

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Band: 59 (1961)

Heft: 2

Artikel: Le calcul de la courbure des méridiens dans les réseaux géodésiques à coordonnées conformes

Autor: Ansermet, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216890>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le calcul de la courbure des méridiens dans les réseaux géodésiques à coordonnées conformes

Par A. Ansermet

Au cours de ces dernières années la *Revue des Mensurations* a consacré déjà de nombreuses pages aux projections conformes. Les lignes qui suivent constituent un modeste complément aux articles parus précédemment. Il convient tout d'abord de rappeler succinctement les résultats obtenus dans ce domaine important de la géodésie.

Rappel de notions usuelles

Pour éviter des développements trop étendus, nous admettrons que la projection est double; au parallèle central du territoire sur l'ellipsoïde correspond le parallèle central sur une sphère auxiliaire dite de référence. Les cônes tangents à ces deux surfaces suivant ces parallèles ont même apothème (Mantellinie). Sur la sphère les méridiens se projettent suivant des grands cercles passant par les pôles, ce qui simplifie le calcul. C'est le but de la présente note de déterminer la courbure des transformées planes de ces courbes; on peut procéder même par voie semi-graphique dans certains cas.

La projection de l'ellipsoïde sur la sphère donne lieu à des déformations très faibles; les développements en séries qui expriment les altérations linéaires ne contiennent plus de termes de 2^e ordre.

Le rayon R de la sphère pour la latitude de Berne est:

$$R_B = \sqrt{M_B N_B} \quad \log R_B = 3,80474 \text{ (km)} \quad \log N_B = 3,80542$$

Dans l'exemple numérique qui sera traité ci-après et, pour simplifier, admettons la latitude 45°: $\log N_{45} = 3,80537$

d'où $\log R_{45} = 3,80464$

car: $\log R_B - \log R_{45} = 0,00010 = 2 (\log N_B - \log N_{45})$

ce qui résulte de la propriété connue:

le rayon M de courbure du méridien varie comme le cube de la normale N .

$$M_B: M_{45} = N^3_B: N^3_{45} \quad \text{d'où} \quad R^2_B: R^2_{45} = N^4_B: N^4_{45}$$

$$\text{et} \quad R_B: R_{45} = N^2_B: N^2_{45}.$$

Les latitudes ne sont pas rigoureusement les mêmes sur les deux surfaces; quant aux longitudes, elles sont amplifiées suivant un coefficient d'amplification très voisin de l'unité. Cette solution est de C. F. Gauss; on pourrait concevoir des solutions plus générales mais ne présentant guère qu'un intérêt théorique.

La projection de la sphère dans le plan est un problème plus complexe; dans les séries qui expriment les déformations linéaires les termes de 2^e ordre ne s'éliminent pas:

$$m - 1 = f(x^2, y^2, xy, A, B) + \dots$$

où m est le rapport de similitude ou coefficient de déformation, x, y les coordonnées planes, A et B des paramètres qui dépendent de la forme et de l'orientation du territoire. Cette solution est dite générale ou à variables non dissociées; B est le coefficient de xy . Admettons momentanément, pour faciliter le raisonnement, $B = 0$.

Une solution avantageuse consiste à fractionner le calcul; on a recours à une solution intermédiaire ou provisoire, de coordonnées (x_0, y_0) telles que:

$$x = x_0 + T_3, y = y_0 + T'_3$$

où T_3 et T'_3 sont des groupes de termes de 3^e ordre seulement:

$$x + iy = x_0 + iy_0 + \frac{1}{3} A (x_0 + iy_0)^3 + \dots \quad (i = \sqrt{-1}) \quad ([5] \text{ p. } 165).$$

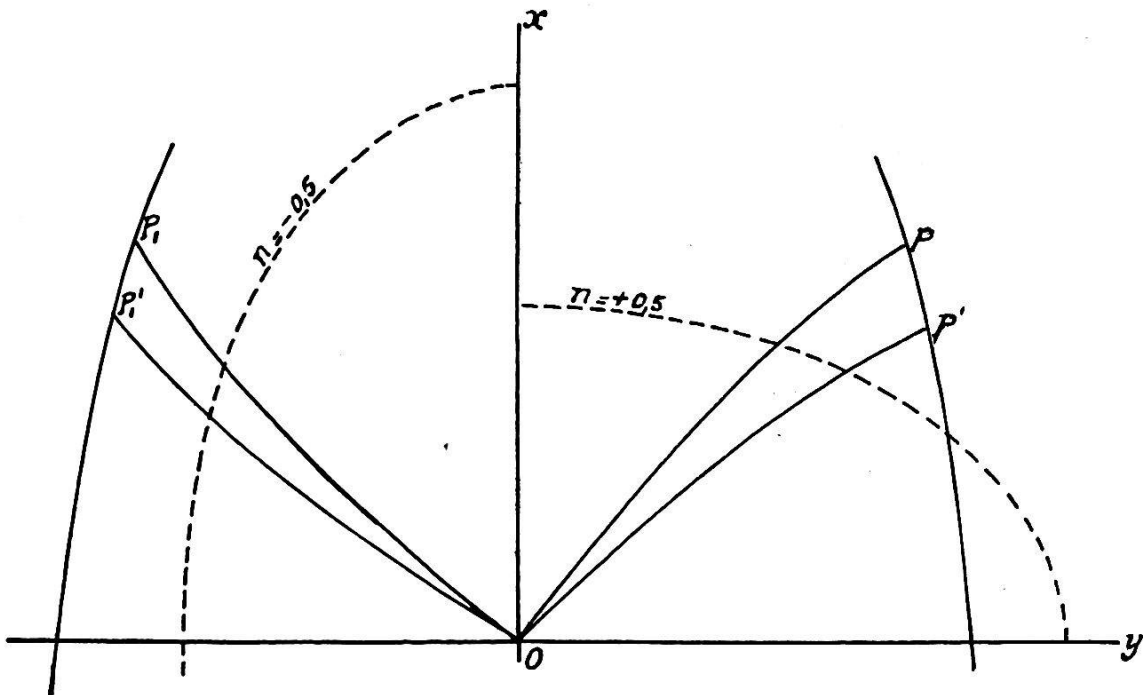
Il est facile d'interpréter géométriquement ces termes de 3^e ordre; les avis diffèrent quant au choix de (x_0, y_0) . Ici il sera donné la préférence à la projection stéréographique que l'on peut qualifier de standard; elle se prête particulièrement bien à l'emploi de coordonnées polaires, ce qui facilitera encore l'interprétation des termes de 3^e ordre

$$-\frac{n}{12 R^2} \leq \frac{1}{3} A \leq \frac{n}{12 R^2}$$

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{pour} \quad A = 0$$

$$m - 1 = \frac{1}{4 R^2} \left\{ (1 \pm n) x^2 + (1 \mp n) y^2 \right\} + \dots \quad ([6], \text{ p. } 108) \quad (1)$$

en valeur absolue $n \leq 1$



Pour les valeurs $n = 0$ et $n = \pm 1$, la littérature géodésique fournit toutes les formules; la courbure des méridiens sera calculée pour le cas $n = \pm 0,5$ en appliquant le théorème de Gauss-Bonnet. Sur la figure on a tracé une isomètre ($m = \text{constante}$) pour chacune des deux valeurs $n = \pm 0,5$. Certains géodésiens disent «indicatrice» au lieu de isomètre; cela peut créer de la confusion avec d'autres indicatrices (de Tissot, de Dupin). L'équation (1), pour $m = \text{constante}$, est celle d'un faisceau linéaire d'ellipses circonscrit à un carré quand n varie. Dans la figure, les axes de coordonnées coïncident avec ceux des isomètres.

Telles sont les notions usuelles qu'il convenait de rappeler.

Courbure des méridiens

Considérons deux petits arcs de méridiens PP' et P_1P_1' ; le théorème de Gauss-Bonnet sera appliqué aux deux contours fermés $OPP'O$ et $OP_1P_1'O$. La variation totale de courbure est indépendante de la valeur du paramètre n . Pour tous ces calculs relatifs à l'application du théorème de Gauss-Bonnet, il n'est pas nécessaire de posséder des éléments précis; un calcul semi-graphique, si l'échelle de la carte est suffisante, peut même être envisagé. L'excès sphérique, pour le contour fermé, est $5'',07$ pour 1000 km^2 ; le calcul à $0'',01$ près exige qu'on connaisse la surface à 2 km^2 près.

Numériquement on a les formules simples:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{\rho} \Delta\varphi + \frac{1}{2} \frac{R}{\rho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t_0 + \dots \\ y &= \frac{R}{\rho} \lambda \cos \varphi_0 - \frac{R}{\rho^2} \Delta\varphi \lambda \cos \varphi_0 t_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\rho'' = 206265'' \quad \cos \varphi_0 = \sin \varphi_0 = 0.707 \quad t_0 = \text{tang } \varphi_0 = 1 \\ \varphi_0 = 45^\circ \text{ (origine)}$$

$$\text{latitude de } P = \varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_0 + 2062'',65 + 206'',26$$

$$\text{latitude de } P' = \varphi_0 + \Delta\varphi' = \varphi_0 + 2062'',65$$

$$\text{Considérons le méridien: } \lambda = 4125'',3 \left(= \frac{1}{50} \rho'' \right),$$

valeurs choisies pour faciliter les calculs.

Toujours dans ([3] p. 341-43 et 419-23) on trouve

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 + \frac{1}{2\rho} \Delta\varphi \lambda \cos \varphi_0 + \dots \quad (\text{pour } n = 0)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \left(1 + \frac{\Delta\varphi^2}{2\rho^2} - \frac{1}{6\rho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 + \dots \right) \\ (\text{pour } n = +1, \text{ système suisse})$$

où γ est la convergence des méridiens. En formant les dérivées $d\gamma: d\Delta\varphi$, on vérifie que la courbure des méridiens en plan est constante pour la valeur $n = 0$ du paramètre, ce que l'on savait; il y a un point d'inflexion pour $\Delta\varphi = 0$ quand $n = +1$. Cette question sera reprise sous une autre forme.

Coordonnées polaires. Les géodésiques issues de l'origine O ont un point d'inflexion en O ; ces transformées planes ont leur concavité tournée vers le grand axe de l'isomètre $m = \text{constante}$.

Pour la Suisse $(m - 1) \leq 1: 5500$ (18 cm/km)

théoriquement on pourrait réaliser: $(m - 1) \leq 11,6$ cm/km.

Le calcul ci-après sera développé sur la base des valeurs dites principales; le but de ces lignes n'est pas de rechercher la haute précision, mais surtout d'indiquer la marche à suivre.

Les arcs tels que PP' ou OP forment avec leurs cordes respectives de petits angles (réductions à la corde). Il est avantageux de considérer ces réductions en valeur absolue et de calculer leur somme et leur différence. En coordonnées planes rectangulaires on a, pour la courbure de la transformée d'un côté du réseau ou d'un méridien:

$$(dz: ds) = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \sin z - \frac{\partial m}{\partial y} \cos z \right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{2 R^2} \left\{ (1 + n) x \sin z - (1 - n) y \cos z \right\}$$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad \text{tgz} = dy: dx \quad ([6] \text{ p. } 108).$$

Sur le côté OP et à la distance s de l'origine O on a:

$$x \cong s \cdot \cos z \quad y \cong s \cdot \sin z \quad (s \text{ compté sur l'arc})$$

$$(dz: ds) \cong \frac{1}{2 R^2} n \cdot s \cdot \sin 2z \quad (z = \text{azimut } OP)$$

La transformée OP peut être assimilée à une parabole cubique; la tangente au point d'inflexion O est l'axe des abscisses ξ tandis que les ordonnées seront désignées par η :

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \cong \frac{1}{2 R^2} n \xi \sin 2z; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{4 R^2} n \xi^2 \sin 2z; \quad \eta = \frac{1}{12 R^2} n \xi^3 \sin 2z.$$

L'altération totale de courbure est donnée avec assez de précision par $d\eta: d\xi$ (radians) calculé à l'extrémité du côté.

On passe du point $P_0(x_0, y_0, s_0)$ au point $P(x, y, s)$ en tenant compte de l'allongement du côté et de l'ordonnée η_0 en P_0 . Ces deux éléments ou composantes de la résultante P_0P correspondent aux groupes de termes $\frac{1}{3} A (x_0 + iy_0)^3$ en ce sens que la résultante est la même. Ces appoints sont de 3^e ordre. Pour l'allongement on a en P_0 :

$$m - 1 = \frac{1}{4 R^2} \left\{ (1 + n) x_0^2 + (1 - n) y_0^2 \right\} \cong$$

$$\cong \frac{s_0^2}{4 R^2} \left\{ (1 + n) \cos^2 z + (1 - n) \sin^2 z \right\} = \frac{s_0^2}{4 R^2} (1 + n \cos 2z).$$

Le terme en n donne la composante de $P_0 P$ dans la direction OP_0 en intégrant par la formule dite des trois niveaux

$$\frac{s_0}{6} \left(0 + 4 \frac{s_0^2}{16 R^2} n \cos 2z + \frac{s_0^2}{4 R^2} n \cos 2z \right) = \frac{s_0^3}{12 R^2} n \cos 2z$$

Ces $\sin 2z$ et $\cos 2z$ montrent quelle orientation a $P_0 P$ par rapport à OP_0 . Si les axes de l'isomètre coïncident avec les axes de coordonnées, on a:

$z = 0$ ou $z = 90^\circ$ $\sin 2z = 0$ Valeur principale de la courbure nulle.

Si $z = 45^\circ$ ou $z = 135^\circ$, la courbure est maxima (bissectrices)

$\cos 2z = 0$; les bissectrices coïncident avec les diagonales du carré inscrit dans le faisceau ponctuel d'isomètres relatif à la valeur m ; le paramètre n est sans influence sur la longueur de la transformée.

En résumé on voit que cette solution par fractionnement est avantageuse. Ce point provisoire P_0 ($n = 0$) est d'un calcul facile.

Courbure de PP' . Il suffit d'appliquer les résultats obtenus ci-dessus. L'arc PP' ayant une longueur finie, on peut calculer la courbure au point milieu de l'arc. Admettons de plus que l'arc $P_1 P_1'$ est symétrique de PP' par rapport à l'axe Ox . Les coordonnées (x, y) pour P et (x', y') pour P' ont été calculées d'après les formules (3):

$$\lambda = \rho'' : 50 \quad \Delta\varphi = 2062'',65 \text{ pour } P' \quad (206'',26 \text{ pour } P'P)$$

$$x = 70,79 \text{ km} \quad y = 89,19 \text{ km} \quad x' = 64,41 \text{ km} \quad y' = 89,28 \text{ km}$$

valeurs faciles à convertir en coordonnées polaires pour calculer les altérations totales de courbure d'après la formule $\frac{1}{4 R^2} n \cdot OP_0^2 \sin 2z$.

L'excès sphérique du triangle OPP' est $1'',460$. En valeur absolue la variation totale de courbure est la même pour OP et OP_1 , ainsi que pour OP' et OP_1' à cause de la symétrie. Pour deux directions symétriques par rapport aux bissectrices, il y a égalité en valeur algébrique.

Rappelons que la formule qui donne la courbure de la transformée plane d'une géodésique est dite parfois de Schols-Laborde. On peut trouver une valeur de z pour laquelle cette courbure est indépendante du paramètre n ; cette direction peut coïncider avec celle pour laquelle la courbure est maxima.

$$\text{Enfin si:} \quad xy = x'y',$$

l'altération totale de courbure est la même pour OP et OP' . C'est ce qui se présente à peu près pour les points Feldberg et Lägern.

Pour les contours fermés on trouve les variations de courbure:

	$n = 0$	$n = +0,5$								
côté OP (ou OP_1)	= 0",00	côté $OP = +8",002$								
côté OP' (OP_1')	= 0",00	côté $OP' = -7",287$								
côté PP' (ou P_1P_1')	= 1",46	côté $PP' = +0",745$								
Totaux:	<u>+1",46</u>	<u>+1",460</u>								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="text-align: right;">côté OP_1</td> <td style="text-align: right;">= -8",002</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">côté OP_1'</td> <td style="text-align: right;">= +7",287</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">côté P_1P_1'</td> <td style="text-align: right;">= +2",175</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">Total:</td> <td style="text-align: right;"><u>+1",460</u></td> </tr> </tbody> </table>			côté OP_1	= -8",002	côté OP_1'	= +7",287	côté P_1P_1'	= +2",175	Total:	<u>+1",460</u>
côté OP_1	= -8",002									
côté OP_1'	= +7",287									
côté P_1P_1'	= +2",175									
Total:	<u>+1",460</u>									

Une solution consisterait à effectuer le calcul pour les valeurs $n = 0$ et $n = \pm 1$ puis à interpoler; ce contrôle a été fait dans le cas particulier.

On pourrait choisir les points P et P' de part et d'autre du point d'inflexion de la transformée du méridien; un cas analogue fut traité récemment ([6] p. 109). Dans le voisinage d'un point d'inflexion la courbure est très faible.

Les points pour lesquels $\Delta\varphi = 0$ ne sont en général pas situés rigoureusement sur l'axe des y . Les calculs ci-dessus sont donc basés sur les valeurs principales qui suffisent dans un champ restreint comme le territoire suisse.

Cas général. C'est celui où les variables ne sont plus dissociées. Dans l'expression $m - 1 = \text{constante}$ (isomètre) il y a un terme en xy . Admettons par exemple que les axes des isomètres coïncident avec les bissectrices des axes de coordonnées; les carrés inscrits dans les faisceaux linéaires d'isomètres ont alors leurs sommets sur les axes Ox et Oy ; ce cas fut aussi traité récemment ([5] p. 165).

Le théorème de Gauss-Bonnet est encore applicable et l'arc PP' sera assimilé à un côté d'un réseau géodésique transformé. Ici encore il n'est pas nécessaire de connaître avec une grande précision les éléments qui servent à calculer les altérations totales de courbure. Pratiquement ce cas général présente peu d'intérêt; en général les variables sont dissociées et les géodésiens donnent la préférence aux solutions $n = 0$ ou $n = \pm 1$. Cela peut se justifier en géodésie tandis qu'au point de vue mathématique pur on élimine ainsi des solutions présentant de l'intérêt. La forme du territoire à mesurer, son orientation dans le sens de la plus grande dimension sont des éléments dont on ne peut pas faire abstraction. Les valeurs $n = \pm 0,5$ peuvent constituer des solutions permettant de réduire les déformations.

Littérature

- [1] *C. F. Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie, Zürich, Orell Füßli.
- [2] *G. Darboux*, Sur la construction des cartes, Bulletin sc. mathématiques 1911, p. 23, 55.

- [3] *Jordan-Eggert*, Handbuch der Vermessungskunde III (1939).
- [4] *J. Laborde*, *Traité des projections* IV, Paris.
- [5] *A. Ansermet*, *Les projections conformes à variables non dissociées*, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Nr. 6, 1957.
- [6] *A. Ansermet*, *L'application en géodésie du théorème de Gauss-Bonnet*, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Nr. 4, 1958.

Die Bedeutung unserer Bergstraßen

Von H. Braschler, dipl. Ing., St. Gallen

In der Erzählung «Der Besuch auf dem Lande» von Jeremias Gott-helf erhalten wir Einblick in die Ansicht des Emmentaler Pfarrherrn über den Straßenbau jener Zeit. Eine Scharfschützenkompanie wird entlassen, und der Unterleutnant Jakobli aus der Stadt und der Korporal vom Lande wandern auf den Hof Sime Sämelis zu, das väterliche Gut des Scharfschützenkorporals, wobei folgendes Gespräch am Abend sich abwickelt: «Straßen seien nötig, nach Soldaten und Schulmeistern das Nötigste, sage sein Vater; sie seien die Adern des Landes, wandte Jakobli bescheiden ein. Davon verstehe sein Vater nichts, sagte Sime Sämeli. Wider Straßen am rechten Ort habe er nichts, aber daß man allen Großräten die Straßen über ihre Kirschbäume führe, damit sie die Leitern ersparen könnten, und all Finger breit eine Heerstraße mache, selb sei über das Bohnenlied. Wenn das so fortgehe, so müsse ihm ein Gesetz gemacht sein, daß man die Erdäpfel für die armen Leute auf den Köpfen der Großräte pflanzen dürfe.»

Damit stellte der Schweizer Schriftsteller drastisch dar, wie eben immer wieder, zum Teil bis in die neueste Zeit hinein, beim Straßenbau auf unzählige private und persönliche Ansichten und Begehren Rücksicht genommen wurde. Dadurch entbehren viele unserer Straßen jener Großzügigkeit der Planung, die heute mit einem gewaltigen Kostenaufwand nachgeholt werden muß. Kurzsichtigkeit und «Kirchturmpolitik» rächen sich nun bitter und spürbar an unserer Generation, obwohl wir durchaus nicht etwa jenen Weitblick unserer Väter verneinen wollen, der gerade vielfach in der Planung und in der Technik bedeutender früherer Werke zugrunde lag und auch heute noch unserer vollen Anerkennung würdig ist. Erinnern wir uns beispielsweise an die Aufgeschlossenheit, mit der in Genf unter dem nachmaligen General G. H. Dufour als Kantonsingenieur geplant und gebaut wurde. Staunend stehen wir vor den von unsern Altvordern erstellten Bergbahnen und Alpenstraßen.

Vielenorts in unserem Lande entstanden aber eben aus den alten Karrwegen allmählich die Straßen bis hinauf zu den Staatsstraßen mit ihren Ränken und Biegungen, ehemals Rücksicht nehmend auf lokale Bedürfnisse. Sie gaben im Laufe der Jahre immer wieder zu Korrekturen Anlaß, und erst heute, mit dem zunehmenden Straßenverkehr, im Zeit-