Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 57 (1959)

Heft: 6

Artikel: Sur le calcul de réseaux hyperdéterminés à mesures linéaires

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-215233

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 · LVII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Juni 1959

Sur le calcul de réseaux hyperdéterminés à mesures linéaires

Par A. Ansermet

Grâce à l'initiative heureuse prise par la Rédaction de notre Revue, les lecteurs sont maintenant passablement orientés sur certaines méthodes modernes de mesures linéaires, tout au moins en ce qui concerne le problème au point de vue instrumental. Il y a lieu maintenant d'examiner succinctement dans quelles conditions on peut tirer le meilleur parti de ces mesures pour en obtenir un rendement qui justifie l'application de ces méthodes dans la pratique courante.

Considérations préliminaires

Comme en triangulation les canevas résultant de mesures linéaires sont susceptibles de revêtir diverses formes:

1° des chaînes non fermées, rattachées ou non à des points ou côtés déjà connus, à mailles triangulaires (chaînes simples ou doubles), à mailles quadrangulaires;
2° des chaînes fermées (couronnes) dont la structure peut varier;
3° des réseaux à mailles triangulaires ou quadrangulaires;
4° des réseaux secondaires (Füllnetze) destinés à remplir le vide à l'intérieur de chaînes fermées (figure 1).

Cette discrimination n'a du reste rien d'absolu; elle met en évidence la complexité des problèmes à résoudre et la diversité des solutions.

Dans certains réseaux à grandes mailles l'étendue du territoire nécessite le calcul sur une surface. Les développements ci-après portant surtout sur des calculs d'erreurs on se bornera à considérer des schémas contenus dans un plan; la corrélation entre la surface et le plan n'est pas malaisée à établir. Le schéma le plus simple est constitué par une chaîne à mailles triangulaires, simple, non fermée, non rattachée. Cette solution fut étudiée déjà sous tous ses aspects; elle ne comporte pas de compen-

sation d'où sa grande simplicité mais aussi ses désavantages qui sont manifestes.

Un élément assez critique, dans de nombreux cas, est constitué par le poids à attribuer aux quantités mesurées. Dans les systèmes à grandes mailles notamment l'inverse du poids revêt la forme d'un binôme dont seul un des termes dépend de la longueur à mesurer. On a cherché, par des étalonnages judicieusement conçus, à attribuer une valeur standard pour le terme indépendant de la distance. D'autre part, la structure du réseau joue aussi un rôle; si on peut réaliser l'égalité, ou à peu près, des longueurs des côtés il en est de même des poids respectifs. Or, en aérotélémétrie on a plus de liberté dans ce domaine puisque la visibilité entre sommets n'est pas de rigueur. Il est possible d'atténuer des écarts de poids en fixant, pour chaque côté, un nombre de mesures tenant compte de la longueur du côté. Cette question sera encore évoquée ci-après en développant les modes de calcul.

Le problème des rattachements

Des éléments de rattachement sont, à certains égards, plus nécessaires pour les réseaux télémétrés qu'en triangulation. Il peut s'agir de points déterminés astronomiquement; des circonstances de caractère économique jouent aussi un rôle dans ce cas.

Considérons le petit réseau de la figure 2 comportant 12 points nouveaux; on désire déterminer les 24 coordonnées et leurs erreurs moyennes quadratiques M_x et M_y. Or, 21 coordonnées seulement sont inconnues et le calculateur peut être mis dans l'embarras pour faire un choix; un certain arbitraire est inévitable. L'existence de points de rattachement tire le calculateur de son embarras; il pourra déterminer 24 erreurs M_x, M_y au lieu de 21.

De tels points permettent en outre de déceler, en cours de compensation déjà, des erreurs éventuelles d'échelle qu'il n'est souvent pas possible de mettre en évidence même si le degré d'hyperdétermination du réseau est élevé.

Azimuts de rattachement. De nombreux praticiens préconisent la mesure de tels azimuts en nombre suffisant. Deux éventualités sont ici à envisager:

1° Les azimuts mesurés sont considérés comme exempts d'erreurs; en d'autres termes le poids à leur attribuer est infiniment grand. Chaque azimut donne lieu à une relation entre des coordonnées.

2° Les azimuts participent à la compensation; ils constituent des éléments surabondants à ajouter aux autres. Il n'est pas toujours facile de leur attribuer un poids qui soit bien en corrélation avec les poids des mesures linéaires.

Dans chaque cas il faut rechercher laquelle de ces deux éventualités est à prendre en considération; il y a là une question assez délicate qui a fait l'objet de controverses.

Une complication se présente en outre dans les réseaux à grandes mailles; comme on ne voit en général pas d'un sommet à l'autre ([1], p. 109–115), il faut avoir recours à un côté et à un azimut auxiliaires. Il en résulte un surcroît de calcul, et le praticien doit veiller à ce que la précision ne soit pas diminuée lors du rattachement du côté auxiliaire au réseau.

Particularités des calculs de réseaux à mesures linéaires

En général on n'a pas recours à la méthode de la variation des coordonnées mais on établit des équations de condition. Le calcul des discordances est parfois laborieux. Comme le problème porte ici sur des schémas il y a intérêt à introduire une solution provisoire; le raisonnement en est facilité.

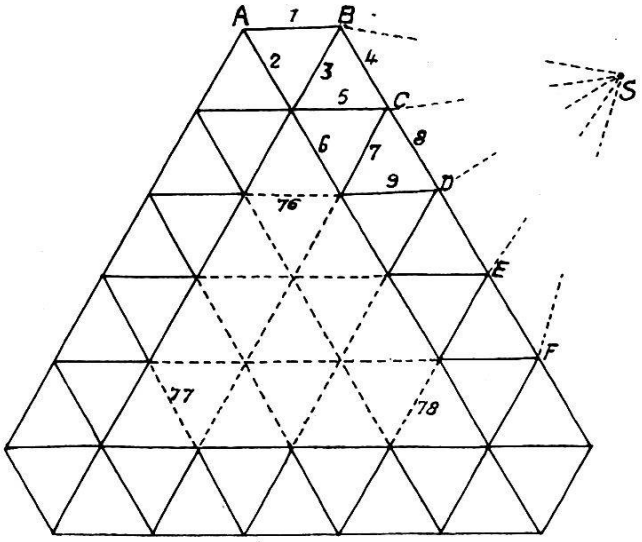

Figure 1

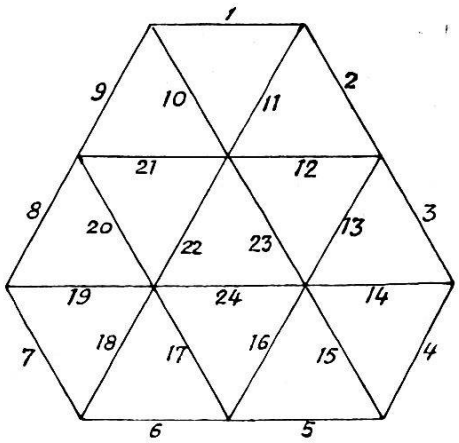

Figure 2

Désignons, figures 1 et 2, les éléments mesurés par

$$L_1 \cong L_2 \cong L_3 \cong \ldots \cong L_n$$

($n = 60$ ou 78, figure 1 et $n = 24$, figure 2)

La valeur $n = 60$ se rapporte à la chaîne (traits pleins). Il n'est pas possible, comme il y a hyperdétermination, d'établir avec ces éléments un schéma géométrique rigoureux. De faibles écarts de fermeture, chevauchements ou bâillements, sont inévitables. Par contre une valeur provisoire

$$L_0 = L_1 + f_1 = L_2 + f_2 = \ldots = L_n + f_n \text{ (par exemple: } [f] = 0)$$

fournit une figure géométrique à triangles rigoureusement équilatéraux. En déformant très légèrement cette figure, on obtient le schéma *compensé*, de côtés

$$L_1 + v_1, L_2 + v_2 \ldots L_n + v_n$$

Les côtés ont subi des accroissements: $(v_1 - f_1)$, $(v_2 - f_2)$ ... $(v_n - f_n)$

Une fois pour toutes, si le réseau est à grandes mailles, il faut substituer aux $v_1, v_2 \ldots v_n$ les binômes $(v_1 + t)$, $(v_2 + t) \ldots (v_n + t)$, cet élément t exprimant une erreur ou plutôt une correction indépendante de la longueur mesurée (de nature instrumentale) ([2], p. 43). Dans les réseaux des figures 1 et 2 cette inconnue t s'élimine, mais seulement dans les compensations; elle est en fait camouflée. Le calcul des déformations est aisé; considérons le sommet B où aboutissent les côtés L_1, L_3, L_4 et désignons par D_{1-3} et D_{3-4} les déformations angulaires respectives, exprimées en mesure circulaire ([1], p. 8):

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{3} \cdot L_0 \cdot D_{1-3} = 2\,(v_2 - f_2) - (v_1 - f_1) - (v_3 - f_3) \\ \sqrt{3} \cdot L_0 \cdot D_{3-4} = 2\,(v_5 - f_5) - (v_3 - f_3) - (v_4 - f_4) \end{cases}$$

Il était donc inutile d'introduire l'élément t.

Des relations analogues donnent les déformations angulaires en C, D, E ... en fonction des v, car les f sont connus. On en déduit les déformations dz qui en résultent pour les azimuts z des côtés du polygone fermé extérieur ($ABCDE \ldots A$).

Une première condition s'énonce comme suit: *la somme des déformations angulaires de ce polygone fermé est nulle* quand on passe de la figure provisoire à la chaîne compensée. L'équation y relative est facile à établir et contient tous les v.

Pour les deux autres conditions on a:

$$(2) \quad \begin{cases} [(L + f) \sin z] = [(L + v) \sin (z + dz)] = 0 \\ [(L + f) \cos z] = [(L + v) \cos (z + dz)] = 0 \end{cases}$$

En négligeant le terme en $v \cdot dz$ et en posant L_0 pour $L_1\, L_2\, L_3 \ldots L_n$ on obtient:

$$(3) \quad [(v - f) \sin z] + L_0\, [\cos z \cdot dz] = 0$$

En fait L_0 est éliminé, car dans les dz tous les termes contiennent L_0 au dénominateur (voir équation (1)); et une relation analogue pour la seconde équation (2).

Le calcul, nullement difficile, est assez laborieux, car les dz contiennent en général de nombreuses valeurs v. Il n'y a pas ici à faire la discrimination entre des valeurs linéaires et angulaires comme en polygonation courante. Le degré d'hyperdétermination est faible.

Lorsque la chaîne fermée est constituée par des mailles quadrangulaires avec deux diagonales L_5, L_6 par maille il y a davantage de conditions et l'élément t n'est pas éliminé. S'il s'agit toujours d'un schéma, on pourra appliquer la formule de Ptolémée, en tous cas à la figure provisoire

$$L_5\, L_6 \cong L_1\, L_3 + L_2\, L_4 \text{ et } (L_5 + v_5 + t)\,(L_6 + v_6 + t) \cong \ldots$$

pour le coefficient de t on a, en négligeant les termes en vt et t^2

$$(L_5 + L_6) - (L_1 + L_3) - (L_2 + L_4)$$

valeur jamais nulle. En outre, on ne peut plus admettre que les poids sont égaux. La chaîne trilatérée fermée (couronne) présente un intérêt pratique; elle permet d'embrasser un vaste territoire, mais donne lieu à beaucoup moins de conditions qu'une chaîne triangulée ([3], p. 19).

Cas d'un réseau (figure 2)

Considérons un petit réseau schématique de 24 côtés

$$L_1 \cong L_2 \cong L_3 \ldots \cong L_{24} \text{ (valeur provisoire } L_0)$$

et des poids:

$$p_1 = p_2 = p_3 \ldots = p_{24} = 1.$$

Il y a 3 systèmes centraux dont le calcul est facile en raisonnant comme précédemment; dans chaque système central il y a 6 angles au centre qui se déforment quand on compense, la somme de ces déformations étant nulle.

Pour le système central de côtés périphériques L_1, $L_2 \ldots L_9$, on a:

$$(4)\left\{\begin{array}{l} \sqrt{3}\cdot L_0\cdot D_{10-11} = 2(v_1-f_1)-(v_{10}-f_{10})-(v_{11}-f_{11}) \\ \sqrt{3}\cdot L_0\cdot D_{11-12} = 2(v_2-f_2)-(v_{11}-f_{11})-(v_{12}-f_{12}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt{3}\cdot L_0\cdot D_{21-10} = 2(v_9-f_9)-(v_{21}-f_{21})-(v_{10}-f_{10}) \end{array}\right\} \begin{array}{l}(D_{10-11}+ \\ +D_{11-12}\ldots \\ \ldots+D_{21-10} \\ =0)\end{array}$$

et de même pour les deux autres systèmes centraux, d'où la matrice des coefficients des équations de condition: $[av] + w_1 = 0$, $[bv] + w_2 = 0 \ldots$

$$1:P_i = 1 - \frac{a^2{}_i}{[aa]} - \frac{[b_i\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[c_i\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} = 1 - A_1 - B_1 - C_1$$

les P étant les poids amplifiés par la compensation ([4], p. 159).

	a	b	c	A_1	B_1	C_1	$1:P_i$
1	+ 1			0.083	0.0055	0.011	0.900
2	+ 1			0.083	0.0055	0.011	0.900
3			+ 1	–	–	0.100	0.900
4			+ 1	–	–	0.100	0.900
5			+ 1	–	–	0.100	0.900
6		+ 1		–	0.089	0.011	0.900
7		+ 1		–	0.089	0.011	0.900
8		+ 1		–	0.089	0.011	0.900
9	+ 1			0.083	0.0055	0.011	0.900
10	— 1			0.083	0.0055	0.011	0.900
11	— 1			0.083	0.0055	0.011	0.900
12	— 1		+ 1	0.083	0.0055	0.0445	0.867
13	+ 1		— 1	0.083	0.0055	0.0445	0.867
14			— 1	–	–	0.100	0.900

	a	b	c	A_1	B_1	C_1	$1:P_i$
15			— 1	–	–	0.100	0.900
16		+ 1	— 1	–	0.089	0.0445	0.867
17		— 1	+ 1	–	0.089	0.0445	0.867
18		— 1		–	0.089	0.011	0.900
19		— 1		–	0.089	0.011	0.900
20	+ 1	— 1		0.083	0.050	–	0.867
21	— 1	+ 1		0.083	0.050	–	0.867
22	— 1	— 1	+ 1	0.083	0.139	0.011	0.767
23	— 1	+ 1	— 1	0.083	0.050	0.100	0.767
24	+ 1	— 1	— 1	0.083	0.050	0.100	0.767

$[aa] = [bb] = [cc] = 12$
$[ab] = [ac] = [bc] = -3$
$[bb \cdot 1] = [cc \cdot 1] = 11.25$
$[cc \cdot 2] = 10$

$[1:P] = 21.00$ (21 inconnues)

Comme on le présumait le calcul de ce bloc de 12 points révèle que les poids primitifs ne sont amplifiés que faiblement; il est loisible d'augmenter le nombre de mesures. Les longueurs de certains côtés peuvent devenir fort inégales, et le problème des poids à attribuer se pose.

Réseaux complémentaires. La chaîne fermée de la figure 1 étant calculée le besoin peut se faire sentir, ultérieurement, de remplir le vide à l'intérieur de la chaîne. Les points nouveaux intercalés, au nombre de trois seulement ici, pourront être compensés par la méthode de la variation des coordonnées. Les côtés 76, 77, 78 ne participent pas à cette compensation; une solution aurait consisté à les incorporer à la chaîne fermée, procurant ainsi à cette dernière trois systèmes centraux susceptibles d'améliorer les conditions de détermination de la chaîne.

Dans la pratique, on se trouvera en présence de deux solutions qui toutes deux présentent des avantages et inconvénients:

1° La chaîne fermée est mesurée et calculée puis, ultérieurement et éventuellement, le réseau interne de remplissage (Füllnetz) est intercalé.
2° Le réseau complet de la figure 1 (78 côtés) est mesuré et calculé en un seul bloc, comprenant 33 sommets.

Cette seconde solution donne lieu à 15 systèmes centraux dont le calcul est simple. D'autres éléments peuvent jouer un rôle quant au choix à faire.

Contrôle des poids. Il est manifeste que ce contrôle est plus malaisé pour les mesures linéaires que pour les observations angulaires. Le moyen le plus simple consiste à utiliser des bases connues avec précision en vue de procéder à des étalonnages; ces bases seront de préférence de longueurs fort différentes ce qui permet de mieux apprécier le rôle de la

distance dans le calcul du poids. De telles bases ne sont pas toujours à la disposition des praticiens. Si l'on émet diverses hypothèses en ce qui concerne les poids, on obtient chaque fois un système de valeurs v_1, v_2, $v_3 \ldots v_n$ différent. Il faut choisir et, à cet effet, on cherchera à établir une relation entre ces valeurs, relation qui doit être satisfaite. Une suggestion a été formulée ([6], p. 8) tendant à mesurer des angles avec une précision suffisante pour qu'ils puissent être considérés comme exempts d'erreurs. Une relation aussi simple que possible devrait exister entre les éléments linéaires et angulaires. Une solution parmi plusieurs consisterait à stationner en un point S quelconque (figure 1) avec un théodolite de haute précision et à mesurer angulairement les points A, B, $C \ldots$ Ces visées SA, SB, $\ldots$ SF donnent lieu à une correspondance projective avec la ponctuelle A, B, $\ldots$ F

$$ABCD \ldots\ldots \overline{\wedge}\ S(ABC \ldots F)$$

Or, on sait que cette correspondance projective se présente algébriquement sous une forme fort simple; c'est le rapport anharmonique r ou double rapport. La valeur obtenue en fonction des mesures angulaires sera considérée comme exempte d'erreurs. Le choix des poids en sera facilité en calculant les discordances sur r obtenu de deux façons. D'autres solutions peuvent aussi être envisagées.

Ce choix joue un rôle pour le calcul de l'erreur moyenne quadratique m relative à l'unité de poids ([4], p. 88).

$$m^2 \cong [pvv] : (n - u)$$

A titre d'exemple considérons une maille carrée à deux diagonales prise isolément:

$$L_5 L_6 \cong L_1 L_3 + L_2 L_4 \quad (n - u = 1)$$

$$L_5 + f_5 = L_6 + f_6 = L_0 \cdot \sqrt{2}$$

$$L_1 + f_1 = L_2 + f_2 = L_3 + f_3 = L_4 + f_4 = L_0$$

et pour les poids: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$

Emettons trois hypothèses:

	$p_5 = p_6 = 1$	(I)
(p inverse des L)	$p_5 = p_6 = 1 : \sqrt{2}$	(II)
(p inverse du carré des L)	$p_5 = p_6 = \frac{1}{2}$	(III)

La détermination de m est un peu précaire quand $(n - u)$ est faible; si w est la discordance on trouve:

$$m = \pm\, 0.35\, w \text{ (I)} \quad m = \pm\, 0.32\, w \text{ (II)} \quad \text{et } m = \pm\, 0.29\, w \text{ (III)}$$

Il n'y a pas de gros écarts entre ces valeurs de m.

En conclusion, on voit que le calcul de réseaux à mesures linéaires pose des problèmes assez complexes surtout pour ceux à grandes mailles (Hiran).

Bibliographie

[1] *Arnold K.*, Fehlertheorie der streckenmessenden Triangulation. Berlin 1952.

[2] *Baeschlin F.*, Sphärische Berechnung von Streckennetzen. Comm. géodésique 1951.

[3] *Eika Tor*, Untersuchungen über Triangulationsnetze. Potsdam 1924.

[4] *Großmann W.*, Ausgleichungsrechnung. Springer, Berlin 1953.

[5] *Wolf H.*, Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1958.

[6] *Ansermet A.*, Compensation de mesures linéaires. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie 1955.

Genauigkeit der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen

Dipl.-Ing. Christo Tschapanow, Haskovo (Bulgarien)

In der vorliegenden Arbeit werden Formeln für die Genauigkeit der Ausgleichung nach der bedingten Methode mit Unbekannten, wobei zwischen den Unbekannten noch Bedingungsgleichungen bestehen, hergeleitet. Die Ausgleichung wurde gleichzeitig von Prof. Tarczy-Hornoch [1] und von Prof. H. Wolf [2] behandelt.

Der mittlere Quadratfehler (m) stellt bekanntlich das Genauigkeitskriterium dar und wird angewandt:

1. als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, das heißt einer Beobachtung mit dem Gewicht $= 1$;
2. als mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Werte unbekannter und beobachteter Größen;
3. als mittlerer Fehler des ausgeglichenen Wertes einer beobachteten Größe;
4. als mittlerer Fehler des ausgeglichenen Wertes einer notwendigen Unbekannten.

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit

Die allgemeine Formel für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit lautet bekanntlich:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \tag{1}$$

Hier bedeuten p die Gewichte, v die wahrscheinlichsten Verbesserungen und n die Anzahl der beobachteten Größen, ferner u die Anzahl der notwendigen Unbekannten und r die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen beziehungsweise der Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen.