

# Das Geopotential, metrische Höhen und Gebrauchshöhen : eine Neuerung auf dem Gebiet der Höheren Geodäsie

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **58 (1960)**

Heft 6

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-216101>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 • LVIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1960

## Das Geopotential, metrische Höhen und Gebrauchshöhen

Eine Neuerung auf dem Gebiet der Höheren Geodäsie

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

### 1. Einleitung

An der Hauptversammlung der Internationalen Assoziation für Geodäsie (AIG), welche im September 1954 in Rom getagt hat, wurde der Begriff des *Geopotentials* eingeführt. Bekanntlich ist der Begriff der Höhe mit einigen Schwierigkeiten verbunden, die in den Bezeichnungen Niveauläche und Meereshöhe wurzeln. Wären die Niveaulächen der Erde konzentrische Kugelflächen, dann wären die Begriffe Niveaudifferenz und Höhendifferenz synonym. Bei der wirklichen Erde sind die Flächen gleichen Potentials, die *Niveaulächen*, keine Parallellflächen. Die Abstände zweier benachbarter Niveaulächen sind nicht konstant, sondern es gilt das Grundgesetz der Potentialtheorie:

$$-g dh = dW \quad (1)$$

Hier bedeuten  $g$  die Schwerebeschleunigung in einem Punkt  $P$  der Niveauläche  $W$  des Schwerefeldes und

$dh$  die Höhendifferenz in  $P$  bis zu einer benachbarten Niveauläche des Schwerefeldes mit dem Potential  $W + dW$ , positiv nach außen wie die Höhen.

Wenn der Punkt  $P$  sich längs eines beliebigen Weges an der Erdoberfläche von einem Punkt  $P_1$  zu einem zweiten Punkt  $P_2$  bewegt, so ist

$$\int_{P_1}^{P_2} g dh = W_2 - W_1 \quad (2)$$

Aus dieser Formel erhalten wir durch numerische Integration

$$\sum_{i=1}^n + \left( \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \right) \Delta z_i = -(W_2 - W_1), \quad (3)$$

die wir auf ein Nivellement von einem Punkt  $P_1$  nach einem andern Punkt  $P_2$  anwenden. Dabei erhalten wir die durch die Abbildung 1 wiedergegebenen Verhältnisse.

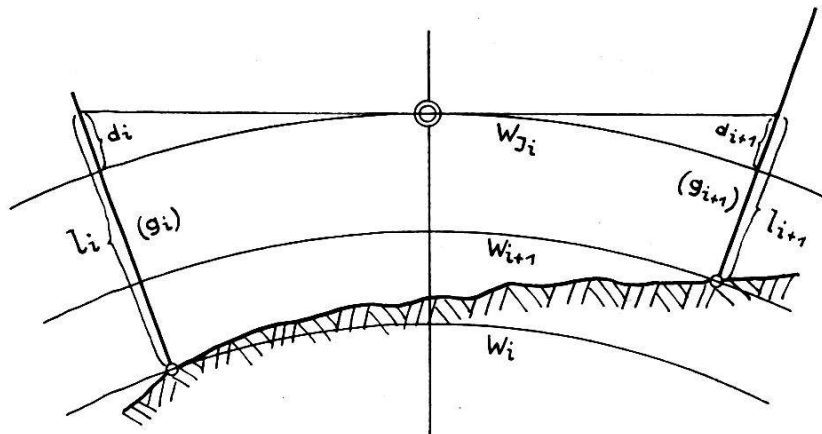


Abb. 1

Es ist

$$W_{J_i} = W_i - g_i (l_i - d_i)$$

$$W_{J_i} = W_{i+1} - g_{i+1} (l_{i+1} - d_{i+1})$$

Daraus erhalten wir, wenn wir von Refraktionswirkungen absehen und, wie dies bei Präzisionsnivellements üblich ist, aus der Mitte nivellieren,

$$W_{i+1} - W_i = g_{i+1} (l_{i+1} - d_{i+1}) - g_i (l_i - d_i) \quad (4)$$

Dabei sind die Schwerebeschleunigungen  $g_i$  beziehungsweise  $g_{i+1}$  in der halben Höhe von  $(l_i - d_i)$  beziehungsweise  $(l_{i+1} - d_{i+1})$  zu messen.

Der Fehler dieser Beziehung (4) ist praktisch Null, da die Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe nahezu linear verläuft. Man darf daher das Integral  $\int g dh$  entlang der Nivellierlatte mit dem Mittelwert von  $g$  berechnen. Dabei ist allerdings noch angenommen, daß die gerade Nivellierlatte die in Strenge gekrümmten  $l_i$  und  $l_{i+1}$  richtig wiedergebe. Da die Krümmung der Lotlinien sehr gering ist, trifft dies sicher zu.

Wir geben (4) die Form:

$$W_{i+1} - W_i = (l_{i+1} - l_i) \frac{g_i + g_{i+1}}{2} + (l_{i+1} + l_i) \frac{g_{i+1} - g_i}{2} + (d_i - d_{i+1}) \frac{g_i + g_{i+1}}{2} + (d_i + d_{i+1}) \frac{g_i - g_{i+1}}{2} \quad (5)$$

Da wir aus der Mitte nivellieren, sind  $d_i$  und  $d_{i+1}$  nahezu gleich. Untersuchungen von *Helmert* [1], Band II, S. 539 ff., und *H. Bruns* [2], S. 39–41, haben gezeigt, daß der Einfluß des dritten Gliedes von Formel (5) sehr klein ist, da die Differenz in der Krümmung der Niveaulächen vor- und rückwärts von  $J_i$  sehr gering ist. Auch in der Zusammenwirkung auf lange Nivellements kann dieses Glied immer vernach-

lässigt werden. Dasselbe kann vom zweiten und vierten Glied der rechten Seite von (5) nachgewiesen werden (siehe [3], S. 790). So bleibt von (5) übrig

$$W_{i+1} - W_i = (l_{i+1} - l_i) \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \quad (6)$$

Die Summierung aller dieser Beziehungen für ein zusammengesetztes Nivellement von  $P_1$  bis  $P_2$  ergibt

$$W_{P_2} - W_{P_1} = + \sum_{P_1(i=1)}^{P_2(i=n)} (l_{i+1} - l_i) \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \quad (7)$$

Hier müssen, wie erwähnt, die  $g$  in der halben Höhe der Lattenablesungen über dem Lattenfuß bestimmt werden. Das ist aber unpraktisch; denn versichert sind die Fixpunkte, und wir wollen untersuchen, um wieviel sich  $W_{P_2} - W_{P_1}$  ändert, wenn wir die  $g$  am Lattenfuß messen.

Nach der Formel für die Änderung der Schwerebeschleunigung in freier Luft finden wir ([3], S. 691):

$$g_i = g_{i,0} - 0.3086 \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \frac{l_i - d_i}{2}$$

$$g_{i+1} = g_{i+1,0} - 0.3086 \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \frac{l_{i+1} - d_{i+1}}{2}$$

wo  $g_{i+1,0}$  beziehungsweise  $g_{i,0}$  die Schwerebeschleunigung im Fußpunkt der Latte bedeutet. Damit wird für ein Nivellement im Flachland, wo im Mittel  $l_i - l_{i+1} = 0$  ist, das Zusatzglied Null.

Jetzt betrachten wir ein Nivellement auf einem 4800 m hohen Berg. Wir denken uns das Nivellement so ausgeführt, daß es mit einem Minimum von Instrumentenaufstellungen ausgeführt werden kann. Dabei wollen wir die kleinen Größen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  für die Erdkrümmungseffekte weglassen.  $(l_{i+1} - l_i)$  und  $(l_{i+1} + l_i)$  werden dann für jede Instrumentenaufstellung = 3 m, da  $l_{i+1} = 3.00$  m,  $l_i = 0$ . Wir erhalten so:

$$W_{P_2} - W_{P_1} = \sum_{P_1}^{P_2} (l_{i+1} - l_i) \frac{g_{i,0} + g_{i+1,0}}{2} -$$

$$- 0.0772 \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \sum_{P_1}^{P_2} (l_{i+1} - l_i) (l_i + l_{i+1}) =$$

$$= \sum_{P_1}^{P_2} (l_{i+1} - l_i) \frac{g_{i,0} + g_{i+1,0}}{2} - 0.0772 \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \sum_{P_1}^{P_2} (l_{i+1}^2 - l_i^2)$$

Da wir zur Bewältigung des Höhenunterschiedes von 4800 m 1600 Stationen brauchen, wird das Zusatzglied

$$- 0.0772 \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \cdot 1600 \cdot g = - 0.000000072 \cdot 1600 \cdot g \text{ kgal m} =$$

$$= - 0.001112 \text{ kgal m} = - 1.112 \text{ kgal mm.}$$

Um diese Potentialdifferenz in eine Länge zu verwandeln, dividieren wir durch 0.980 kgal und erhalten

$$- 1.134 \text{ mm}$$

Ein Fehler von 1.13 mm kann bei einem Nivellement über einen Höhenunterschied von 4800 m sicher vernachlässigt werden. Damit haben wir gezeigt, daß wir in der Formel (7) das Zusatzglied vernachlässigen dürfen.

Wir können daher bei der Verwendung der Formel

$$W_{P_2} - W_{P_1} = \sum_{P_1}^{P_2} \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \Delta l_{i,i+1}$$

die Schwerkraftmessungen am Lattenfuß ausführen, ohne daß wir in Betracht fallende Verfälschungen der Potentialwerte erhalten.

Wir wollen ferner beweisen, daß es nicht notwendig ist, die  $g$  an den sämtlichen Aufstellungen der Nivellierlatten zu beobachten.

Wir nehmen vielmehr an, daß wir die  $g$  nur in jedem  $m^{\text{ten}}$  Lattenumstellpunkt messen. Die  $g$ -Werte an den ausgelassenen Stellen interpolieren wir gleichmäßig zwischen  $g_i$  und  $g_{i+k}$ . Wir ersetzen  $\Delta l_{i,i+1}$  durch  $\Delta z_{i,i+1}$ , da es sich von jetzt an nicht mehr um Lattenablesungen handelt. Da wir aber doch von  $P_1$  bis  $P_2$  nivellieren müssen, können wir die  $\Delta l_{01}$ ,  $\Delta l_{12}$  ... bis  $\Delta l_{m-1,m}$  aus dem Nivellement entnehmen. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta W' &= [(2m - 1)g_0 + g_m] \frac{\Delta z_{01}}{2m} \\ &+ [(2m - 3)g_0 + 3g_m] \frac{\Delta z_{12}}{2m} + \dots \\ &+ [3g_0 + (2m - 3)g_m] \frac{\Delta z_{m-2,m-1}}{2m} \\ &+ [g_0 + (2m - 1)g_m] \frac{\Delta z_{m-1,m}}{2m} \end{aligned}$$

Wenn wir dagegen die Schwere in allen Lattenumstellpunkten beobachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{g_0 + g_1}{2} \Delta z_{01} + \frac{g_1 + g_2}{2} \Delta z_{12} + \dots \\ &+ \frac{g_{m-2} + g_{m-1}}{2} \Delta z_{m-2,m-1} \\ &+ \frac{g_{m-1} + g_m}{2} \Delta z_{m-1,m} \end{aligned}$$

$$\Delta W = - \sum_{i=1}^m g_{m_i} \Delta z_i \quad (9)$$

Wir können aber das Nivellement auch nur so verwenden, daß wir nur den Höhenunterschied ( $h_k - h_0$ ) ermitteln. Auf diese Weise erhalten wir

$$\Delta W'' = (h_k - h_0) \frac{g_k + g_0}{2} \quad (10)$$

Wir erkennen, daß die drei Werte für  $\Delta W'$ ,  $\Delta W''$  und  $\Delta W$  infolge der geringen Variabilität der  $g$  nur verhältnismäßig wenig variieren. In dem folgenden Beispiel sind die  $z_{i, i+1}$  nicht die Differenzen für Rückblick minus Vorblick, sondern sie sind schon über Nivellements gewonnen, bei denen die Schwere nicht für alle Lattenumstellpunkte gemessen wurde.

$g_0 = 0.980576465$	$z_{01} = + 1.53975$
$g_1 = 0.980571595$	$z_{12} = + 3.05883$
$g_2 = 0.980569875$	$z_{23} = + 8.94117$
$g_3 = 0.980565410$	$z_{34} = + 15.87780$
$g_4 = 0.980560445$	$z_{45} = - 4.99860$
$g_5 = 0.980557960$	$z_{56} = - 10.58115$
$g_6 = 0.980556520$	

$$\Delta W = + 13.568995603 \text{ kgal m}$$

$$\Delta W' = + 13.569012387 \text{ kgal m}$$

$$\Delta W'' = + 13.568883010 \text{ kgal m}$$

$$\Delta W - \Delta W' = - 0.000016784 \text{ kgal m} = - 0.017 \text{ kgal mm}$$

$$\Delta W - \Delta W'' = + 0.000112593 \text{ kgal m} = + 0.113 \text{ kgal mm}$$

$$\Delta W' - \Delta W'' = + 0.000129377 \text{ kgal m} = + 0.129 \text{ kgal mm}$$

Zu Versuchszwecken führen wir Nivellements durch, bei denen wir die Schweremessungen verhältnismäßig dicht verteilen. Indem wir immer mehr Schweremessungen ausfallen lassen, können wir die Dichte der Schweremessungen in  $\Sigma g_{mi} \Delta z_i$  bestimmen, welche eine befriedigende Genauigkeit dieser Größen liefert. Ich verweise für weitere Details auf die in der Literatur aufgeführten Arbeiten von *K. Ramsayer*. Aus solchen Untersuchungen geht hervor, daß die Dichte der Schweremessungen um so größer sein muß, je gebirgiger das Gebiet ist. Für gebirgige Gebiete soll die Entfernung der Punkte mit Schweremessungen etwa 300 m, im Mittelgebirge 1500 m und im Flachland 4 km und mehr betragen.

## 2. Geopotentielle Koten

Wir denken uns solche Nivellements mit Schweremessungen in geeigneten Fixpunkten von einem Fixpunkt  $P_1$  nach einem zweiten Fixpunkt  $P_2$  durchgeführt. Dann erhalten wir

$$-(W_{P_2} - W_{P_1}) = + \sum_{P_1}^{P_2} g_{mi} \cdot \Delta z_i \quad (10)$$

Jetzt führen wir ein solches Nivellement von einem Punkt 0 auf dem Geoid zu einem Punkt  $P$  an der Erdoberfläche durch. Wir erhalten

$$-(W_P - W_0) = + C_P = + \sum_0^P g_{mi} \Delta z_i \quad (11)$$

Diese spezielle negative Potentialdifferenz bezeichnen wir mit  $C_P$  und nennen sie *geopotentielle Kote* (französisch: Cote géopotentielle; englisch: geopotential number) des Punktes  $P$ . Wir setzen das Potential am Geoid  $W_0$  in der Folge gleich Null. Dann bedeutet  $-W_P$  das Geopotential relativ zum Geoid. Das Geopotential  $C_P$  von Punkten über dem Geoid ist positiv, von Punkten unter dem Geoid negativ.

Dieser Name geopotentielle Kote war im Laufe der Verhandlungen der Studiengruppe 4 über «Nivellement und Schwere» unter dem Vorsitz des Verfassers vom Direktor des Zentralbüros der Internationalen Assoziation für Geodäsie, Herrn Prof. Dr. h. c. Pierre Tardi, Membre de l'Institut de France, Paris, vorgeschlagen worden. Er fand die Genehmigung der Hauptversammlung durch die Annahme der Wünsche Nummer 5, Nummer 6 und Nummer 8 am 23. September 1954 anlässlich der Hauptversammlung der Internationalen Geodätischen und Geophysikalischen Union (UGGI) in Rom.

Die Einführung der Kräftefunktion oder des Potentials der Schwerkraft geht auf *Th. Wand* zurück [6], S. 129–131. Es wurde damals gegen den Vorschlag eingewendet, daß der Begriff des Potentials außer für einen engen Kreis von mathematisch geschulten Fachleuten unbekannt sei. Deshalb schlug *Helmert* in seinen Theorien der Höheren Geodäsie [1], Band II, S. 504, 1884, den Quotienten  $\frac{\Delta W}{\gamma_{45}}$  vor: diese Größe wurde von *Ch. A. Vogler* als Arbeitshöhe bezeichnet [7], S. 11–13.

Um die korrekten Werte der geopotentiellen Kote zu erhalten, müssen wir die *absoluten* Schwerkraftswerte kennen. Da bis zur Stunde noch kein genauer absoluter Wert von  $g$  für den internationalen Ausgangspunkt Potsdam vorliegt, nehmen wir den konventionellen Wert 981.274 cm sec<sup>-2</sup>, der gemäß Beschluß der X. Hauptversammlung der UGGI bis zum Schluß des Internationalen Geophysikalischen Jahres 1957/58 beibehalten werden soll, ungeachtet des Umstandes, daß er um ungefähr 12 mgal zu groß ist. Wenn in naher Zukunft am Schwere-

wert für Potsdam eine Korrektur  $\Delta g_0$  anzubringen sein wird, ist an der Schwere  $g_i$  in einem Punkt I die Korrektur anzubringen:

$$\Delta g_i = \Delta g_0 \frac{g_i}{g_0} \quad (11)$$

Daraus ergibt sich, daß die Korrekturen  $g_i$  im Maximum um 0.05 mgal abweichen können, indem

$$0,978 \leq g \leq 0.984 \text{ kgal}$$

Als Einheit für die geopotentiellen Koten wählen wir das *Kilogalmeter*.

$$1 \text{ kgal} \cdot \text{m} = 100 \text{ cm} \cdot 1000 \text{ gal} = 10^5 \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = 10^5 \text{ CGS.}$$

Die Zahl, welche die geopotentielle Kote  $C$  in einem Punkt in u. g. p. (unités géopotentiels) darstellt, ist grob um 2% kleiner als die Meereshöhe, in Metern ausgedrückt.

### 3. Dynamische Pseudohöhen

Nachdem wir mit Hilfe des Nivellements und von Schweremessungen in einzelnen seiner Fixpunkte in den Stand gesetzt werden,  $\sum g_{m,i} \cdot \Delta z_i$  mit genügender Genauigkeit zu bilden, wollen wir sehen, was wir mit diesen Summen der Produkte aus Schwerewerten und Nivellements höhendifferenzen anfangen können.

Wenn wir  $C_P$  von Formel (10) durch den Schwerewert  $\gamma_0^{45}$  am internationalen Ellipsoid in 45° Breite und in Meereshöhe (die sogenannte Normalschwere) dividieren, wo

$$\gamma_0^{45} = 0.98062938668 \text{ kgal}$$

ist, erhalten wir eine Größe mit der Dimension cm, also eine Länge. Wir

nennen diese Größe  $\frac{C_P}{\gamma_{45}}$  *dynamische Pseudohöhe* und bezeichnen sie mit  $H'_P$ . Es ist

$$H'_P = \frac{C_P}{\gamma_{45}} = \sum_0^P \frac{g_{mi} \cdot \Delta z_i}{\gamma_{45}} = + \sum_0^P \frac{g_{mi} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta z_i - \sum_0^P \Delta z_i$$

$\sum_0^P \Delta z_i$  längs des Nivellierweges von 0 bis  $P$  stellt das rohe Nivellements-

resultat dar; wenn wir  $\sum_0^P \frac{g_{mi} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta z_i$  als die «dynamische Pseudo-

höhenkorrektur», abgekürzt DK, bezeichnen, so ist

$$H'_P = - \text{rohes Nivellementsresultat} + \text{DK}$$

$$\text{DK} = \sum_0^P \frac{g_{mi} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta z_i \quad (12)$$



Diese dynamische Pseudohöhe  $H'_P$  weist die folgenden Eigenschaften auf:

1. Sie ist proportional zu  $C_P$ .
2. Alle Punkte mit gleichem  $H'_P$  liegen auf einer und derselben Niveaulfläche des Erdschwerefeldes; insbesondere liegen die Punkte mit  $H'_P = 0$  auf dem Geoid.

Trotz diesen sehr wichtigen Eigenschaften eignen sich aber die dynamischen Pseudohöhen nicht als Ersatz für die Meereshöhen, da sie sich gemäß (12) um die DK von den rohen Nivellementsresultaten unterscheiden. Diese «dynamische Pseudohöhenkorrektur» kann aber sehr beträchtlich von Null abweichen, speziell in Gebieten, die stark von der Breite  $45^\circ$  abweichen.

Die DK kann schon bei  $H'_P = 1000$  m 2,63 m erreichen.

Wir nennen diese Eigenschaft der dynamischen Pseudohöhen ihren *metrischen Nachteil*. Zur Vermeidung dieses Nachteiles hat man nach *metrischen Pseudohöhen* gesucht, welche die Eigenschaft aufweisen, daß sie sich möglichst wenig von den rohen Nivellementshöhen unterscheiden. *K. Ledersteger* definiert sie in [9] als Größen, die aus der geopotentiellen Kote  $C_P$  durch Division durch den Durchschnittswert einer geeignet definierten Schwere in einer Lotlinie erhalten werden.

Solche metrische Höhen sind:

1. die orthometrischen Meereshöhen als Länge der Lotlinie zwischen dem Punkt  $P$  an der Erdoberfläche und dem Geoid;
2. die orthometrischen Helmert-Höhen;
3. die modifizierten sphäroidischen Pseudohöhen von Vignal;
4. die sphäroidischen Pseudohöhen von Baranov.

Da wir die dynamische Pseudohöhe in der Folge als bequemen Ausgang zu den metrischen Höhen benutzen, wollen wir uns kurz mit ihrer Berechnung beschäftigen. Wir finden

$$H'_P = \frac{C_P}{\gamma_{45}}$$

Wenn wir eine Rechenmaschine mit automatischer Division zur Verfügung haben, verwenden wir direkt die Division durch  $\gamma_{45}$ ; sonst benutzen wir die Multiplikation mit dem reziproken Wert von  $\gamma_{45}$ . Es ist

$$\frac{1}{\gamma_{45}} = 1,0197532458.$$

#### 4. Die orthometrischen Meereshöhen

Unter der orthometrischen Meereshöhe  $H_P$  eines Punktes  $P$  auf der physischen Erdoberfläche verstehen wir die Länge des Stückes der gekrümmten Lotlinie von  $P$  bis zu ihrem Schnitt  $P'$  mit dem Geoid.

Wir können  $H_P$  aus der geopotentiellen Kote  $C_P$  wie folgt bestimmen: Aus Gleichung (1) und (10) folgt

$$-\Delta W = +C = + \int_0^P g_P dh_P,$$

wo  $g_P$  die Schwere in der Lotlinie von  $P$ , während  $dh_P$  das betreffende Differential ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$+ C = \bar{g}_P \int_0^P dh_P = \bar{g}_P \cdot H_P$$

wo  $\bar{g}_P$  der Durchschnittswert von  $g_P$  längs der Lotlinie von  $P'$  bis  $P$  ist. Wir erhalten daher die orthometrische Höhe von  $P$ :

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}_P} \quad (13)$$

Die durchschnittliche Schwere  $\bar{g}_P$  längs der Lotlinie  $P'P$  können wir aber nicht durch Beobachtungen erhalten, weil wir im Innern der Erde keine Messungen anstellen können, es sei denn, daß vom Punkte  $P$  bis auf das Geoid bis  $P'$  ein Schacht gebohrt würde. Man kann also keine orthometrischen Höhen bestimmen, ohne daß man Hypothesen annimmt, etwa über die Dichte der Gesteine in der Erdrinde.

Die orthometrischen Höhen unterscheiden sich daher in grundlegender Weise von den dynamischen Pseudohöhen. Denn diese können wir hypothesenfrei aus der geopotentiellen Kote  $C_P$  bestimmen. Weshalb versuchen wir denn orthometrische Höhen zu bestimmen?

In erster Linie stellen sie die einzigen wirklichen Höhen dar, die wir bei der Behandlung von vielen geodätischen Problemen nicht umgehen können. Dann gestatten sie die Verdichtung des Höhennetzes mit Hilfe der trigonometrischen Höhenmessung; denn dynamische Pseudohöhen stehen nicht in einfacher Beziehung zu trigonometrischen Höhendifferenzen.

Die Bestimmung orthometrischer Höhen kommt also auf die Ermittlung der durchschnittlichen Schwerewerte  $\bar{g}_P$  heraus. Ein Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe wurde zuerst von *Th. Niethammer* in [10] angegeben. Er geht von der Annahme aus, daß sich die Schwerkraft linear mit der Höhe ändert und daß die Massen zwischen Meeresniveau und Erdoberfläche in Prismen eine konstante Dichte haben.

Diese Massen denken wir uns als Überlagerung der Erdmasse in folgender Weise zusammengesetzt:

1. aus einer ebenen Platte von der Dichte  $\Theta$  und der Höhe  $H_P$ , welche vom Meeresniveau bis zum Stationsniveau geht;
2. aus den Massen der Dichte  $+\Theta$ , welche das Stationsniveau überragen, und den Massen der Dichte  $-\Theta$  im Raume zwischen Stationsniveau und der tiefer liegenden Erdoberfläche, die also gegenüber der ebenen Platte einen Massendefekt darstellen.

Für den Gradienten der Schwerkraft nach der Höhe nehmen wir mit *Baeschlin* [3], S. 706,

$$- 0.0000030827 \text{ gal cm}^{-1}$$

Da wir lineare Änderung von  $g$  nach  $H$  voraussetzen, ist der Mittelwert  $\bar{g}_P$  identisch mit dem Schwerewert in der Höhe  $\frac{H_P}{2}$ . Um  $\bar{g}_P$  zu finden, ziehen wir vom Oberflächenwert  $g_P$  zuerst die Anziehung der sogenannten Bouguer-Platte ab:

$$\Delta g' = \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{H}{R} g = 0.1119 H \text{ m mgal},$$

wenn wir  $\Theta = 2.67$  annehmen,  $\Theta_m = 5.516843.4$ .

Dann senken wir den Punkt  $P$  um die halbe Meereshöhe; es wird deshalb

$$\Delta g = + 0.15413 H \text{ m mgal}$$

Die Hauptschwierigkeit besteht nun bekanntlich in der Bestimmung des Einflusses der Abweichungen des Geländes von der horizontalen Platte. Der Einfluß dieser positiven oder negativen Zusatzmassen auf den Oberflächenpunkt  $P$ ,  $\Delta g''$ , muß nachträglich um die Wirkung derselben Massen auf den Mittelpunkt der Lotlinie, die topographische Korrektur des Durchschnittswertes der Schwere,  $\Delta \bar{g}''$ , vermindert werden. Man findet so nach *Niethammer*:

$$\bar{g}_P = g_P + 0.04223 H \text{ m mgal} + \Delta g'' - \Delta \bar{g}'' \quad (14)$$

Die Bestimmung von  $\Delta g''$  und  $\Delta \bar{g}''$  aus der mittleren Höhe der Kompartimente, in welche wir die «Topographie» mit Zonen und Sektoren unterteilen, ist reichlich kompliziert, wenn auch *Niethammer* in der zitierten Abhandlung [10] Tabellen gibt, mit deren Hilfe wir die Werte für die Argumente  $H_P$  (Stationshöhe) und  $h$  (Höhendifferenz der Mittelwerte der Höhen des Geländes gegenüber dem Stationsniveau) für die Dichte  $\Theta = 1$  von  $\Delta g'' - \Delta \bar{g}''$  in graphischen Tafeln bestimmen können. Da zwei Argumente  $H_P$  und  $h$  vorhanden sind, müßten Tabellen mit zwei Eingängen erstellt werden. Da aber die Interpolation in solchen Tabellen mühsam ist, hat *Niethammer* graphische Tafeln für jede Zone erstellt. Er geht in seinen Tafeln bis 188 km von der Station. Die Hauptarbeit liegt in der Bestimmung der 136 Sektoren um jede Station herum, während die Ablesung der Tafeln verhältnismäßig wenig Zeit braucht. Die Theorie von *Niethammer* ist allerdings nicht vollständig. Bekanntlich verwendet man in der Geodäsie die Theorie der Isostasie. Der Verfasser hat in [11] eine Ergänzung zur Berechnung des Einflusses der Isostasie gegeben. Es handelt sich darum, an Stelle der Tafeln von *Niethammer* neue Tafeln zu berechnen und zu publizieren. Wenn diese Tafeln vorliegen, bietet die Berücksichtigung des Einflusses der Isostasie keine Mehrarbeit gegenüber *Niethammer*.

Aber der Verfasser hält diese Methode doch zu arbeitsintensiv, als daß man sie für die Bestimmung der orthometrischen Höhe der sehr großen Anzahl von Punkten einer Landesvermessung verwenden könnte.

Wir erkennen, daß die Abweichung der Niethammer-Höhen von den noch zu behandelnden Helmertschen orthometrischen Höhen verhältnismäßig gering ist, so daß man für die Masse der Punkte die Näherungswerte verwenden könnte. Dagegen sollte in jedem Lande mit größeren Meereshöhen nach der ergänzten Niethammer-Methode für charakteristische Punkte die Korrektur auf die Helmert-Höhen bestimmt werden, um die Differenz für verschiedene Verhältnisse kennenzulernen.

Gemäß (14) finden wir

$$H_P = \frac{C_P}{g_P + 0.04223 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}''} \quad (15)$$

Für  $h$  ist ein Näherungswert für  $H_P$  zu wählen, den man aus den rohen Nivellementsresultaten bestimmt. Wenn eine leistungsfähige Rechenmaschine mit automatischer Division vorliegt, wird man die Division nach (15) explicite durchführen. Wenn dies nicht der Fall ist, wandelt man den Divisor um.

$$\begin{aligned} H_P &= \frac{C_P}{\gamma_{45} \left( 1 - 1 + \frac{g_P}{\gamma_{45}} + \frac{0.04223 h}{\gamma_{45}} + \frac{\Delta g'' - \Delta \bar{g}''}{\gamma_{45}} \right)} \\ &= \frac{C_P}{\gamma_{45} \left( 1 + \frac{g_P - \gamma_{45} + 0.04223 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}''}{\gamma_{45}} \right)} \\ &= \frac{C_P}{\gamma_{45}} \left( 1 - \frac{(g_P - \gamma_{45}) + 0.04223 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}''}{\gamma_{45}} \right) \end{aligned}$$

$$H_P = H'_P - \frac{H'_P}{\gamma_{45}} [(g_P - \gamma_{45}) + \gamma_{45} + 0.04223 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}''] \quad (16)$$

$H'_P$  ist die dynamische Pseudohöhe des Punktes  $P$ . Auf den Fehler dieses Resultats treten wir später ein.

### 5. Die Helmertschen orthometrischen Höhen

Auf der Suche nach Näherungsmethoden zur Berechnung der orthometrischen Höhen stoßen wir auf eine schon im Jahre 1890 von *Helmert* in [5] angegebene sehr einfache Methode. Sie stützt sich auf die Annahme, daß das Gelände in der Umgebung der Station horizontal und eben sei. Man erhält also diese Methode aus derjenigen von Niethammer, wenn man dort den Einfluß der «Topographie» vernachlässigt, also in (14)

$$\Delta g'' - \Delta \bar{g}'' = 0$$

setzt. Damit wird

$$\bar{g}_P = g_P + 0.04223 h \text{ mgal} \quad (14a)$$

Da man hier  $g_P$  als beobachtet ansehen darf und für  $h$  einen geeigneten Näherungswert einsetzen darf, ist der durchschnittliche Wert  $\bar{g}_P$  der Schwere sehr leicht zu bestimmen. Man erhält die Helmertschen orthometrischen Meereshöhen aus

$$H_P^{\text{Helmert}} = \frac{C_P}{g_P + 0.04223 h} \quad (17)$$

Durch eine ganz analoge Umformung wie bei (16) erhalten wir

$$H_P^{\text{Helmert}} = H'_P - H'_P \cdot \frac{1}{\gamma_{45}} (g_P - \gamma_{45} + 0.04223 h) \quad (18)$$

Aus vielen Beispielen, die in der Schweiz und in Österreich durchgerechnet worden sind, ergibt sich die Differenz zwischen Niethammer- und Helmert-Höhen maximal zu 10 cm. Da die Meereshöhe in der Mitte des europäischen Kontinentes einen mittleren Fehler von  $\pm 10$  cm aufweist, kann man diese Unsicherheit tolerieren.

#### 6. Die modifizierten sphäroidischen Pseudohöhen von Jean Vignal

Diese von *Jean Vignal* in [12] eingeführte orthodynamische Pseudohöhe oder, wie wir sie mit *K. Ledersteger* in [9] nennen, die «modifizierten sphäroidischen Höhen», definieren wir die durchschnittliche Schwere  $\bar{\gamma}$  auf dem Sphäroid als die Schwere in der Breite  $B$ ,  $\gamma_0$  im Meeresniveau und der halben Höhe  $H_P$ . Es wird also

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 + 0.1541_3 h$$

Wenn wir die Vignal-Pseudohöhen mit  $V_P$  bezeichnen, wird deshalb

$$V_P = \frac{C_P}{\gamma_0 + 0.1541_3 h} \quad (19)$$

Durch eine Umformung analog zu (18) und (16) erhalten wir:

$$V_P = H'_P - H'_P \frac{1}{\gamma_{45}} (\gamma_0 - \gamma_{45} + 0.1541_3 h) \quad (20)$$

#### 7. Die Pseudohöhen von Baranov

*Vladimir Baranov* schlug 1951 seine Pseudohöhen vor, indem er  $\bar{g}_P$  als das arithmetische Mittel aus dem beobachteten Schwerewert  $g_P$  an der Erdoberfläche und der sphäroidischen oder normalen Schwere  $\gamma_0$  im Fußpunkt der Lotlinie auf dem Ellipsoid nahm.

Wir definieren daher die Baranov-Höhe im Punkt  $P$ , die wir als  $B_P$  bezeichnen:

$$B_P = \frac{C_P}{\frac{g_P + \gamma_{0P}}{2}} \quad (21)$$

Durch Umformung analog wie früher finden wir

$$B_P = H'_P - H'_P \frac{1}{\gamma_{45}} \left( -\gamma_{45} + \frac{g_P + \gamma_{0P}}{2} \right) \quad (22)$$

Da wir hier, wie auch bei den Vignal-Höhen, die sphäroidische oder normale Höhe im Meeresniveau brauchen, benutzen wir die von *Alfred Schleusener* in [8] publizierten Werte. Sie gründen sich auf die «Internationale Normalschwere 1930», welche im Jahre 1930 von der Hauptversammlung der Internationalen Assoziation in Stockholm festgelegt worden ist. Es ist

$$\gamma_0^B = 978\,049.000\,00 (1 + 0.005\,288\,400 \sin^2 B - 0.000\,005\,900 \sin^2 2B) \text{ mgal}$$

$$\text{oder } \gamma_0^B = 980\,632.271\,92 - 2586.157\,17 \cos 2B + 2.885\,24 \cos 4B \text{ mgal}$$

$$\text{Da } \cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = 1 - 2 \sin^2 B$$

$$\text{und } \cos 4B = 1 - 2 \sin^2 2B,$$

sind die beiden Formeln gleichwertig. In der ersten Form ist 978 049.000 00 mgal die normale Schwere am Äquator; diese Form wurde im Jahre 1930 publiziert. Es ist

$$\gamma_0^{45} = \text{in Zukunft vereinfacht geschrieben } \gamma_{45} = 980\,629.386\,68 \text{ mgal} = 0.980\,629\,386\,68 \text{ kgal}$$

$$\frac{1}{\gamma_{45}} = 1.019\,753\,245\,8 \frac{1}{\text{kgal}}$$

Die Fehler der durch Umformung erhaltenen Werte (16), (18), (20) und (22) wollen wir durch eine gemeinsame Methode ermitteln. Wir bezeichnen in den umgeformten Formeln die Ausdrücke

$$\begin{array}{ll} g_P - \gamma_{45} + 0.0422_3 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}'' & \text{als } a_{\text{orthometrisch}} \\ g_P - \gamma_{45} + 0.0422_3 h & \text{als } a_{\text{Helmert}} \\ \gamma_0 - \gamma_{45} + 0.1541_3 h & \text{als } a_{\text{Vignal}} \\ \frac{\gamma_{0P} + g_P}{2} - \gamma_{45} & \text{als } a_{\text{Baranov}} \end{array}$$

Mit diesen Abkürzungen erhalten wir

$$\text{die orthometrische Höhe } H_P = H'_P \frac{1}{1 + a_{\text{orth.}}}$$

$$\text{die Helmertsche Höhe } H_P^{\text{Helmert}} = H'_P \frac{1}{1 + a_{\text{Helmert}}}$$

$$\text{die Vignal-Höhe } V_P = H'_P \frac{1}{1 + a_{\text{Vignal}}}$$

$$\text{die Baranov-Höhe } B_P = H'_P \frac{1}{1 + a_{\text{Baranov}}}$$

Da nach der binomischen Reihe

$$\frac{1}{1 + a} = 1 - a + a^2 - \dots,$$

erhalten wir die zu dem  $a$  entsprechende Höhe

$$\text{Höhe} = H'_P \left( 1 - \frac{a}{\gamma_{45}} + \frac{a^2}{\gamma_{45}^2} \right)$$

Der Fehler der Höhe ist daher  $\frac{H'_P a^2}{\gamma_{45}^2}$ . Wenn wir das Glied mit  $a^2$  weglassen und näherungsweise  $\frac{1}{\gamma_{45}}$  gleich 1 setzen, finden wir:

$$\text{Fehler der Formel (16)} = H'_P (g_P - \gamma_{45} + 0.0422_3 h + \Delta g'' - \Delta \bar{g}'')^2$$

$$\text{Fehler der Formel (18)} = H'_P (g_P - \gamma_{45} + 0.0422_3 h)^2$$

$$\text{Fehler der Formel (20)} = H'_P (\gamma_0 - \gamma_{45} + 0.1541.3 h)^2$$

$$\text{Fehler der Formel (22)} = H'_P \left( \frac{\gamma_{0P} + g_P}{2} - \gamma_{45} \right)^2$$

Während die hier behandelten metrischen Höhen in mathematisch einwandfreier Weise definiert sind, müssen wir hier auch noch die sogenannten *Gebrauchshöhen* erwähnen, die gemäß Wunsch Nummer 7 der Hauptversammlung der AIG vom September 1954 in Rom es jedem Mitgliede frei läßt, nach freiem Ermessen Gebrauchshöhen (altitudes officielles) für die Publikation an die Öffentlichkeit des Landes wählen zu lassen. Diese Gebrauchshöhen sollen möglichst wenig von den rohen

Nivellementsergebnissen abweichen; sie sehen also dieselben Eigenschaften vor wie die metrischen Höhen. Aber im Gegensatz zu diesen brauchen sie nicht aus der geopotentiellen Kote  $C_P$  durch Division durch einen Durchschnittswert einer geeigneten Schwere in einer Lotlinie gewonnen zu werden. Vorschläge für Gebrauchshöhen haben *Baeschlin* in [14], *F.R. Jung* in [15] und *Tardi* in [16] gemacht. Um unsern Aufsatz nicht zu lang werden zu lassen, beschränke ich mich auf diese Hinweise.

#### *Literatur*

- [1] *F.R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II. Teil: Die physikalischen Theorien, Leipzig 1884.
- [2] *E.H. Bruns*, Die Figur der Erde, 1878, Berlin.
- [3] *C.F. Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie, 1948, Zürich.
- [4] *K. Ramsayer*, Beiträge zur Fehlertheorie der Schwere-reduktion von Nivellements. Sonderheft Nr. 1 der (deutschen) Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1954.
- [5] *K. Ramsayer*, Genauigkeitsuntersuchungen der Schwere-reduktion von Nivellements. Deutsche Geodätische Kommission, München 1959.
- [6] *Th. Wand*, Prinzipien der mathematischen Physik und Potentialtheorie.
- [7] *Ch.A. Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, I. Teil: Vorstudien und Feldmessen, Braunschweig 1885.
- [8] *Alfred Schleusener*, Tafeln der Internationalen Normalschwere, München 1958.
- [9] *K. Ledersteger*, Die einheitliche Begründung der metrischen Höhendefinitionen. Bulletin géodésique, Nr. 32, 1954, S. 107–145.
- [10] *Th. Niethammer*, Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen, Bern 1932.
- [11] *C.F. Baeschlin*, Ergänzung zur Berechnung der mittleren Schwere in einer Lotlinie nach Th. Niethammer, unter Berücksichtigung der Isostasie, München 1955, 14 Seiten.
- [12] *Jean Vignal*, Nivellement et Gravité. Troisième Rapport préliminaire de la Section des Nivellements et Section de Gravimétrie présenté au groupe d'études N° 4, avril 1954.
- [13] *V. Baranov*, Altitude orthométrique et travail de la pesanteur. Rapport présenté au groupe d'études N° 4, Paris 1954.
- [14] *F. Baeschlin*, Untersuchungen über die Reduktion des Präzisionsnivellements, Bern 1925.
- [15] *F.R. Jung*, Bemerkungen zum Vorschlag von K. Ramsayer für die Schwere-reduktion des deutschen Haupthöhennetzes vom 29. Dezember 1952. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe II, Heft 9, S. 21.
- [16] *Pierre Tardi*, Solution adoptée par le Comité National Français pour le calcul des Altitudes à partir des Cotes Géo-Potentielles, 1957.