

# Sur l'application de la théorie de l'équivalence lors du calcul d'ellipsoïdes d'erreur

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **58 (1960)**

Heft 3

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-216086>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 3 • LVIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. März 1960

## Sur l'application de la théorie de l'équivalence lors du calcul d'ellipsoïdes d'erreur

par A. Ansermet

### Généralités

Une application bien connue de cette théorie porte sur la détermination de l'ellipse d'erreur en un point  $(x, y)$ . L'extension de ce problème au cas, non plus d'un réseau plan, mais spatial, est naturellement moins simple. Une telle généralisation mérite cependant qu'on lui consacre quelques lignes.

Un point de coordonnées  $(x, y, z)$  a été déterminé par la méthode usuelle de la variation des coordonnées en partant de la relation

$$-f_i + v_i = a_i \cdot dx + b_i \cdot dy + c_i \cdot dz \quad (\text{poids } p_i) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (1)$$

$f_i$  étant le terme absolu; les trois inconnues étant des corrections à apporter à des valeurs provisoires des coordonnées. Admettons qu'il s'agisse de mesures linéaires; les coefficients sont alors des cosinus directeurs ( $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ )

$$[pav] = [pbv] = [pcv] = 0 \quad (2)$$

Dans le voisinage immédiat du point compensé, considéré comme origine nouvelle d'un système de coordonnées obtenu par simple translation du système primitif on a:

$$v'_i = a_i(dx) + b_i(dy) + c_i(dz) + v \quad ([pvv'] = [pvv]) \quad (3)$$

ces trois inconnues étant de nouveaux accroissements; on a: ([6] p. 354)

$$[pv'v'] = [pvv] + (QT) \quad (4)$$

$(QT)$  étant une forme quadratique ternaire (6 termes) en  $(dx)$ ,  $(dy)$  et  $(dz)$ . C'est une façon d'aborder la théorie de l'ellipsoïde d'erreur que l'on pourrait appeler ponctuelle par opposition à la forme tangentielle où la

surface podaire de l'ellipsoïde d'erreur par rapport à son centre joue un grand rôle.

Rappelons que l'échelle de la figure dépend de l'élément:

$$m^2 \cong [p_{vv}] : (n - u) \quad (u \text{ inconnues}) \quad (5)$$

mais on pourrait considérer une autre erreur que la quadratique moyenne ([1] p. 225/26). En général, on posera par la suite  $m^2 = 1$ , sans oublier que ce 1 a une dimension, ici le carré d'une longueur.

De plus les poids primitifs  $p_i$  sont amplifiés grâce à la compensation et prennent des valeurs  $P_i$  telles que le premier ou le second membre de (1) les donne:

$$[p_i : P_i]_1^n = u \quad (6)$$

en effet, d'après l'équation (1) on a, comme poids de  $(-f_i + v_i)$ :

$$\frac{1}{P_i} = a^2_i Q_{11} + b^2_i Q_{22} + c^2_i Q_{33} + 2a_i b_i Q_{12} + 2a_i c_i Q_{13} + 2b_i c_i Q_{23} \quad (7)$$

Les  $Q$  étant les coefficients de poids, quadratiques ou non, tandis que les indices 1, 2, 3 se rapportent aux trois inconnues.

La démonstration est immédiate à partir de l'équation (7):

$$\begin{aligned} [p_i : P_i]_1^n &= [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} \\ &\quad + [pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + [pbc]Q_{23} \\ &\quad + [pac]Q_{31} + [pbc]Q_{32} + [pcc]Q_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 = u \end{aligned}$$

Si, en plus, les inconnues sont liées par des équations, il faut en tenir compte en diminuant le  $u$  d'une unité pour chaque équation.

*Invariants de la forme quadratique ternaire.* Ces éléments jouent ici un tel rôle qu'il convient de rappeler leurs propriétés; ils permettent d'éliminer les termes dits rectangles. En d'autres termes la forme quadratique ternaire ([5] p. 164):

$$(QT) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

devient, grâce à une transformation de coordonnées (substitution linéaire):

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2$$

et la corrélation s'exprime ([2] p. 400) par les invariants:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = A + B + C$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}) - (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2) \\ &= AB + BC + CA \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - (a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2) + 2 \cdot a_{12}a_{13}a_{23} = ABC$$

ou aussi ([5] p. 167):

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \quad (a_{ik} = a_{ki}) \quad (9)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ces  $I_1, I_2, I_3$  sont les coefficients d'une équation de 3<sup>e</sup> degré dont les racines fournissent les quantités  $A, B, C$  équation dite parfois en  $S$ .

*Equations du 3<sup>e</sup> degré.* Pour l'établir considérons parallèlement les formes ponctuelle et tangentielle. Pour la première l'élément initial est l'équation:

$$(QT) = \text{constante} \quad (\text{en général } m^2 = [QT]) \quad (10)$$

où les variables sont les  $(dx), (dy), (dz)$ , les six coefficients étant

$$[paa], [pab] \dots \dots [pcc].$$

La forme tangentielle implique l'établissement de l'équation de la surface podaire par rapport au centre, laquelle ne contient pas de terme absolu, car ce centre est un point isolé

$$T_4 - m^2(QT)_1 = 0 \quad ([3] \text{ p. 267}) \quad (11)$$

les six coefficients de  $(QT)_1$  étant les  $Q_{11}, Q_{12} \dots \dots Q_{33}$  et  $T_4$  un groupe de termes de 4<sup>e</sup> ordre indépendant de l'orientation des axes de coordonnées; si l'on considère un plan passant par le point compensé et normal à la direction  $(a_i, b_i, c_i)$ , mesurée linéairement, ce plan subit une translation exprimée par le quotient:

$$\pm m : \sqrt{P_i} \quad ([1] \text{ p. 207}) \quad (12)$$

Ce  $P_i$  étant donné par l'équation (7); on obtient ainsi une paire de plans parallèles tangents à l'ellipsoïde. Les traces des perpendiculaires abaissées du centre sur cette paire de plans ont pour coordonnées dans le système  $(dx), (dy), (dz)$

$$\pm a_i \cdot m : \sqrt{P_i}, \quad \pm b_i \cdot m : \sqrt{P_i}; \quad \pm c_i \cdot m : \sqrt{P_i} \quad (13)$$

Ce sont deux points diamétralement opposés de la surface podaire. Les  $a_i, b_i, c_i$  sont toujours des cosinus directeurs.

On aura donc, en désignant par  $d\rho_i$  le rayon vecteur de la surface podaire

$$(d\rho_i)^2 = (dx)^2_i + (dy)^2_i + (dz)^2_i = \frac{m^2}{P_i} = m^2(a^2_i Q_{11} + b^2_i Q_{22} + \dots \dots) \quad (14)$$

en tenant compte de la relation (7)

et, au lieu de considérer une direction déterminée d'indice  $i$ , mais une quelconque:

$$(d\rho)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = m^2(\cos^2 \alpha Q_{11} + \cos^2 \beta Q_{22} + \dots \dots + 2 \cos \beta \cos \gamma Q_{23}) \quad (15)$$

en introduisant les cosinus directeurs; par suite:

$$(d\rho)^4 = m^2 \left\{ Q_{11}(dx)^2 + Q_{22}(dy)^2 + \dots + 2 Q_{23}(dy)(dz) \right\} \quad (16)$$

La corrélation entre les formes ponctuelle et tangentielle est aisée à discerner.

*Extrêmas.* Il faut chercher la valeur extrême pour  $(d\rho)$ ; or il y a deux solutions qui aboutissent toutes deux à un système de trois équations linéaires et homogènes donc en fait au même résultat. Les variables sont les cosinus directeurs ([3] p. 269–70; [5] p. 166) dans un cas et les coordonnées  $(dx)$ ,  $(dy)$ ,  $(dz)$  dans l'autre. En outre l'équation liant les variables est la relation connue entre les cosinus directeurs pour la première solution et l'équation (10) pour la seconde. Algébriquement on aura donc:

$$\frac{(d\rho)^2}{m^2} - K(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1) = \text{extrémum} \quad (17)$$

où  $(d\rho)^2$  est exprimé au moyen de l'équation (15). En coordonnées cartésiennes par contre on a [équation (10)]:

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - K'(QT) = \text{extrémum} \quad (18)$$

où les coefficients sont  $[paa]$ ,  $[pab]$  . . . . .  $[pcc]$  pour  $(QT)$ , les  $K$  et  $K'$  étant les corrélatifs;  $(QT)$  est accompagné d'un terme absolu ne jouant pas de rôle dans la dérivée, de même que le terme  $-1$  dans (17).

En se bornant à développer l'équation (17), c'est-à-dire la fonction dite principale on obtient, en rendant nulles les dérivées par rapport aux trois variables, calcul facile:

|   |                 |      |
|---|-----------------|------|
| $(Q_{11} - K) \cos \alpha + Q_{12} \cos \beta + Q_{13} \cos \gamma = 0$ | multiplicateurs |      |
| $Q_{21} \cos \alpha + (Q_{22} - K) \cos \beta + Q_{23} \cos \gamma = 0$ | $\cos \alpha$   | (19) |
| $Q_{31} \cos \alpha + Q_{32} \cos \beta + (Q_{33} - K) \cos \gamma = 0$ | $\cos \beta$    |      |
|   | $\cos \gamma$   |      |

et, en éliminant les variables:

$$\begin{vmatrix} (Q_{11} - K) & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & (Q_{22} - K) & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & (Q_{33} - K) \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$K^3 - I'_1 K^2 + I'_2 K - I'_3 = 0 \quad ([3] \text{ p. } 270; [5] \text{ p. } 167) \quad (21)$$

les  $I'_1$ ,  $I'_2$ ,  $I'_3$  étant les invariants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  où l'on a substitué

$$Q_{11}, Q_{12} \dots Q_{33} \text{ à } a_{11}, a_{12} \dots a_{33}$$

D'autre part, en multipliant respectivement les trois équations (19) par les trois cosinus directeurs et en additionnant on obtient, d'après l'équation (15):

$$K = (d\rho)^2 : m^2 \quad (22)$$

les trois racines  $K_1, K_2, K_3$  fournissant les valeurs extrêmes de  $(d\rho)^2$ . C'est le problème classique de la détermination des axes d'un ellipsoïde mais sous une forme un peu spéciale ici.

En partant de l'équation (18), on trouve en formant les demi-dérivées:

$$\begin{aligned} (dx) - K' \cdot \frac{\partial (QT)}{\partial (dx)} &= 0 \\ (dy) - K' \cdot \frac{\partial (QT)}{\partial (dy)} &= 0 \\ (dz) - K' \cdot \frac{\partial (QT)}{\partial (dz)} &= 0 \end{aligned}$$

Ces trois équations sont homogènes par rapport aux variables; l'élimination de celles-ci donne lieu à une équation de 3<sup>e</sup> degré (en France équation dite en S).

En multipliant ces équations respectivement par  $(dx), (dy), (dz)$  on obtient en additionnant:

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - K'(QT) = 0 \quad \text{où } (QT) = m^2$$

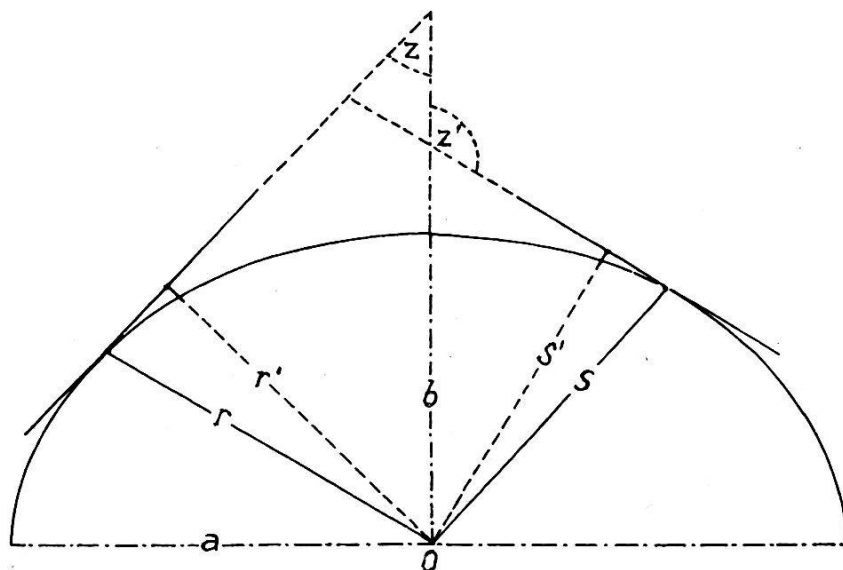
donc

$$(d\rho)^2 - K'm^2 = 0 \tag{23}$$

Cette solution est rappelée ici pour mémoire.

#### *Observations fictives équivalentes*

*Invariance de la somme des poids.* Trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde étant situés deux à deux dans un même plan diamétral il convient, au préalable, de rappeler en quoi consiste l'équivalence dans le plan lors du tracé d'une ellipse d'erreur. Dans la figure ci-dessous est dessinée la moitié d'une ellipse d'erreur avec deux observations équivalentes fictives qui se traduisent graphiquement par les tangentes paral-



lèles aux deux diamètres conjugués de longueurs  $2r$  et  $2s$ ; les poids fictifs y relatifs  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont tels que, en valeur absolue:

$$r' = 1 : \sqrt{(P_1)} \text{ et } s' = 1 : \sqrt{(P_2)} \quad (\text{pour } m^2 = 1) \quad (24)$$

Or la somme  $(P_1) + (P_2)$  est un invariant à l'égard du choix des diamètres conjugués. Dans l'espace, nous le verrons, une propriété analogue existe

$$(P_1) + (P_2) = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (25)$$

Si  $m^2 \cong 1$ , il faut l'introduire, mais l'invariance subsiste. On a en effet ([1] p. 217):

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= a^2 + b^2 \text{ et } r \cdot s \cdot \sin(z' - z) = ab \\ \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} &= \frac{(r^2 + s^2) \sin^2(z' - z)}{r^2 s^2 \sin^4(z' - z)} = \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2 \sin^2(z' - z)} = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{aligned} \quad (26)$$

car  $r' = r \cdot \sin(z' - z) \quad s' = s \cdot \sin(z' - z)$

Il y a ici deux solutions-limites:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & r = s \quad (r' = s') \\ \text{II} & r = r' = a; \quad s = s' = b \end{array}$$

Avec cette application de l'équivalence il n'y a pas de compensation; l'élément  $m^2$  doit éventuellement être déjà connu.

Les équations aux erreurs sont au nombre de deux seulement pour la détermination de deux coordonnées par des mesures linéaires (cas non surdéterminé).

|    |           |           |         |                          |
|----|-----------|-----------|---------|--------------------------|
| I  | $a_i =$   | $b_i =$   | poids = | Ces poids sont choisis à |
|    | $\cos z$  | $\sin z$  | $\pi_1$ | volonté.                 |
| II | $\cos z'$ | $\sin z'$ | $\pi_2$ | Les $v$ sont nuls.       |

$$[\pi aa] : [\pi bb] : [\pi ab] = Q_{22} : Q_{11} : (-Q_{12}) \quad (27)$$

En éliminant  $\pi_1$  et  $\pi_2$  on trouve de suite:

$$\begin{vmatrix} Q_{22} & 1 & 1 \\ Q_{11} & tg^2 z & tg^2 z' \\ -Q_{12} & tg z & tg z' \end{vmatrix} = 0$$

$$Q_{22} tgz tgz' + Q_{12} (tgz + tgz') + Q_{11} = 0 \quad (28)$$

relation qui caractérise l'involution des diamètres conjugués de l'ellipse.

*Application. Détermination d'un point par 4 mesures linéaires.*

Il y a deux équations normales qui, sous forme condensée sont:

$$[pav] = [pbv] = 0$$

|       |         |         |         |                                   |
|-------|---------|---------|---------|-----------------------------------|
| $i =$ | $a_i =$ | $b_i =$ | $p_i =$ |                                   |
| 1     | + 0.6   | - 0.8   | 1       | [paa] = 1.77; [pbb] = 1.98        |
| 2     | - 0.993 | - 0.120 | 1       | [pab] = -0.36                     |
| 3     | + 0.393 | + 0.920 | 1       | $Q_{11} = 0.586; Q_{22} = +0.530$ |
| 4     | - 0.6   | + 0.8   | 0.75    | $Q_{12} = +0.108$                 |

Un calcul facile fournit les quatre poids  $P_i$ , amplifiés grâce à la compensation. Il en résulte quatre paires de tangentes parallèles à l'ellipse d'erreur. Mais, a priori, il est manifeste que deux paires sont confondues car  $P_1 = P_4$  et les directions des tangentes coïncident.

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_4} = 0.36 \times 0.586 + 0.64 \times 0.530 - 2 \times 0.48 \times 0.108 = 0.445$$

de même  $\frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_3} = 0.611$

Contrôle:  $[p_i : P_i]_1^4 = 0.445 + 2 \times 0.611 + 0.75 \times 0.445 = 2.00 = u$

*Equivalence.* On a choisi deux équations fictives de manière à réaliser la solution-limite  $r = s$

|         |         |           |
|---------|---------|-----------|
| $a_i =$ | $b_i =$ | poids     |
| + 0.971 | - 0.241 | ( $P_1$ ) |
| + 0.041 | + 0.999 | ( $P_2$ ) |

$$\frac{1}{(P_1)} = \overline{0.971}^2 \times Q_{11} + \overline{0.241}^2 \times Q_{22} - 2 \times 0.971 \times 0.241 Q_{12} = 0.533 = \overline{0.73}^2$$

de même on trouve:  $\frac{1}{(P_2)} = 0.533 = \overline{0.73}^2$

un calcul aisé donne:  $a = 0.82 \quad b = 0.667$

*Invariance:*

$$\left(\frac{1}{0.73}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.73}\right)^2 = \left(\frac{1}{0.82}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.667}\right)^2 = 3.75 = (P_1) + (P_2)$$

$(m^2 = 1)$

Entre ces deux solutions-limites, il y en a d'autres, théoriquement une infinité. Pratiquement on peut calculer par voie semi-graphique.

*Ellipsoïde d'erreur*

Le problème est ici un peu moins simple, car il faut considérer trois demi-diamètres conjugués de longueurs respectives  $r, s, t$  contenus deux à deux dans trois plans diamétraux conjugués; de plus il y a trois paires de plans parallèles tangents à la surface.



Les six points de contact de ces plans sont deux à deux situés aux extrémités de trois diamètres conjugués. Entre ces divers éléments on peut énoncer trois théorèmes dits d'Appolonius; le plus important s'exprime par la relation:

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + s^2 + t^2 \quad (29)$$

Une propriété moins connue, mais présentant ici de l'intérêt est la suivante:

Si du centre 0 de la surface on abaisse des perpendiculaires sur trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués on a:

$$\left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{s'}\right)^2 + \left(\frac{1}{t'}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad ([4] \text{ p. 310}) \quad (30)$$

Ces  $r', s', t'$  étant les longueurs de ces perpendiculaires et  $a, b, c$  les demi-axes. Ces  $r', s', t'$  jouent le même rôle que les  $r$  et  $s$  dans le plan pour la détermination des poids fictifs  $(P_1), (P_2), (P_3)$

$$r'^2 : s'^2 : t'^2 = \frac{1}{(P_1)} : \frac{1}{(P_2)} : \frac{1}{(P_3)} \quad (31)$$

d'où la propriété d'invariance de la somme

$$(P_1) + (P_2) + (P_3) = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} + \frac{1}{t'^2} \quad (m^2 = 1) \quad (32)$$

Ce  $m^2 = 1$  ayant une dimension.

Ces  $r', s', t'$  sont des rayons vecteurs de la surface podaire de l'ellipsoïde:

$$T_4 - m^2(QT)_1 = 0$$

mais en général on n'a pas simultanément et rigoureusement

$$r = s = t \quad \text{et} \quad r' = s' = t'$$

Cas où  $r = s = t$ . Si l'on peut réaliser d'après la relation (29)

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = r^2 \quad (33)$$

il sera toujours possible, dans le plan conjugué au demi-diamètre  $r$  d'obtenir l'égalité:

$$s^2 = t^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (a > b > c)$$

Désignons par  $(x, y, z)$  les coordonnées de l'extrémité du demi-diamètre  $r$ ; on aura, à la fois, en écrivant  $(x, y, z)$  au lieu de  $(dx), (dy), (dz)$  pour simplifier:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$x^2\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + y^2\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right) + z^2\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right) = 0 \quad (34)$$

et en combinant avec (33):

$$x^2 \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{a^2} + y^2 \frac{a^2 + c^2 - 2b^2}{b^2} + z^2 \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{c^2} = 0 \quad (35)$$

équation d'un cône ayant son sommet au centre 0 de la surface.

Il y a donc théoriquement une infinité de solutions.

*Cas particulier.* Le coefficient de  $y^2$  est nul ( $a^2 + c^2 = 2b^2$ )

$$x^2 : z^2 = \text{constante} \quad (r = b)$$

équation d'une paire de plans passant par l'axe  $Oy$ .

Sur la base de ces propriétés générales la notion d'équivalence est applicable sans difficultés. Un premier exemple, extrêmement simple, sera tout d'abord traité.

*Exemple numérique. Détermination d'un point par 7 mesures linéaires*

On aura donc, après compensation, tous les éléments nécessaires et en particulier 7 paires de plans parallèles tangents à l'ellipsoïde d'erreur. Cette surface est ici engendrée tangentiellement.

Chaque côté spatial mesuré linéairement est normal à une de ces paires. Trois côtés quelconques pris parmi les 7 ne coïncident pas avec trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde d'erreur. Exceptionnellement, dans le présent exemple, une telle coïncidence existera.

Les coefficients et les poids ont les valeurs ci-après:

| $i =$ | $a_i =$ | $b_i =$ | $c_i =$ | $p_i$ |                                       |
|-------|---------|---------|---------|-------|---------------------------------------|
| 1     | + 0.577 | + 0.577 | + 0.577 | 1     | $[pab] = [pac] = [pbc] = 0$           |
| 2     | + 0.577 | - 0.577 | + 0.577 | 1     | $Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0$        |
| 3     | - 0.577 | + 0.577 | + 0.577 | 1     | $[paa] = 1.96 \quad [pbb] = 2.33$     |
| 4     | - 0.577 | - 0.577 | + 0.577 | 1     | $[pcc] = 2.83$                        |
| 5     | + 1     | 0       | 0       | 0.63  | $Q_{11} = 0.51 = a^2$                 |
| 6     | 0       | + 1     | 0       | 1     | $Q_{22} = 0.43 = b^2 \quad (m^2 = 1)$ |
| 7     | 0       | 0       | + 1     | 1.5   | $Q_{33} = 0.35 = c^2$                 |

Dans l'équation (35) le coefficient de  $y^2$  est nul, car  $a^2 + c^2 = 2b^2$

*Contrôle:*

$$[p_i : P_i]_1^7 = \overline{0.577^2} (0.51 + 0.43 + 0.35) \times 4 + 0.63 \times 0.51 + 1 \times 0.43 + 1.5 \times 0.35 = 3.00 = u$$

ces 7 valeurs  $P_i$  fournissent les 7 paires de plans parallèles et tangents à l'ellipsoïde d'erreur.

Quant à la propriété d'invariance de la somme des poids fictifs elle devient:

$$(P_1) + (P_2) + (P_3) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1.96 + 2.33 + 2.83 = 7.12$$

$(m^2 = 1)$

Une solution consiste à faire coïncider l'un des diamètres conjugués avec l'axe  $Oy$ ; on a alors:

$$r = r' = b \text{ et par suite } (P_1) = 2.33$$

si l'on veut rendre égaux  $(P_2)$  et  $(P_3)$  on trouve:

$$(P_2) = (P_3) = \frac{1}{2}(7,12 - 2,33) = 2.395$$

L'égalité des trois poids fictifs est presque réalisée; c'est une solution mise en évidence parmi une infinité.

*Second exemple numérique.* Admettons ici que l'équation de l'ellipsoïde d'erreur soit connue sur la base de mesures linéaires en nombre surabondant et faisons encore l'hypothèse  $m^2 = 1$ . Le centre de l'ellipsoïde est toujours l'origine des coordonnées.

Cette équation fort simple est, en écrivant  $(x, y, z)$  au lieu de  $(dx), (dy), (dz)$ :

$$0.94x^2 + y^2 + 1,48z^2 - xz = 1$$

dont on déduit:  $a = 1.25, b = 1.00, c = 0.75$

$$(P_1) + (P_2) + (P_3) = 0.64 + 1.00 + 1.78 = 3.42 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Choisissons un des plans diamétraux conjugués pour qu'il coïncide avec le plan:  $z = 0$

La paire de plans parallèles tangents à la surface a pour équations

$$z = \pm 0.91 = r'$$

$$(P_1) = \left(\frac{1}{0.91}\right)^2 = 1.21$$

et si l'on veut encore que  $(P_2) = (P_3)$ :

$$(P_1) + (P_2) + (P_3) = 1.21 + 1.105 + 1.105 = 3.42 = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} + \frac{1}{t'^2}$$

Deux diamètres conjugués sont donc contenus dans le plan  $z = 0$  tandis que le troisième passe par les points de contact des plans

$$z = \pm 0.91$$

*Troisième exemple.* Il sera fait usage ici d'un point ombilic (Nabelpunkt) ce qui donne un caractère un peu particulier à cette solution. Admettons encore, comme élément initial connu, l'équation de l'ellipsoïde d'erreur; on sait que par l'élimination des termes rectangles (en  $xy, xz, yz$ ) on aboutit à l'équation dite en  $S$  dont les racines fournissent les valeurs:

$$\frac{1}{a^2} = 0.58, \quad \frac{1}{b^2} = 0.86; \quad \frac{1}{c^2} = 1.61$$

Soit donc l'équation de structure fort simple

$$0.72x^2 + 0.72y^2 + 1.61z^2 + 0.28xy = 1$$

Le demi-diamètre conjugué  $t$  passant par l'ombilic les deux autres  $r$  et  $s$  sont contenus dans un plan diamétral cyclique c'est-à-dire à section circulaire. Dans ce plan les diamètres conjugués sont donc des paires à angle droit, et on a toujours

$$r = s$$

Le plan tangent en un point ombilic est parallèle à un plan cyclique, et l'indicatrice dite de Dupin en ce point est circulaire.

Numériquement, on trouve sans peine

$$t = 1.08, \quad t' = 0.955 \quad \frac{1}{t'^2} = 1.095 = (P_3)$$

$$\text{Invariant. } (P_1) + (P_2) + (P_3) = 3.05 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (m^2 = 1)$$

Deux solutions intéressantes sont:

$$\begin{aligned} (P_1) &= (P_2) = 0.98 \\ (P_1) &= 1.095, \quad (P_2) = 0.86 \end{aligned}$$

En résumé, on voit que cette propriété d'invariance de la somme des trois poids fictifs, qui se déduit d'une propriété de géométrie pure, facilite les calculs. Pour simplifier ceux-ci, on choisira un des plans

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

comme un des trois plans diamétraux conjugués. Le mieux aussi est d'avoir un des diamètres conjugués dans un plan principal. En dehors de ces solutions, les calculs seront moins simples.

Tous les résultats obtenus dans ce domaine de l'équivalence sont applicables au cas où il n'y a pas de mesures surabondantes. En d'autres termes, dans le plan un point est déterminé par deux mesures linéaires et dans l'espace par trois. Dans le plan, on a deux paires de tangentes parallèles qui enveloppent l'ellipse d'erreur, leurs directions étant conjuguées. Dans l'espace l'ellipsoïde d'erreur est enveloppé par trois paires de plans tangents parallèles; ceux-ci sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués et normaux aux trois côtés mesurés linéairement. Il faut connaître les poids  $p_1, p_2, p_3$  de ces mesures qui jouent le même rôle que les poids fictifs  $(P_1), (P_2), (P_3)$ . Il n'y a pas de compensation pour déterminer l'erreur moyenne quadratique  $\pm m$ ; on doit l'obtenir autrement, car on a:

$$\frac{1}{m^2} (p_1 + p_2 + p_3) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} + \frac{1}{t'^2}$$

Pour le surplus, en l'absence de compensation, on est ramené à un problème de géométrie analytique pure pour la détermination des éléments de l'ellipsoïde d'erreur.

En d'autres termes on peut, dans l'espace, appliquer le même raisonnement que dans le plan ([1] p. 233); trois mesures linéaires et

spatiales, judicieusement conçues, donnent lieu au même ellipsoïde d'erreur que celui résultant d'une compensation.

Il sera loisible aussi d'écrire l'équation de la sphère orthoptique qui joue un rôle dans le problème (en France dite sphère de Monge). Chaque point de cette surface est le sommet d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde.

Au préalable, pour conférer à la présente note un caractère plus général, on aurait pu assimiler les trois coordonnées du point, centre de la surface, à trois fonctions  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$  et considérer l'ellipsoïde d'erreur comme moyen auxiliaire graphique d'interprétation des formules ([1] p. 206). Mais les développements, avec trois fonctions au lieu de deux, deviennent assez longs et présentent de ce fait un intérêt limité.

#### *Littérature:*

- [1] *C. F. Baeschlin*, Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (multigraphié).
- [2] *H. Bouasse*, Mathématiques générales, Paris, Delagrave).
- [3] *J. Holsen*, Das mittlere Fehlerellipsoid, Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie, N° 9/1956.
- [4] *B. Niewenglowski*, Géométrie analytique III, Paris, Gauthier-Villars.
- [5] *Ringleb-Burklen*, Mathematische Formelsammlung, Sammlung Göschen.
- [6] *A. Ansermet*, Calcul semi-graphique d'ellipsoïdes d'erreur, Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie, N° 12/1957.

## **Die Entwürfe der Eidgenössischen Justizabteilung über Miteigentum und Stockwerkeigentum<sup>1</sup>**

*Von Dr. Gerhard Eggen, Bern*

### *I. Einleitung*

Bei der Einführung des eidgenössischen Grundbuches sind im Verlaufe von bald fünfzig Jahren namentlich in den Kantonen Wallis und Tessin ungezählte Fälle alten kantonalrechtlichen Stockwerkeigentums in der Weise in Miteigentum des Zivilgesetzbuches umgewandelt worden, daß die örtliche Ausscheidung der Besitz- und Nutzungsverhältnisse unter den verschiedenen Miteigentümern durch gegenseitige Dienstbarkeiten erfolgte. Diese Prozedur, die auf der übereinstimmenden Lehrmeinung unserer großen Juristen mit *Eugen Huber* an ihrer Spitze beruhte, schien sich jahrzehntelang zu bewähren.

Namentlich nach dem Ende des zweiten Weltkrieges wurde angesichts des im ZGB verpönten Stockwerkeigentums vor allem in den größeren Städten der Westschweiz auch versucht, der großen Boden-

<sup>1</sup> Referat, gehalten am 26. September 1959 in Genf, an der Tagung des Verbandes Schweizerischer Grundbuchverwalter. Nachdruck aus der «Schweizerischen Zeitschrift für Beurkundungs- und Grundbuchrecht», Heft 6, S. 321–336, November/Dezember 1959.