Durchführung der Pizzetti-Projektion entgegentritt, sind die Lotkrümmungsreduktionen. Schon vor drei Jahren habe ich daher versucht, das Problem der Lotkrümmungsreduktionen theoretisch zu lösen<sup>1</sup>. Die Grundaufgabe besteht dabei in der Reduktion der astronomisch beobachteten Breiten und Längen. Für je zwei Punkte,  $P_i$  und  $P_k$ , derselben Niveaufläche kann die Differenz der Meereshöhen ( $H_k - H_i$ ) auf die Differenz der Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien ( $g_k - g_i$ ) zurückgeführt werden. Denn aus der konstanten Potentialdifferenz zwischen unserer Niveaufläche und dem Geoid

$$\bar{g}_k H_k = \bar{g}_i H_i \quad (1)$$

<sup>1</sup> *K. Ledersteger*, «Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung», Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1955.

folgt sofort

$$H_k - H_i = \frac{\bar{g}_i - \bar{g}_k}{\bar{g}_k} H_i \approx - \frac{\bar{g}_k - \bar{g}_i}{\gamma_{45}} H_i \quad (2)$$

Andererseits aber ist diese Meereshöhendifferenz auch ein Maß für die Konvergenz der Niveaulächen oder für den Unterschied der Lotrichtungen im Oberflächen- und im Geoidpunkt. Sind also  $\varphi'$  und  $\lambda'$  die astronomisch beobachteten Bestimmungsstücke der Lotrichtung in  $\bar{P}_i$ ,  $\bar{\varphi}'$  und  $\bar{\lambda}'$  die entsprechenden Werte für die Lotrichtung im zugehörigen Geoidpunkt  $\bar{P}_i$ , so haben die Reduktionen

$$d\varphi' = \bar{\varphi}' - \varphi'; \quad d\lambda' = \bar{\lambda}' - \lambda' \quad (3)$$

der astronomischen Beobachtungsdaten auf das Geoid im Azimut  $\alpha$  die Komponente

$$\varepsilon = d\varphi' \cos \alpha + d\lambda' \cos \varphi' \sin \alpha \quad (4)$$

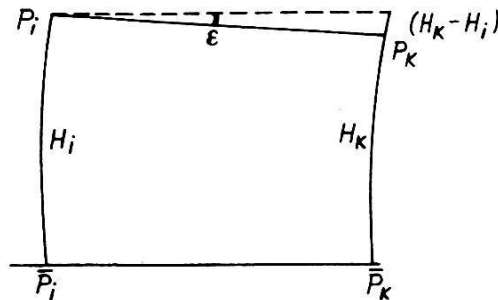


Abb. 1

und man ersieht aus Abbildung 1 unmittelbar, daß die Differenz der Meereshöhen oder der Lotlinienlängen durch

$$\Delta H = H_k - H_i = + \varepsilon \Delta s \quad (5)$$

gegeben ist. Zusammen mit (2) erhält man den einfachen Ausdruck

$$\varepsilon'' = - \frac{\rho''}{\gamma_{45}} (\bar{g}_k - \bar{g}_i) \frac{H_i}{\Delta s}$$

oder wenn man alle Schwerewerte in mgal ausdrückt und für die normale Schwerkraft im Meeresniveau unter  $45^\circ$  Breite den internationalen Wert  $\gamma_{45} = 980\,629$  mgal einführt,

$$\varepsilon'' = - 0,21034 (\bar{g}_k - \bar{g}_i) \frac{H_i}{\Delta s} \quad (6)$$

Hierin ist natürlich  $\Delta s$  die Entfernung der benachbarten Punkte  $P_i$  und  $P_k$ . Mithin ist in jedem beliebigen Azimut die Komponente der

Richtungsreduktion eine Funktion des horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes der Schwere in der Lotlinie von  $P_i$ .

Weil aber im allgemeinen die benachbarten Punkte einen Höhenunterschied aufweisen, erfordert die Ableitung des horizontalen Gradienten eine besondere Betrachtung, die hier wiederholt werden darf, um die Rückverweisung auf die oben zitierte Arbeit umgehen zu können. Ist  $\Delta n$  der positive oder negative Höhenunterschied von  $P_k$  gegenüber  $P_i$  und teilt man – abweichend von dem üblichen Vorgang – dem in der Niveaufläche von  $P_i$  liegenden Punkt  $Q_k$  seiner Lotlinie die Höhe  $H_k$  zu, wie sie in Gleichung (2) gebraucht wird, so hat man je nach dem Vorzeichen von  $\Delta n$  die beiden Fälle der Abbildungen 2 und 3 zu unterscheiden.

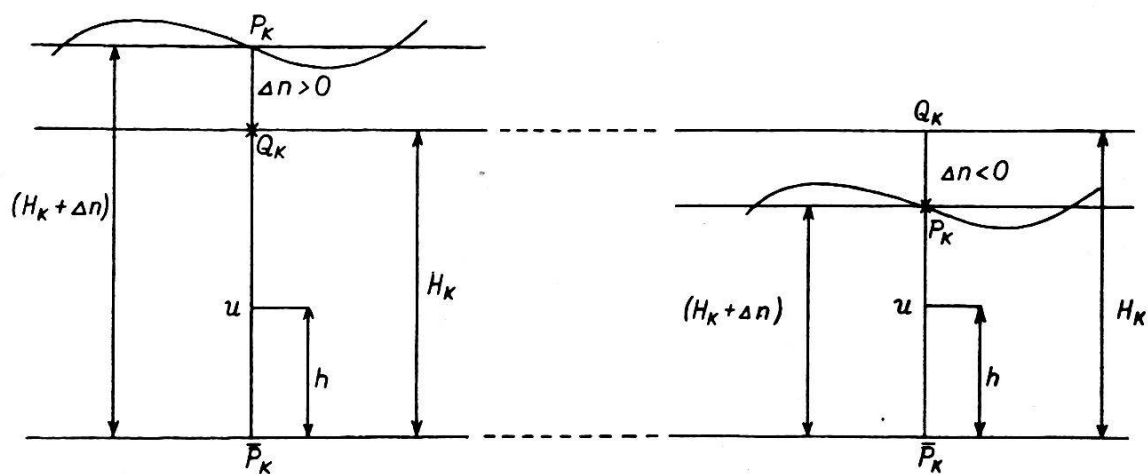


Abb. 2

Abb. 3

Bezeichnet man die topographische Korrektur, das heißt die negative Anziehung der Überschuss- und Defizitmassen gegenüber einer durch  $P_k$  gelegten horizontalen Ebene im Oberflächenpunkt selbst mit  $T_P$  und im laufenden Punkt  $U$  seiner Lotlinie in der Meereshöhe  $h$  mit  $T_U$  und beachtet, daß die Anziehung der unendlichen Bouguerschen Platte der Dicke  $h$  auf einen über ihr liegenden Aufpunkt unter Verwendung der Gravitationskonstante  $k^2 = 66,7$  CGS und der Sialdichte  $\vartheta = 2,6725$

$$2 \pi k^2 \vartheta h_m = 0,1120 h_m \text{ mgal} \quad (7)$$

ist, so findet man zusammen mit der Freiluftreduktion  $0,3086 h_m$  mgal im Falle eines positiven  $\Delta n$

$$\begin{aligned} g_U + T_U &= g_P + T_P + (0,3086 - 0,2240) (H_k + \Delta n - h) = \\ &= g_P + T_P + 0,0846 (H_k + \Delta n - h). \end{aligned} \quad (8)$$

Dies ist natürlich die Schwerereduktion von Poincaré-Prey und  $g_U$  die «wahre» Schwerebeschleunigung in  $U$ , wenn man von der hypothetischen Annahme einer konstanten Krustendichte 2,6725 oder von der geänder-

ten Wirkung der innerkrustalen Massenunregelmäßigkeiten absieht. Durch Integration von (8) ergibt sich

$$\int_{\bar{P}_k}^{Q_k} g_U dh = \bar{g}_k H_k = [g_P + T_P + 0,0846 (H_k + \Delta n)] \cdot H_k - \\ - 0,0846 \frac{H_k^2}{2} - \int_{\bar{P}_k}^{Q_k} T_U dh$$

oder

$$\bar{g}_k = g_P + T_P + 0,0423 H_k + 0,0846 \Delta n - \bar{T}_k \quad (9)$$

mit

$$\bar{T}_k = \frac{1}{H_k} \int_{\bar{P}_k}^{Q_k} T_U dh \quad (10)$$

Etwas schwieriger liegen die Verhältnisse im Falle eines negativen Höhenunterschiedes  $\Delta n$ , weil jetzt die Anziehung der Bouguerschen Platte nicht mehr durchwegs linear mit  $h$  verläuft, sondern zwischen  $P_k$  und  $Q_k$  konstant ist. Während von  $P_k$  bis zur Oberfläche in  $P_k$  wieder die Gleichung (8) gilt, hat man oberhalb

$$g_U + T_U = g_P + T_P + 0,3086 (H_k + \Delta n - h), \quad (8a)$$

und es wird

$$\bar{g}_k H_k = \int_{\bar{P}_k}^{P_k} g_U dh + \int_{P_k}^{Q_k} g_U dh = (g_P + T_P - T_k) H_k + 0,0846 (H_k + \Delta n)^2 - \\ - 0,0423 (H_k + \Delta n)^2 - 0,3086 (H_k + \Delta n) \Delta n - 0,1543 [H_k^2 - (H_k + \Delta n)^2]$$

Nach leichten Umformungen folgt hieraus

$$\bar{g}_k = g_P + T_P - T_k + 0,0423 H_k + 0,0846 \Delta n - 0,1120 \frac{(\Delta n)^2}{H} \quad (9a)$$

Das letzte Glied des zweiten Falles kann bei gleichem  $\Delta n$  nur in kleinen Meereshöhen nennenswerte Beträge erreichen und darf praktisch immer vernachlässigt werden, wenn

$$(\Delta n)^2 < 0,05 H \quad (11)$$

Wegen der beiden Gleichungen (9) und der analogen Gleichung für  $P_i$

$$g_i = g_i + T_P - T_i + 0,0423 H_i \quad (12)$$

folgt für die Differenz der Durchschnittswerte

$$(\bar{g}_k - \bar{g}_i) = (g_k - g_i) + \Delta T_{ki} + 0,0846 \Delta n - \left[ 0,1120 \frac{(\Delta n)^2}{H} \right], \quad (13)$$

wenn man für die Differenz der topographischen Korrekturen abkürzend setzt

$$\Delta T_{ki} = (T_k - T_i)_P - (\bar{T}_k - \bar{T}_i) \quad (14)$$

Das nur im Falle eines negativen  $\Delta n$  zu berücksichtigende quadratische Glied ist eingeklammert.

Wir diskutieren zunächst die Formel (13):

1. Ist in der näheren Umgebung der Zentralstation  $P_i$  das Gelände ideal eben und horizontal, so daß es weder Höhenunterschiede noch topographische Reduktionen gibt, so ist der Gradient des Durchschnittswertes der Schwere in der Lotlinie identisch mit dem an der Erdoberfläche direkt beobachtbaren Schweregradienten. Dabei braucht die horizontale Umgebung keineswegs allzu ausgedehnt sein, weil die Meßpunkte  $P_k$  in einer Entfernung von 20 bis 30 m von  $P_i$  gewählt werden können und daher die Schweredifferenzen von entfernteren Bodenerhebungen kaum mehr beeinflußt sind. In dem angenommenen Idealfall ist also der horizontale Gradient des Durchschnittswertes der Schwere gänzlich unabhängig von der Meereshöhe der Station. Nicht nur für die Potentialdifferenz zwischen der Niveauläche von  $P_i$  und dem Geoid, sondern für jede geringere Potentialdifferenz, das heißt wenn man fiktiv eine der Oberfläche näher gelegene Niveauläche mit dem Geoid vertauscht, ergibt sich derselbe horizontale Gradient, und die Lotlinie ist dann ein Kreisbogen. Dieses Resultat gilt übrigens nicht nur für eine streng homogene Erdkruste, sondern auch für den wirklichkeitsnäheren Fall, daß eine Dichtezunahme nach innen bei horizontaler Schichtung vorliegt. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, daß jede zusätzliche Bouguersche Platte die Schwerewerte  $g_U$  in den Punkten benachbarter Lotlinien bis auf die äußerst geringe Wirkung der Erdkrümmung und des Nichtparallelismus der Niveaulächen ganz gleich beeinflußt, so daß dieser Einfluß in den Differenzen  $(\bar{g}_k - \bar{g}_i)$  fast streng ausfällt. Andererseits steht gerade im Hinblick auf diese Einschränkungen unser Ergebnis nicht im Widerspruch mit der theoretischen Erkenntnis, daß sich die Krümmung der Lotlinien an jeder Unstetigkeitsstelle der Dichte sprunghaft ändert. Es darf also die der Ableitung von (13) zugrunde gelegte Voraussetzung der konstanten Dichte 2,6725 dahin erweitert werden, daß diese Dichte nur in der oberflächennahen Schicht, das heißt nur innerhalb des Bereiches der  $\Delta n$ , anzunehmen ist, darunter aber in Funktion von  $h$  zunehmen kann.

2. In der oberflächennahen Schicht wird aber die Dichte zumeist kleiner sein als der Mittelwert 2,6725, wodurch sich in (13) die Koeffizienten der beiden letzten Glieder wie auch die topographischen Korrekturen  $\Delta T_{ki}$  ändern. Für die richtige Berechnung der Differenz der Durchschnittswerte der Schwere und damit der Lotkrümmungsreduktion ist somit eine möglichst exakte Kenntnis der Oberflächendichte im Bereiche der  $\Delta n$  erforderlich.

3. Existieren Höhenunterschiede  $\Delta n$ , so ist der horizontale Gradient des Durchschnittswertes der Schwere sowohl durch die topographische Korrektur  $\Delta T_{ki}$  wie auch durch das quadratische Glied eine Funktion der Meereshöhe. Die Lotlinie ist eben im allgemeinen eine Raumkurve. Auch liegt der Formel (6) noch keinerlei Voraussetzung über den Verlauf der Lotlinie zugrunde, und erst für die Ableitung von (13) war die sub (1) präziser formulierte hypothetische Annahme über den Dichteverlauf notwendig, welche für die Lotlinie in zweiter Näherung einen Kreisbogen ergab, falls keine Höhenunterschiede vorhanden sind. Man kann aber auch im jetzigen allgemeinen Falle, natürlich wieder nur unter den gerade formulierten Annahmen über die Dichte, die Gleichung (13) für jede beliebige Potentialdifferenz, das heißt für jede andere innere Niveaulinie, aufstellen und so vielleicht den Verlauf der Lotlinie in dritter Näherung studieren, wenn man nur die Differenz der topographischen Reduktionen jedesmal mit der nötigen Sicherheit erfassen kann. Dabei wäre auch zu beachten, daß die topographische Korrektur  $T_U$  in der Lotlinie nicht linear verläuft<sup>2</sup>. Jedenfalls ist aber eine Aussage über den Verlauf der Lotlinie teils wegen des beschränkten Einflusses des quadratischen Gliedes, teils wegen der innerkrustalen Massenunregelmäßigkeiten nur für die oberflächennahen Schichten möglich.

Bei der praktischen Durchführung einer Lotkrümmungsbestimmung auf einem trigonometrischen Punkt hat man ferner zu bedenken, daß sich die Lotkrümmung innerhalb eines größeren Umkreises nur sehr wenig ändern wird. Man wird also in der Nähe des TP ein möglichst ebenes horizontales oder schwach geneigtes Gelände auswählen und um den Zentralpunkt  $P_i$  annähernd einen Kreis legen, der möglichst äquidistant mit einer Anzahl von Schwerestationen  $P_k$  belegt wird. Dividiert man jede Schweredifferenz (13) durch die zugehörige Distanz  $\Delta s_{ki}$ , so erhält man den horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes  $g$  für  $ds = 1$  m, und (6) nimmt die Gestalt an:

$$\varepsilon'' = -0,21034 \frac{d\bar{g}}{ds} H_m \quad (15)$$

und speziell für die Azimute  $0^\circ$  und  $90^\circ$

$$(d\varphi'')'' = -0,21034 \frac{d\bar{g}}{dx} H_m; \quad (d\lambda' \cos \varphi'')'' = -0,21034 \frac{dg}{dy} H_m \quad (16)$$

<sup>2</sup> K. Ledersteger, «Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen», vorgelegt der Commission internationale des nivellements européens, Réunion de Florence, 22 au 28 mai 1955.

Um die Lotkrümmungsreduktionen sofort für den TP und nicht für das gewählte Zentrum  $P_i$  zu erhalten, ist in (16) für  $H_m$  die in Metern ausgedrückte Meereshöhe des TP einzuführen. Der mittlere Fehler des horizontalen Gradienten geht mit  $H$  multipliziert in die beiden Komponenten der Lotkrümmungsreduktion ein. Einem Fehler von 0,0005 mgal im Gradienten entspricht bei einer Meereshöhe 3000 m bereits ein Fehler von 0,3" in der Lotkrümmung. Fordert man also diese Genauigkeit, so müssen nicht nur die einzelnen Schweredifferenzen ( $g_k - g_i$ ) mit einem sehr guten Gravimeter auf etwa 0,01 mgal genau gemessen werden; sondern eventuell auch die topographischen Korrekturen  $T_P$  auf Grund einer tachymetrischen Geländeaufnahme in einem Umkreis, dessen Radius mindestens fünfmal so groß ist wie der Radius des Meßkreises, nach der üblichen Sektorenmethode berechnet werden. Diese Aufnahme könnte ebenso wie die notwendige Einmessung der Gravimeterpunkte gleichzeitig mit der Schweremessung von einem eigenen Meßtrupp durchgeführt werden. Selbstverständlich wäre es aber von großer praktischer Bedeutung, wenn die zeitraubende Berechnung der topographischen Korrekturen erspart werden könnte. Das vorliegende Beispiel hat daher auch die Frage zu klären, ob der Einfluß der Topographie rein rechnerisch im Ausgleichswege hinreichend genau eliminiert werden kann.

## 2. Die Messungsergebnisse

Diese Frage sowie das Problem der exakten Dichtebestimmung war für die erste praktische Erprobung des Verfahrens richtungweisend. Es mußte eine Station mit etwas schwierigeren topographischen Verhältnissen ausgewählt werden, wenn die Brauchbarkeit der Methode erwiesen werden sollte. Die Wahl fiel auf den TP 1.0. des österreichischen Fundamentalnetzes Rosalienkapelle. Es ist dies die höchste Erhebung des Rosaliengebirges ( $H = 746$  m) südwestlich von Mattersburg im Burgenland, eine nach allen Seiten verschieden steil abfallende bewaldete Kuppe, die eine Kapelle trägt, deren Grundriß annähernd ein Quadrat von 25 m Seitenlänge ist. Schematisch könnte das Gelände als ein schiefer Kegelstumpf aufgefaßt werden, mit dem Steilabfall im Norden. Der Pfeiler steht ganz nahe der Westecke der Kapelle. Für die Lotkrümmungsbestimmung am geeignetsten schien das sich nach Südosten erstreckende sanfter geneigte und freiere Vorfeld. Um aber verschiedene Versuchsrechnungen zu ermöglichen und vor allem den Einfluß der Topographie besser studieren zu können, wurde an Stelle des ursprünglich geplanten Meßkreises ein Oval um die Kapelle gelegt, in dem der Hauptpunkt  $Z_1$  stark exzentrisch im Vorfeld liegt. Daneben aber wurde fast 18 m nordwestlich von  $Z_1$  ein nahezu 3 m höher gelegenes zweites Zentrum  $Z_2$  gewählt. Die Schweremessungen konnten mit einem von der Österreichischen Mineralölverwaltungs-AG angekauften und freundlicherweise zur Verfügung gestellten Askania-Gravimeter der Type GS 9 am 29. und 30. Juli 1957 durchgeführt werden. Als Beobachter fungierte Herr Ing. K. Finsch von den Askania-Werken in Berlin-Friedenau, der



die Messungen mit größter Sachkenntnis und äußerster Gewissenhaftigkeit durchführte, wofür ihm auch an dieser Stelle herzlichst gedankt sei.

Wie aus Abbildung 4 ersichtlich ist, wurde der exzentrisch um die Kapelle gelegte Polygonzug mit 21 Schwerestationen besetzt. Die Messungen wurden studienhalber an beiden Tagen nach gänzlich verschiedenen Gesichtspunkten durchgeführt. Während am 29. Juli als eigentlicher Hauptpunkt der PP 4 diente und der Polygonzug von dort aus im

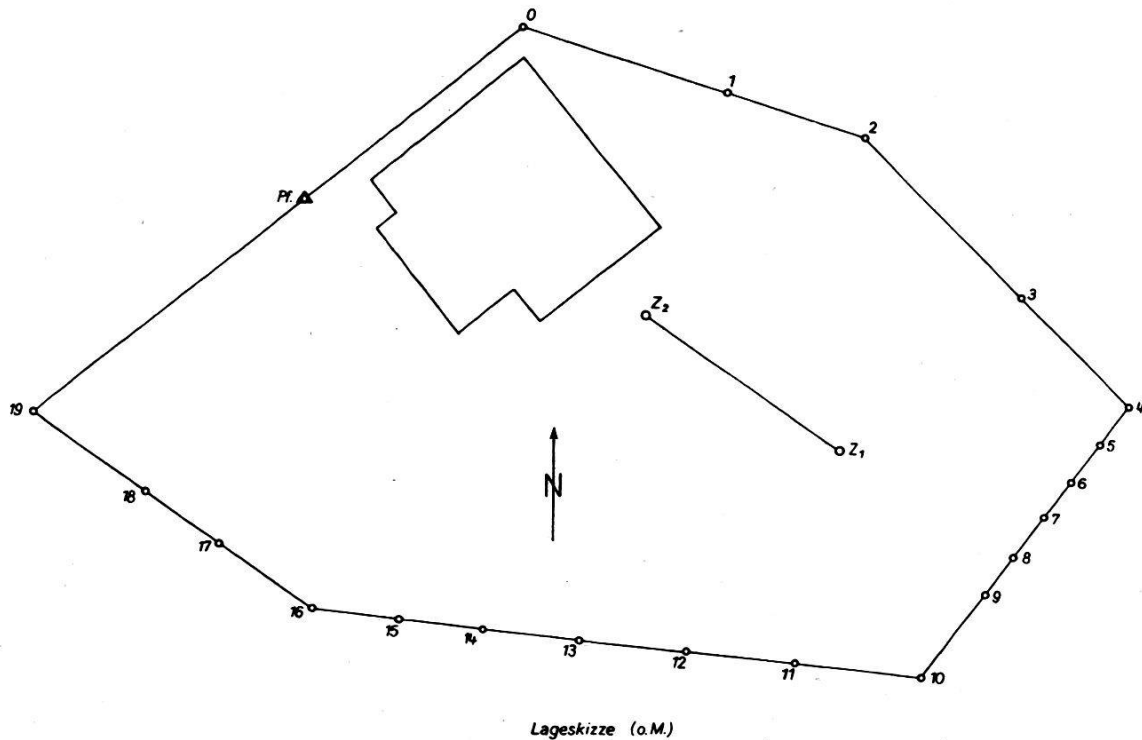


Abb. 4

Gegenzeigersinne bis zum PP 15 im doppelten Steppverfahren durchgemessen wurde, wobei das Zentrum  $Z_1$  nur dreimal angeschlossen wurde, wurde am 30. Juli zwecks besserer Elimination des Ganges und des Gezeiteneinflusses und im Hinblick auf die eigentlich gebrauchten Schweredifferenzen gegenüber den Zentren das Reststück im Uhrzeigersinne nach dem Schema:  $4 - Z_1 - 4 - 5 - 6 - Z_1 - 4 - 5 - 6 - Z_1 - 6 - 7 - 8 - Z_1 - 6 \dots$  durchgemessen und abschließend die Schweredifferenz zwischen den beiden Zentren  $Z_1$  und  $Z_2$  im vierfachen Hin- und Rückgang möglichst genau bestimmt.

(Fortsetzung folgt.)