

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 58 (1960)

**Heft:** 9

**Artikel:** Vers une extension du problème de l'ellipse d'erreur

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-216110>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 09.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

15h.08	} Départ des trains en direction de Zurich.
15h.19	
17h.10	
16h.11	} Départ des trains en direction du Gothard.
17h.19	
15h.01	} Départ des trains en direction de Lucerne.
16h.05	

Les dames participeront au programme général.

### *Observations*

*Bagages:* Le samedi matin, les bagages pourront être déposés à l'Hôtel «Löwen».

*Horaire:* Les heures d'arrivée et de départ des trains sont tirées de l'horaire d'été. En raison du changement d'horaire au début d'octobre 1960, il sera prudent de vérifier les heures indiquées au programme.

*Inscription:* Les participants adresseront jusqu'au 1<sup>er</sup> octobre au plus tard leur bulletin d'adhésion au Service cantonal des améliorations foncières (Meliorationsamt) à Zoug. Ces bulletins seront transmis avec les indications individuelles.

*Logement et repas:* Les participants payeront le prix du logement et du petit déjeuner directement à l'hôtel.

Pour les repas en commun et les courses en autocar, les cartes de participants sont munies de coupons.

*Tenue:* Attendu que l'excursion se fera en autocar, il n'est pas nécessaire de se prémunir.

## **Vers une extension du problème de l'ellipse d'erreur**

*Par A. Ansermet*

Les lignes qui suivent constituent, à certains égards, un complément à l'article paru en juillet dernier (p. 231–239). Elles sont consacrées au calcul de l'ellipse d'erreur lorsque les mesures, en nombre surabondant, ne peuvent pas être considérées comme mutuellement indépendantes. Ce problème a été assez peu traité jusqu'ici. Il n'est pas exclu qu'il présente de l'intérêt, par exemple en électrotéléométrie; les conditions dans lesquelles on appliquera ces méthodes télémétriques modernes sont susceptibles de donner lieu, dans certains cas, à une corrélation non négligeable entre les éléments mesurés. Il s'agit surtout d'apprécier, comme ordre de grandeur, l'influence que peut avoir de la corrélation sur l'ellipse d'erreur.

Appliquons la méthode aux variations de coordonnées:

$$-f_i + v_i = a_i dx + b_i dy \quad a_i^2 + b_i^2 = 1 \quad (1)$$

où  $f_i$  est le terme absolu,  $dx$  et  $dy$  les inconnues (variations).

Supposons de plus qu'on connaisse la matrice des poids:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

qui est symétrique et faisons tout d'abord abstraction des éléments non diagonaux. La solution est bien connue:

$$[pav] = [pbv] = 0; \quad [pvv] = \text{minimum}$$

où les  $p$  sont les  $p_{11}$ ,  $p_{22}$  et  $p_{33}$ ; ce sont les équations normales sous forme condensée (coefficients:  $[paa]$ ,  $[pab]$ ,  $[pbb]$ ).

*Rôle des éléments non diagonaux:* ceux-ci ne sont plus négligeables.

A l'expression  $[pvv]$  il faut ajouter le groupe de six termes:

$$p_{12} v_1 v_2 + p_{13} v_1 v_3 + \dots + p_{32} v_3 v_2.$$

La première équation normale s'obtient en formant la demi-dérivée par rapport à  $dx$ ; bornons-nous au premier terme ci-dessus:

$$\frac{d(p_{12} v_1 v_2)}{dx} = p_{12} \left( v_1 \frac{dv_2}{dx} + v_2 \frac{dv_1}{dx} \right) = p_{12} (v_1 a_2 + v_2 a_1)$$

et finalement, en groupant tous les termes quadratiques et rectangulaires:

$$A = \begin{cases} p_{11} a_1 a_1 + p_{12} a_1 a_2 + p_{13} a_1 a_3 \\ + p_{21} a_2 a_1 + p_{22} a_2 a_2 + p_{23} a_2 a_3 \\ + p_{31} a_3 a_1 + p_{32} a_3 a_2 + p_{33} a_3 a_3 \end{cases}$$

pour le coefficient de  $dx$  dans la première équation normale, tandis que pour le coefficient de  $dy$  on obtient:

$$B = \begin{cases} p_{11} a_1 b_1 + p_{12} a_1 b_2 + p_{13} a_1 b_3 \\ + p_{21} a_2 b_1 + p_{22} a_2 b_2 + p_{23} a_2 b_3 \\ + p_{31} a_3 b_1 + p_{32} a_3 b_2 + p_{33} a_3 b_3 \end{cases}$$

Pratiquement le calcul matriciel fournit ces résultats par un double-produit:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a_2 & b_2 & \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ a_3 & b_3 & \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} a_1 + p_{21} a_2 + p_{31} a_3 & p_{11} b_1 + p_{21} b_2 + p_{31} b_3 \\ a_1 & b_1 \\ p_{12} a_1 + p_{22} a_2 + p_{32} a_3 & p_{12} b_1 + p_{22} b_2 + p_{32} b_3 \\ a_2 & b_2 \\ p_{13} a_1 + p_{23} a_2 + p_{33} a_3 & p_{13} b_1 + p_{23} b_2 + p_{33} b_3 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Double-produit:  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A' \end{bmatrix}$  (2)

$A'$  se déduisant de  $A$  en substituant les  $b_i$  aux  $a_i$ .

Cette matrice (2) permet de calculer les comultiplicateurs à posteriori des inconnues dont la matrice est égale à l'inverse de celle du système d'équations normales.

On ne pouvait guère envisager un cas plus simple puisque  $i = 1, 2, 3$ ; malgré cela il est malaisé de discuter ces résultats dont l'intérêt est cependant capital.

Comme il y a lieu surtout d'estimer le rôle joué par la covariance quant à son ordre de grandeur émettons l'hypothèse simplificatrice suivante: dans les matrices à priori des poids les éléments diagonaux sont sensiblement égaux ( $p_{11} \cong p_{22} \cong p_{33} = p$ ); admettons de plus que pour les éléments non diagonaux on peut aussi admettre une valeur commune  $p'$ . C'est l'influence exercée par cette valeur  $p'$  sur la matrice (2) qui présente surtout de l'intérêt. Dans les coefficients quadratiques  $A$  et  $A'$  des équations normales, les  $p'$  sont multipliés respectivement par  $[a_g a_h]$  et  $[b_g b_h]$  mais dans les coefficients rectangulaires  $B$  par  $[a_g b_h]$  moyennant que  $g \neq h$ .

*Exemple.* Considérons la matrice des coefficients  $a_i$  et  $b_i$ :

$$\begin{bmatrix} + 0.643 & + 0.766 \\ + 0.342 & - 0.940 \\ - 0.985 & + 0.174 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [paa] = [pbb] = 1,5 p \\ [pab] = 0 \end{matrix}$$

on a de plus, immédiatement:

$$[a_g a_h] = [b_g b_h] = -1,5 \quad \text{et} \quad [a_g b_h] = 0.$$

L'ellipse d'erreur reste circulaire même si  $p'$  n'est pas nul.

*Réciprocité des matrices.* Ce calcul est fréquent, à priori ou à posteriori; le calculateur peut établir une tablelle ou un nomogramme, ce qui facilite le travail. Soient:

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & & & b \\ & & & & \\ b & & & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} c & d & \dots & d & d \\ d & c & & & d \\ & & & & \\ d & & & c & d \\ d & d & \dots & d & c \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les matrices réciproques à  $n \times n$  éléments chacune

$$\begin{cases} ac + (n - 1) bd = 1 \\ bc + \{a + (n - 2) b\} d = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{C'est le problème connu de la trans-} \\ \text{formation linéaire avec des valeurs} \\ \text{particulières.} \end{array} \quad (4)$$

ou, en éliminant  $n$ :

$$(a - b)(c - d) = 1 \quad \text{contrôle bienvenu.} \quad (5)$$

*Exemple:*  $a = 1, b = + 0,25 (n = 7) c = 1,2, d = - 0,133$   
 $a - b = 3/4 \quad c - d = 4/3$

$a = 1 \quad n = 3$			$a = 1 \quad n = 5$		
$b =$	$d = p'$	$c = p$	$b =$	$d = p'$	$c = p$
- 0.20	+ 0.278	1.11	- 0.15	+ 0.326	1.196
- 0.15	+ 0.186	1.06	- 0.10	+ 0.151	1.060
- 0.10	+ 0.114	1.02	- 0.075	+ 0.100	1.030
- 0.05	+ 0.053	1.005	- 0.05	+ 0.059	1.011
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
+ 0.05	- 0.047	1.006	+ 0.05	- 0.043	1.010
+ 0.10	- 0.093	1.018	+ 0.10	- 0.079	1.032
+ 0.15	- 0.136	1.040	+ 0.133	- 0.100	1.053
+ 0.20	- 0.179	1.071	+ 0.15	- 0.110	1.066

En ce qui concerne les équations (4), le lecteur voit de suite l'analogie avec les équations aux coefficients de poids (termes absolus 1, 0, 0 ...).

*Application semi-numérique.* Pour mettre en évidence le rôle des  $p'$  on attribuera des valeurs numériques seulement aux coefficients  $a_i$  et  $b_i$ . Ceux-ci furent choisis pour que les axes de coordonnées coïncident avec ceux de l'ellipse d'erreur. Il y a cinq mesures linéaires que l'on peut fractionner en deux groupes; formons les produits matriciels comme précédemment:

$$\left[ \begin{array}{cc} 1.00 & 0.00 \\ p & p' \\ - 0.50 & + 0.866 \\ p' & p \\ - 0.50 & - 0.866 \\ p' & p' \\ + 0.707 & + 0.707 \\ p' & p' \\ + 0.707 & - 0.707 \\ p' & p' \end{array} \right] \left. \begin{array}{cc} p' & p' \\ p' & p' \\ p' & p' \\ p & p \\ p' & p \\ p & p \end{array} \right\} \text{1er groupe}$$

Le groupe des trois premières mesures donne lieu à un cercle d'erreur même si  $p'$  est différent de zéro, car on a encore:

$$[a_g a_h] = [b_g b_h] = - 1,5 \quad \text{et} \quad [a_g b_h] = 0 \quad (g \leq 3; h \leq 3) \quad g \neq h$$

L'ellipse d'erreur est encore circulaire pour l'ensemble des cinq mesures si  $p' = 0$ . On peut fractionner le calcul pour apprécier le rôle que jouent les deux dernières équations. Dans la seconde phase de la compensation, portant sur l'ensemble des cinq mesures, le calculateur peut choisir à volonté les coordonnées provisoires, mais déterminera en fonction de ces valeurs les termes absolus  $f_i$ . De plus, si c'est nécessaire, il y aura lieu d'ajouter les résidus  $v$  de la première phase avec ceux de la seconde. Ce problème est connu des praticiens.

Poursuivons la formation des produits matriciels:

$$\left[ \begin{array}{cc} p + 0,414p' & 0,00 \\ + 1,00 & 0,00 \\ - 0,5p + 1,914p' & + 0,866p - 0,866p' \\ - 0,5 & + 0,866 \\ - 0,5p + 1,914p' & - 0,866p + 0,866p' \\ - 0,5 & - 0,866 \\ + 0,707p + 0,707p' & + 0,707p - 0,707p' \\ + 0,707 & + 0,707 \\ + 0,707p + 0,707p' & - 0,707p + 0,707p' \\ + 0,707 & - 0,707 \end{array} \right]$$

et finalement:

$$\left[ \begin{array}{cc} 2,5 p - 0,5 p' & 0,00p + 0,00p' \\ 0,00p + 0,00p' & 2,5 p - 2,5 p' \end{array} \right]$$

pour la matrice du système d'équations normales; à cause de la symétrie les coefficients rectangulaires sont nuls.

Le rapport des axes de l'ellipse est:

$$k = \sqrt{(2,5p - 0,5p') : (2,5p - 2,5p')}$$

si  $p' > 0$ , on a:  $k > 1$ ,  
 et  $p' < 0$  entraîne:  $k < 1$ .

#### Détermination d'une paire d'ellipses

Deux points, A et B, sont déterminés chacun par deux mesures linéaires et, en plus, on mesure AB. Il y a quatre inconnues qui sont les corrections à apporter aux quatre coordonnées provisoires. La matrice des coefficients  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) est:

$$\left[ \begin{array}{cccc} + 0,781 & + 0,6245 & 0,00 & 0,00 \\ - 0,781 & + 0,6245 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & + 1,00 & 0,00 & - 1,00 \\ 0,00 & 0,00 & - 0,781 & - 0,6245 \\ 0,00 & 0,00 & + 0,781 & - 0,6245 \end{array} \right] \text{ (côté AB)}$$



et finalement:

$$\begin{bmatrix} 1,406 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,550 & 0,00 & -0,647 \\ 0,00 & 0,00 & 1,406 & 0,00 \\ 0,00 & -0,647 & 0,00 & 1,550 \end{bmatrix}$$

pour la matrice des équations normales d'où, immédiatement:

$$Q_{11} = 1 : 1,406 = 0,71 \quad \text{et} \quad Q_{22} = 0,783$$

$$k' = \sqrt{0,783 : 0,71} = 1,05.$$

Choisissons dans la tablelle les valeurs:

$$d = + 0,100 = p' \quad \text{et} \quad c = 1,030 = p;$$

un calcul analogue au précédent donne:

$$Q_{11} = 0,885; \quad Q_{22} = 0,833 \quad \text{et} \quad k' = \sqrt{0,885 : 0,833} = 1,03,$$

mais ici  $Q_{11} > Q_{22}$  ( $k' = \text{grand axe} / \text{petit axe}$ ).

Avant de poursuivre remarquons que le calcul de l'ellipsoïde d'erreur donne lieu aux mêmes développements, mais avec trois coefficients  $a_i, b_i, c_i$  au lieu de deux  $a_i$  et  $b_i$  pour l'ellipse. Si la surface d'erreur est sphérique pour  $p' = 0$ , elle reste sphérique quand  $p' \neq 0$ , mais avec les conditions spéciales:

$$\begin{cases} [a_g a_h] = [b_g b_h] = [c_g c_h] \\ [a_g b_h] = [a_g c_h] = [b_g c_h] = 0 \end{cases} \quad (g \neq h)$$

En conclusion, on peut dire que la solution du problème posé dépend avant tout de la matrice des poids; si les éléments non diagonaux sont nuls ou négligeables, la théorie usuelle de l'ellipse d'erreur subsiste. Quand ce n'est pas le cas, il faut s'efforcer de réaliser l'hypothèse simplificatrice énoncée au début: valeurs communes  $p$ , respectivement  $p'$ , pour les éléments diagonaux et non diagonaux. Dans le cas général, il faut appliquer la formule (2). Encore une fois le but de ces lignes était surtout d'évaluer l'influence de la corrélation lors du calcul d'ellipses d'erreur au point de vue de l'ordre de grandeur.

### Littérature

- [1] C. F. Baeschlin, Ausgleichsrechnung und Landesvermessung (Multigraphie, Zurich).
- [2] W. Grossmann, Grundzüge der Ausgleichsrechnung (Springer, Berlin).
- [3] R. Marchant, La compensation de mesures surabondantes (Bruxelles).
- [4] A. Ansermet, A propos d'une forme générale de compensation (SZfV, 1959, N° 11).
- [5] A. Ansermet, Détermination des poids en cas de covariance (SZfV, 1960, N° 7).