

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Band: 59 (1961)

Heft: 9

Artikel: Gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und der Lotkrümmungen für den Punkt St. Anton dse Basis-Vergrößerungsnetzes Heerbrugg

Autor: Müller, Pierre / Gassmann, Fritz

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216912>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations
foncières; Société suisse des ingénieurs du
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 9 · LIX. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. September 1961

Gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und der Lotkrümmungen für den Punkt St. Anton des Basis-Vergrößerungsnetzes Heerbrugg

Von Fritz Gassmann und Pierre Müller

Zusammenfassung

Im Zusammenhang mit der Basismessung Heerbrugg war die Aufgabe gestellt, für den Punkt St. Anton des Vergrößerungsnetzes die Lotkrümmungen, das heißt die Abweichungen der Lotlinie von ihrer Tangente im Oberflächenpunkt, bis zum Meeresniveau hinunter zu bestimmen. Die Aufgabe wurde auf Grund von Schweremessungen in einem Umkreis von rund 2 km Radius um den Punkt St. Anton gelöst. Aus den Ergebnissen der Schwerevermessung wurde die Gesteinsdichte der sogenannten sichtbaren Massen bestimmt und das durch Wegnahme der Anziehung dieser Massen reduzierte Schwerefeld, das sogenannte Freiluftfeld, mit Hilfe eines harmonischen Polynoms rechtwinkliger Raumkoordinaten approximiert. Der Anteil der Anziehung der sichtbaren Massen an die gesuchten Lotkrümmungen wurde mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine, der Anteil des Freiluftfeldes, mit dem automatisch das Feld unsichtbarer Störungsmassen mitberücksichtigt ist, mit Hilfe des harmonischen Polynoms bestimmt.

Summary

In connection with the base-line measurement Heerbrugg we were asked to find the curvatures of the plumb line for the point St. Anton of the base-expansion figure, i.e. the deviations of the plumb line from its tangent at the surface point, down to sea level. The computation was based on gravity measurements carried out in an area of 2 km radius around the point St. Anton. From the results of the gravity survey the rock density of the so-called visible masses was computed. The gravity field was reduced by subtracting the attraction of the visible masses,

and the reduced field, called the free air field, was approximated by a harmonic polynomial of three rectangular coordinates. The curvatures of the plumb line are due to two fields, one being the attraction field of the visible masses, which was evaluated by the aid of an electronic computing machine, the other field being the free air field (automatically taking into account the attraction of invisible disturbing masses), which was calculated by aid of the harmonic polynomial.

A. Einleitung

1. Bei Heerbrugg im Rheintal südlich des Bodensees ist eine Basis und im Anschluß daran ein Vergrößerungsnetz gemessen worden (siehe dazu F. Kobold, 1960¹). Der Verfasser, F. Gassmann, hat es übernommen, für den Punkt St. Anton des Vergrößerungsnetzes die Lotkrümmungen, das heißt die Abweichungen der Lotlinie von ihrer Tangente im Oberflächenpunkt, bis zum Meeresniveau hinunter zu bestimmen. Die Resultate dieser Bestimmung liegen nunmehr vor. Eine vollständige Darstellung der Bestimmung wird in der vorgesehenen umfassenden Publikation über die Basismessung Heerbrugg erscheinen. Die vorliegende Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung der Bestimmungsmethode und der wichtigsten Resultate. Der Präsident der Schweizerischen Geodätischen Kommission, Prof. Dr. F. Kobold, hat sein Einverständnis zur Veröffentlichung gegeben, wofür ihm hier angelegentlich gedankt sei.

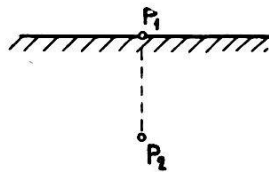
2. Der Verlauf der Lotlinie wurde nach einer Methode bestimmt, die von F. Gassmann 1960 publiziert und von den Verfassern für den vorliegenden Fall noch verbessert worden ist (die Publikation ist im folgenden einfach mit F. G. 1960 zitiert). Die numerischen Rechnungen sind von P. Müller durchgeführt worden. Speziell hat er auf der elektronischen Rechenmaschine ERMETH des Instituts für Angewandte Mathematik der ETH auf Grund von Programmen gerechnet, die er teils für seine demnächst abgeschlossene Dissertation, teils im besonderen für die vorliegende Arbeit ausgearbeitet hat. Der Leitung des Instituts für Angewandte Mathematik und besonders Herrn A. Schai sei für das freundliche Entgegenkommen und die gewährte Hilfe bestens gedankt. Die zur Bestimmung der Gesteinsdichte und des Verlaufs der Lotlinie notwendigen Schweremessungen sind von den Ingenieuren der Schweizerischen Geodätischen Kommission, den Herren Dr. E. Hunziker, W. Fischer und N. Wunderlin, vorbereitet und durchgeführt worden. Dr. N. Pavoni, Geologe am Institut für Geophysik der ETH, hat Angaben über den vermutlichen Verlauf der Felsoberfläche unter der Quartärauffüllung des Rheintals im Bereiche der Basis Heerbrugg und über die vermutliche Dichte des Quartärmaterials geliefert. Ferner hat er zusammen mit Dr. Hunziker das Stationsnetz begangen, um allfällige dem Geologen erkennbare Dichteinhomogenitäten der Gesteine festzustellen. Die Ablesung der mittleren Geländehöhen für die Terrainkorrekturen hat A. Berchtold,

¹ Die Autorennamen mit Jahreszahl beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Assistent der Schweizerischen Geodätischen Kommission, besorgt. Die Zeichnungen hat S. Reniear am Institut für Geophysik ausgeführt. Die Verfasser danken allen genannten Herren herzlich für ihre Mitarbeit, ebenso Fräulein V. Landolt vom Institut für Geophysik für die Reinschrift des Manuskriptes.

B. Gravimetrisch bestimmte Gesteinsdichte und vertikaler Freiluftgradient der Schwere

3. Auf die einfachste Art kann man die Gesteinsdichte ρ bei horizontaler Erdoberfläche und homogenem Untergrund bestimmen, indem man die Schweredifferenz S zwischen einem Oberflächenpunkt P_1 und einem in der Tiefe h vertikal darunterliegenden Punkt P_2 mißt (Figur 1). Ist $k_0 = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{grsec}^2$ die Gravitationskonstante, c der vertikale

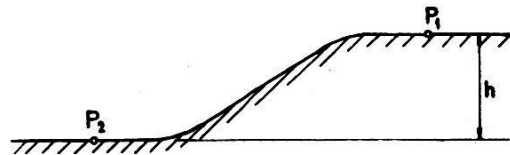


Figur 1. Gesteinsdichtebestimmung mit Meßpunkt unter Tage.

Schweregradient in freier Luft, g die Schwerebeschleunigung und $S = g(P_2) - g(P_1)$, so ist, wenn man den Untergrund als homogenen, unendlich ausgedehnten Halbraum betrachtet, $\rho = (hc - S)/4\pi k_0 h$. Für den Fehler $d\rho$, herrührend von einem Fehler dc des Freiluftgradienten, ergibt sich mit $\rho \approx 2,65 \text{ gr/cm}^3$ und $c \approx 0,31 \text{ mgl/m}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c}{4\pi k_0 \rho} \cdot \frac{dc}{c} \approx 1,4 \cdot \frac{dc}{c}$$

4. Die Erdoberfläche sei nun als uneben angenommen, und P_2 befinde sich ebenfalls an der Erdoberfläche (Figur 2). Sind T_1 und T_2 die Terrainkorrekturen für die Dichte 1 in den Punkten P_1 und P_2 (das heißt



Figur 2. Gesteinsdichtebestimmung mit zwei Meßpunkten an der Erdoberfläche.

ρT_1 ist der Zuwachs, den die Schwere in P_1 erfahren würde, wenn das Terrain durch Abtragung der Erhebungen und Ausfüllung der Vertiefun-

gen mit Material von der Dichte ρ auf das Niveau von P_1 ausgeebnet würde), und wird von horizontalen Schweregradienten abgesehen, so ist

$$\rho = (hc - S)/(2 \pi k_0 h + T_2 - T_1)$$

und

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{hc}{(2 \pi k_0 h + T_2 - T_1) \rho} \cdot \frac{dc}{c}$$

Der Fall von Abschnitt 3 kann als ein Spezialfall mit $T_2 = 2 \pi k_0 h$ und $T_1 = 0$ betrachtet werden. Kann man $T_2 - T_1$ gegenüber der Plattenkorrektur $2 \pi k_0 h$ vernachlässigen (wenn zum Beispiel die Terrainoberfläche symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$ ist wie in Figur 2, so ist $T_2 - T_1 = 0$), so ist

$$\frac{d\rho}{\rho} \cong \frac{c}{2 \pi k_0 \rho} \cdot \frac{dc}{c} \cong 2,8 \frac{dc}{c}$$

Ist $T_2 - T_1$ negativ, so wird der Faktor vor dc/c noch größer als 2,8.

5. Bei der gravimetrischen Gesteinsdichtebestimmung nach den bekannten Verfahren wird c als gegeben betrachtet und dafür der Wert $c_n = 0,3085$ mgl/m des Freiluftgradienten der Normalschwere genommen. In Wirklichkeit kann aber c um einige Prozent von c_n abweichen (siehe zum Beispiel die Zusammenstellung von Zahlenwerten von H. Rische, 1957, Seite 49). Im Falle 4 entspricht einer Abweichung des Freiluftgradienten von 5% vom Normalwert für $T_2 - T_1 = 0$ ein Fehler von 14% in der gravimetrisch bestimmten Dichte ρ . Will man daher eine Gesteinsdichte unter Angabe des mittleren Fehlers bestimmen, so muß man die Abweichungen des vertikalen Freiluftgradienten von seinem Normalwert c_n berücksichtigen.

C. Eine Methode zur gleichzeitigen Bestimmung der Gesteinsdichte, des Freiluftgradienten und der Lotkrümmungen auf Grund von Schweremessungen

6. In F. G. 1960 ist eine Methode zur gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten mit Berücksichtigung der Abweichungen des Freiluftgradienten vom Normalwert dargelegt. Sie beruht auf der Zerlegung des Feldes \vec{g} der Schwerebeschleunigung in drei Bestandteile nach der Gleichung $\vec{g} = \vec{\gamma} + \vec{s} + \vec{u}$.

$\vec{\gamma}$ ist die Normalschwere, \vec{s} das Gravitationsfeld der sichtbaren und \vec{u} das Gravitationsfeld der unsichtbaren Störungsmassen. Es werden dabei zwei gegebene Felder durch harmonische Polynome dargestellt, das eine zur gravimetrischen Gesteinsdichtebestimmung, das andere zur Bestimmung der Lotkrümmungen.

7. Bei der Anwendung auf den Punkt St. Anton des Basisvergrößerungsnetzes Heerbrugg hat sich gezeigt, daß man die Methode noch er-

heblich vereinfachen kann. Einmal kann man mit der Darstellung eines einzigen Feldes durch harmonische Polynome auskommen, ferner läßt sich die explizite Berücksichtigung der Normalschwere bei der Berechnung der Lotkrümmungen umgehen.

8. Wie bei F. G. 1960 (siehe die dortige Figur) wird ein Stück der Erdkruste, nämlich eine weitere Umgebung der Meßfläche, als «sichtbare Masse» abgegrenzt (die Meßfläche ist das Stück der Erdoberfläche, in dem die Schweremessungen ausgeführt werden). Nach unten reicht die sichtbare Masse bis zu einer willkürlich wählbaren Fläche, der Reduktionsfläche. Denkt man sich die sichtbare Masse weggenommen, so schweben die Meßpunkte im freien Raum oder, wie man sich auch ausdrückt, in freier Luft (der Einfluß der Atmosphäre auf das Schwerfeld kann vernachlässigt werden). Durch die Wegnahme der sichtbaren Masse wird das Schwerfeld \vec{g} um das Feld \vec{s} vermindert. $\vec{p} = \vec{g} - \vec{s} = \vec{\gamma} + \vec{u}$ sei daher Freiluftfeld genannt.

9. Nach F. G. 1960 besteht die sichtbare Masse aus dem als homogen angenommenen Probekörper, dessen Dichte ρ zu bestimmen ist, und dem übrigen Teil mit bekannter Dichte. Das Freiluftfeld \vec{p} hat im Bereich der Meßfläche und im Raume darunter einen glatten Verlauf, so daß sich seine Vertikalkomponente gut durch ein harmonisches Polynom $\Pi(x, y, z)$ von niedrigem Grad in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z approximieren läßt. ρ_0 sei ein bekannter Näherungswert für die gesuchte Dichte und $\rho = \rho_0 + \sigma$. Ist k der Grad von Π , so ist $(k + 1)^2$ die Anzahl der Koeffizienten, die zusammen mit σ aus den gemessenen Schwerewerten zu bestimmen sind.

10. Als Nullpunkt 0_0 des Koordinatensystems werde ein mittlerer Punkt der Meßfläche genommen, x und y seien parallel zu den Landeskoordinaten, und die $+z$ -Achse zeige vertikal nach unten. $P_1, P_2 \dots P_n$ seien die Punkte der Meßfläche, in denen die Schwere gemessen wurde. Der Wert, den eine Größe im Meßpunkt P_i besitzt, sei im folgenden durch den Index i gekennzeichnet. Zum Beispiel ist g_i die im Punkte P_i gemessene Schwere.

11. Nach F. G. 1960, Abschnitt 18, ist

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, z) = & A + B_0x + B_1z + B_2y \\ & + C_0(x^2 - y^2) + C_1xz + C_2(z^2 - y^2) + C_3xy + C_4yz + \dots \end{aligned}$$

12. Die z -Komponente von \vec{p} , die durch Π zu approximieren ist, sei p_i''' . $(\rho_0 + \sigma) K$ beziehungsweise s_b''' sei die z -Komponente der Gravitationsbeschleunigung, herrührend vom Probekörper beziehungsweise vom übrigen Teil der sichtbaren Masse. Nach 8 ist daher

$$p_i''' = g_i - (\rho_0 + \sigma) K_i - s_{bi}'''.$$

13. Es werden überschüssige Beobachtungen gemacht, das heißt, die Anzahl $m = 1 + (k + 1)^2$ der Unbekannten ist kleiner als n . Die Unbe-

kannten, nämlich σ und die Koeffizienten A, B_0, B_1, \dots , sind durch vermittelnde Ausgleichung zu bestimmen. Für die Fehlergleichungen hat man den Ansatz

$$\Pi(x_i, y_i, z_i) - p_i''' = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

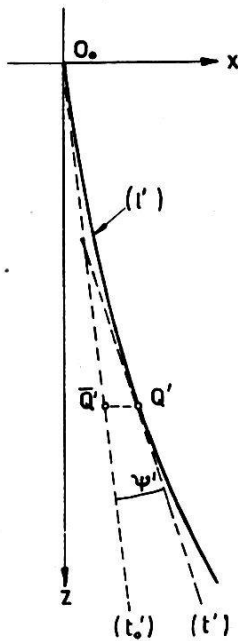
Da allen Beobachtungen gleiches Gewicht zugeschrieben wird, ist

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = [vv] \text{ zu einem Minimum zu machen.}$$

Nach den Unbekannten geordnet, lauten die Fehlergleichungen

$$K_i \sigma + \Pi(x_i, y_i, z_i) - L_i = v_i$$

$$\text{mit } L_i = g_i - \rho_0 K_i - s_{bi}'''.$$



Figur 3. Projektion einer Lotlinie auf die x, z -Ebene.

14. Sind die Unbekannten aus den Normalgleichungen bestimmt, so ist damit auch der vertikale Freiluftgradient mit der durch Π gelieferten Approximation bekannt, nämlich gleich $\partial\Pi/\partial z$. Ebenso läßt sich dann auf Grund von F.G. 1960 der Verlauf der Lotlinie durch 0_0 bis zum Meeresniveau hinunter bestimmen.

15. (l') beziehungsweise (l'') sei die Normalprojektion der Lotlinie durch 0_0 auf die Ebene $y = 0$ beziehungsweise $x = 0$. Q' sei ein Punkt von (l') in der Tiefe z unter 0_0 , (t') die Tangente an (l') in Q' , (t'_0) die Tangente an (l') in 0_0 und Q'_0 der Punkt auf (t'_0) in der Tiefe z . Der Winkel $\psi'(z)$ zwischen (t') und (t'_0) ist der Krümmungsanteil an die NS-Komponente der Lotabweichung in der Tiefe z , die Strecke $q'(z) = Q'_0 Q'$ die NS-Komponente der linearen Abweichung in der Tiefe z der Lotlinie von ihrer Tangente in 0_0 . ψ' und q' haben Vorzeichen und sind in der Disposition von Figur 3 positiv. Entsprechend sind die EW-Komponenten $\psi''(z)$ und $q''(z)$ mit Hilfe von (l'') zu definieren.

16. $s'(z)$ und $s''(z)$ seien die x - und die y -Komponente von \vec{s} für den Punkt in der Tiefe z unter 0_0 auf der z -Achse. Entsprechend seien für den gleichen Punkt $p'(z)$ und $p''(z)$ die Komponenten von \vec{p} und $\lambda'(z)$ und $\lambda''(z)$ die x - und die y -Komponente der Lotabweichung in bezug auf die z -Richtung. \bar{g} ist ein konstanter Mittelwert für die Schwerebeschleunigung im Untersuchungsgebiet. Nach 8 und F. G. 1960 ist dann

$$\psi'(z) = \lambda'(z) - \lambda'(0) = \left\{ s'(z) + p'(z) - s'(0) - p'(0) \right\} / \bar{g}$$

$$\psi''(z) = \lambda''(z) - \lambda''(0) = \left\{ s''(z) + p''(z) - s''(0) - p''(0) \right\} / \bar{g}$$

$$q'(z) = \int_0^z \psi'(\zeta) d\zeta \quad q''(z) = \int_0^z \psi''(\zeta) d\zeta.$$

17. Für p' und p'' ergeben sich nach F. G. 1960 aus Π die Approximationen

$$p'(z) \cong p'(0) + B_0 z + \frac{1}{2} C_1 z^2 + \dots$$

$$p''(z) \cong p''(0) + B_2 z + \frac{1}{2} C_4 z^2 + \dots$$

18. Für die Krümmungsanteile der Lotabweichungen und für die Komponenten der linearen Abweichung der Lotlinie von ihrer Tangente in 0_0 in der Tiefe z erhält man somit die folgenden endgültigen Ausdrücke:

$$\text{arc } \psi'(z) = \left\{ s'(z) - s'(0) + B_0 z + \frac{1}{2} C_1 z^2 + \dots \right\} / \bar{g}$$

$$\text{arc } \psi''(z) = \left\{ s''(z) - s''(0) + B_2 z + \frac{1}{2} C_4 z^2 + \dots \right\} / \bar{g}$$

$$q'(z) = \frac{1}{\bar{g}} \int_0^z \left\{ s'(\zeta) - s'(0) \right\} d\zeta + \left\{ \frac{1}{2} B_0 z^2 + \frac{1}{6} C_1 z^3 + \dots \right\} / \bar{g}$$

$$q''(z) = \frac{1}{\bar{g}} \int_0^z \left\{ s''(\zeta) - s''(0) \right\} d\zeta + \left\{ \frac{1}{2} B_2 z^2 + \frac{1}{6} C_4 z^3 + \dots \right\} / \bar{g}.$$

D. Die Schweremessungen

19. Die in Abschnitt C beschriebene Methode der gravimetrischen Gesteinsdichtebestimmung ist im Prinzip eine Verfeinerung des von Nettleton 1939 angegebenen Verfahrens. Während bei Nettleton die Schwerestationen auf einem Profil angeordnet sind und die z -Komponente p''' des Freiluftfeldes als lineare Funktion der Profilszisse betrachtet wird, sind bei der hier beschriebenen Methode die Stationen über eine Meßfläche verteilt, und p''' wird durch ein Polynom Π der Koordinaten dargestellt, das nicht mehr linear zu sein braucht.

20. Bei der Dichtebestimmung wird vorausgesetzt, daß der Probekörper homogen sei. Die Genauigkeit der Dichtebestimmung wird insbesondere durch Inhomogenitäten in dem unmittelbar unter der Meßfläche liegenden Stück des Probekörpers beeinträchtigt, so daß man bestrebt sein muß, die Meßfläche nicht zu groß zu wählen. Andererseits aber sind die Meßpunkte so anzuordnen, daß sie gegeneinander genügende Höhendifferenzen aufweisen, damit die Koeffizienten von Π , die in den Gleichungen 18 vorkommen, genügend genau bestimmt sind und damit die durch Π geleistete Extrapolation des an der Erdoberfläche gegebenen Feldes bis hinunter zum Meeresniveau zuverlässige Ergebnisse liefert. Um für St. Anton ein möglichst gutes Ergebnis zu erhalten, wurden zwei verschiedene Stationsnetze gewählt. Beide Netze sind angenähert quadratisch mit St. Anton als Mittelpunkt und je 16 Stationen. Die Maschenweite des größeren Netzes ist etwa 1170 m. Sie ist so gewählt, daß der dem Rheintal am nächsten liegende Punkt P_{16} , nämlich die Südost-

ecke des Netzes, gegenüber St. Anton eine möglichst große Höhendifferenz aufweist, aber doch noch auf der Molasse in hinreichender Entfernung von der Quartärauffüllung des Rheintals liegt. Das kleinere Netz hat die halbe Maschenweite (Figur 4). Die Gesteinsdichte und die Koeffizienten von Π wurden auf verschiedene Arten gerechnet. Den Berechnungen wurden die Resultate a) des großen, b) des kleinen Netzes (je 16 Meßpunkte), c) des aus beiden kombinierten Netzes zugrunde gelegt und auch der Grad von Π variiert. Die größte Genauigkeit wurde im Falle a erzielt unter Benutzung eines Polynoms Π 2. Grades. Im folgenden sind nur die Resultate für diesen günstigsten Fall angegeben. Es ist also $n = 16$, $k = 2$ und $m = 10$.

21. Über die Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der Schweremessungen sowie den Anschluß des Netzes an das Schweizerische Schweregrundnetz und die Eichung des verwendeten Worden-Gravimeters Nr. 472 hat E. Hunziker 1960 eingehend berichtet. In Tabelle I sind für die Punkte des großen Netzes die Koordinaten x_i , y_i und z_i angegeben. Koordinatennullpunkt 0_0 ist der Punkt St. Anton mit den Landeskoordinaten

$$X_0 = 253\,120,70 \text{ m}, \quad Y_0 = 758\,009,23 \text{ m}$$

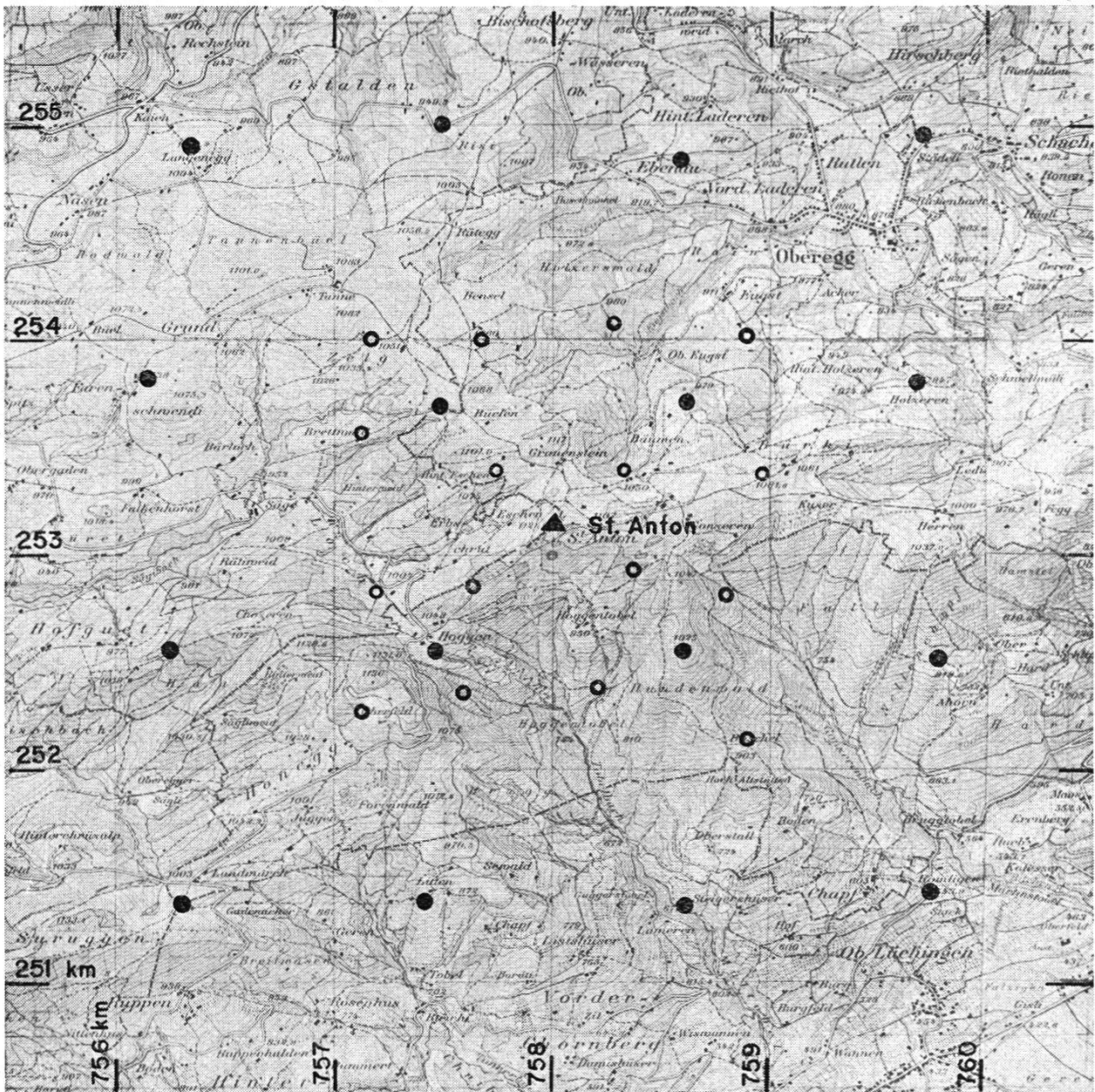
und der Meereshöhe $H_0 = 1121,19 \text{ m}$ (P. d. N. 373,60 m). In Tabelle I ist ferner $S_i = g_i - g_0$ die Schweredifferenz des Punktes P_i gegenüber 0_0 . $g_0 = 980\,503,905 \text{ mgl}$ ist die Schwere in 0_0 . Der mittlere Fehler von S_i ist zu $m_s = 0,025 \text{ mgl}$ zu veranschlagen.

E. Der Einfluß der sichtbaren Massen

22. Nach 13 und 18 benötigt man die z -Komponente s''' der Anziehung \vec{s} der sichtbaren Massen für die Punkte P_i des Stationsnetzes sowie die x - und y -Komponente s' und s'' für 0_0 und eine Reihe von Punkten Q_j auf der z -Achse zwischen 0_0 und dem Meeresniveau.

23. Bei der Ausführung der Bouguer-Reduktion von Schweremessungen nach dem üblichen Verfahren wird s''' in bekannter Weise in die sogenannte Plattenkorrektur und die Terrainkorrektur zerlegt. Für die Plattenkorrektur wird näherungsweise die Anziehung einer unendlich ausgedehnten planparallelen Platte genommen. Bei der Terrainkorrektur wird das Gelände innerhalb eines Umkreises um die Station mit fest vorgegebenem Radius berücksichtigt, so daß die Geländestücke, die für die verschiedenen Meßpunkte abgegrenzt werden, sich nicht decken. Für die in der vorliegenden Arbeit erstrebte Genauigkeit ist dieses Verfahren der Bouguer-Reduktion unzulänglich. Modifikationen drängen sich ohnehin auf, wenn für die Ermittlung der Komponenten von \vec{s} eine elektronische Rechenmaschine benutzt wird.

24. Bei der von den Verfassern ausgearbeiteten und für St. Anton benutzten verfeinerten Methode wird zur Definition von \vec{s} einheitlich für

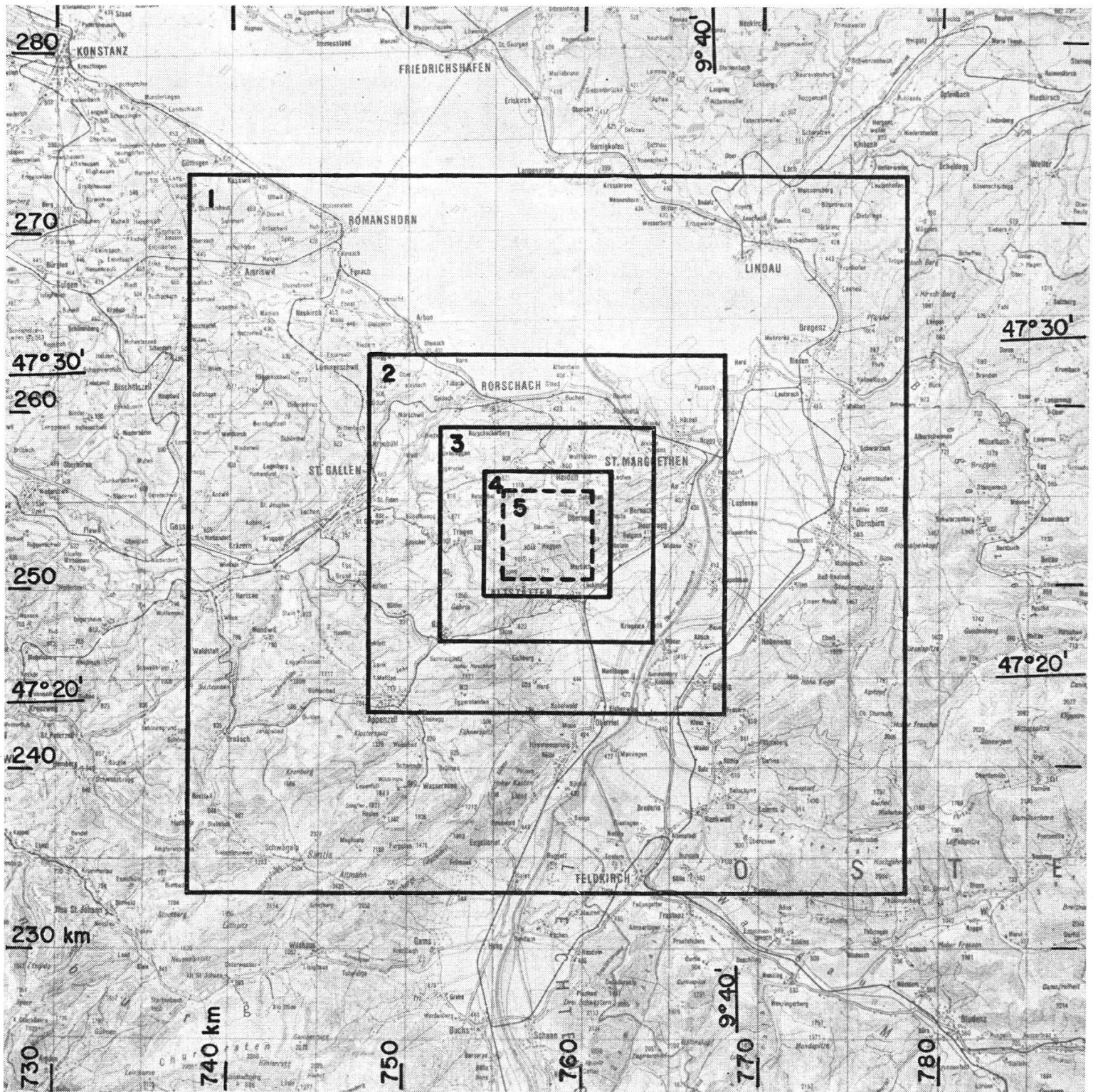


Figur 4. Netz der Schwerstationen St. Anton und Umgebung.

alle Punkte P_i und Q_j das gleiche Stück der Erdkruste als «sichtbare Masse» abgegrenzt, und zwar nach unten durch das Meeresniveau, in der Horizontalprojektion durch ein Quadrat (F_1) von 40 km Seitenlänge mit Seiten parallel zu den Landeskoordinaten (Figur 5). Die Abgrenzung gilt nicht nur für die Terrainkorrekturen, sondern auch für die Plattenkorrektur. Die seitliche Begrenzung der Platte ist daher für alle Meßpunkte die gleiche, so daß diese im allgemeinen exzentrisch zur Begrenzung liegen. Die Platte hat die Form einer sphärischen quadratischen Schale, deren Dicke gleich der Meereshöhe des Meßpunktes ist und daher von Punkt zu Punkt variiert. Der Mittelpunkt \bar{O} des Quadrates hat die Landeskoordinaten $X = 253000$ m und $Y = 758000$ m.

Tabelle I

Stat. P_i	x_i [km]	y_i [km]	z_i [m]	S_i [mg/l]	G_i [mg/l]	T_i [$\frac{\text{mg/l} \cdot \text{gr}}{\text{cm}^3}$]	$s'' B_i$ [mg/l]	$-s''' R_i$ [mg/l]	$-v_i$ [mg/l]
P_0	0,000	0,000	0,00	0,000	45,877	3,198	0,036	0,290	—
P_1	1,756	—1,677	106,96	30,565	41,572	1,202	0,048	0,137	—0,056
P_2	1,853	—0,524	174,22	43,85	38,887	1,175	0,043	0,160	0,027
P_3	1,694	0,579	183,61	45,035	38,512	1,040	0,040	0,206	0,027
P_4	1,804	1,712	279,97	63,65	34,623	1,008	0,032	0,229	—0,027
P_5	0,679	—1,886	80,93	23,63	42,624	1,203	0,039	0,149	0,091
P_6	0,556	—0,531	63,03	18,345	43,357	1,484	0,038	0,214	—0,002
P_7	0,572	0,611	85,00	20,44	42,478	2,072	0,035	0,281	—0,076
P_8	0,665	1,677	174,31	38,51	38,886	1,805	0,031	0,329	0,056
P_9	—0,578	—1,777	94,71	23,355	42,077	1,486	0,029	0,173	—0,085
P_{10}	—0,581	—0,558	81,59	18,31	42,616	2,237	0,029	0,249	0,025
P_{11}	—0,590	0,601	105,44	18,75	41,661	3,596	0,028	0,349	0,019
P_{12}	—0,624	1,789	298,40	59,31	33,889	2,403	0,019	0,413	—0,022
P_{13}	—1,751	—1,715	103,19	22,565	41,727	1,778	0,023	0,204	0,032
P_{14}	—1,743	—0,596	244,61	49,36	36,060	2,100	0,018	0,242	—0,019
P_{15}	—1,758	0,596	499,28	98,66	25,736	2,202	0,009	0,233	0,009
P_{16}	—1,694	1,748	577,30	114,485	22,545	1,681	0,007	0,334	0,001



Figur 5. Geländeeinteilung für die Terrainkorrekturen.

25. Die Meßfläche liegt in der subalpinen Molasse, die auch in einer weiteren Umgebung der Meßfläche ansteht. Obschon die Molasse aus verschiedenen Gesteinen aufgebaut ist, kann sie für Schweremessungen als ziemlich homogener Gesteinskörper angesehen werden. Als Probekörper im Sinne von 9, dessen Dichte ρ zu bestimmen ist, wird daher die gesamte sichtbare, durch die feste Erdoberfläche innerhalb (F_1) begrenzte Masse definiert, nachdem man sich das Wasser des Bodensees weggedacht hat. An die in 12 definierte Größe s_b''' liefert der Teil (B) des Wassers des Bodensees, der innerhalb (F_1) liegt, einen Beitrag s_B''' . Ein weiterer Beitrag s_R''' trägt der Tatsache Rechnung, daß das Rheintal mit Quartärmaterial aufgefüllt ist, dessen durchschnittliche Dichte nach N. Pavoni um $0,6 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ kleiner als die Dichte der Molasse angenommen werden kann. s_R''' ist daher die z -Komponente der Anziehung eines Gesteinskörpers (R) mit der Dichte $-0,6$, der den Teil des mit Quartärmaterial gefüllten Raumes des Rheintals einnimmt, der innerhalb (F_1) liegt. Für die untere Begrenzungsfläche von (R) hat N. Pavoni die vermutliche Form angegeben (Figur 6). K zerfällt in die Plattenkorrektur G und die Terrainkorrektur T nach der Gleichung $K = G - T$. Für die z -Komponente von \vec{s} erhält man daher $s''' = (G - T) \rho + s_B''' + s_R'''$. Entsprechend lauten die x - und die y -Komponente:

$$s' = (G' - T') \rho + s_B' + s_R'$$

und

$$s'' = (G'' - T'') \rho + s_B'' + s_R''.$$

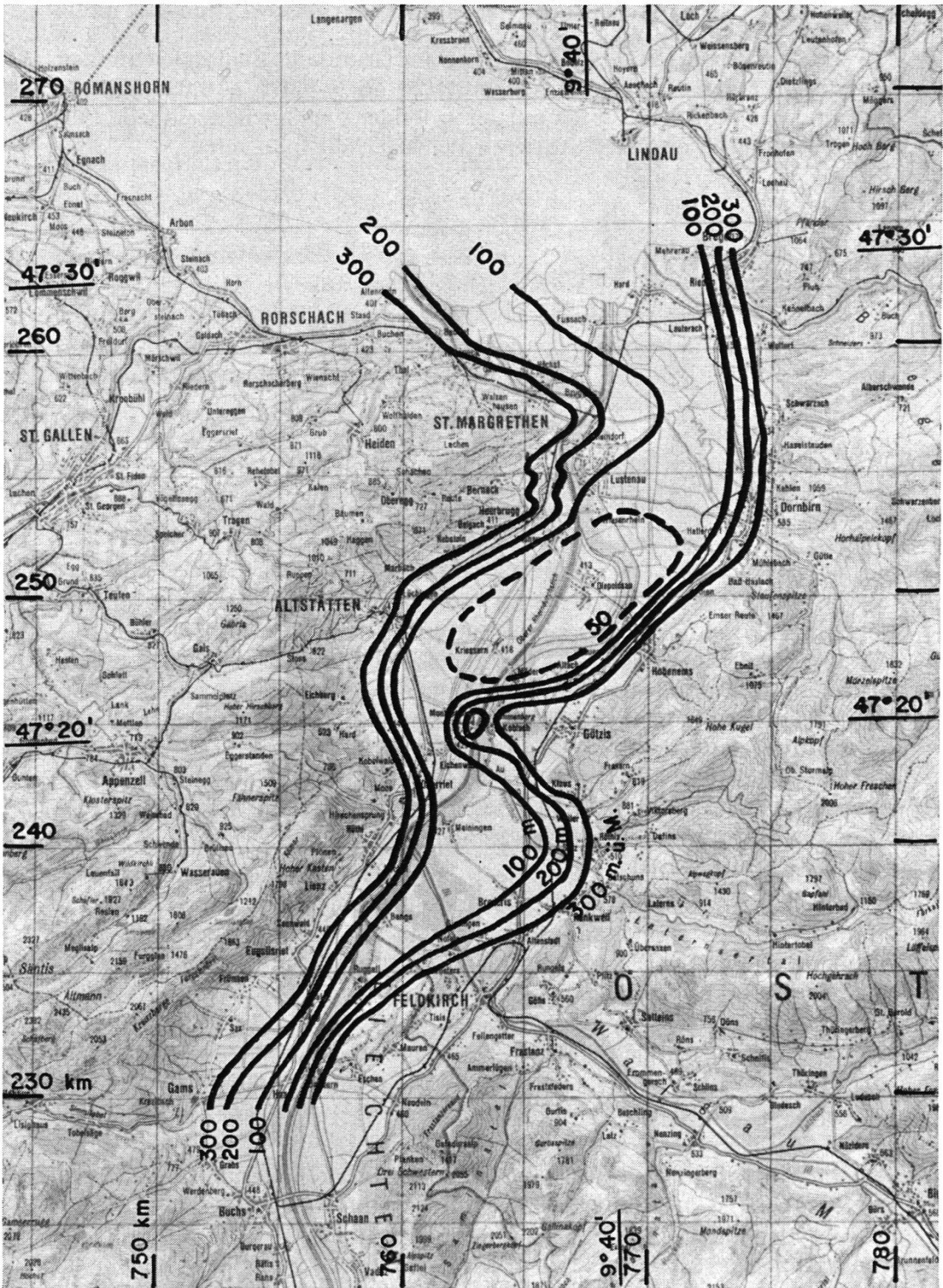
26. Die Plattenkorrektur G erhält man auf Grund von bekannten Formeln für die Anziehung einer sphärischen Platte von kreisrunder Begrenzung durch Integration. Die numerischen Werte sind in Tabelle I angegeben. Die Werte für G' und G'' findet man in Tabelle II. Man erhält sie nach der gleichen Methode wie alle übrigen Bestandteile der Komponenten von \vec{s} . Für diese sind unregelmäßige topographische Flächen angenähert zu erfassen. Der Grundriß (F_1) der sichtbaren Masse wird zu diesem Zwecke in einzelne Zellen geteilt und für jede Zelle eine mittlere Geländehöhe geschätzt, das heißt die topographische Fläche durch eine horizontale Ebene ersetzt. Im Gegensatz zum klassischen Verfahren haben die Zellen nicht die Form von Kreisringsektoren, sondern sind Quadrate, und die Einteilung von (F_1) in Zellen ist für alle Meßpunkte die gleiche, so daß die mittleren Höhen der Zellen nicht für jeden Meßpunkt gesondert, sondern nur einmal geschätzt werden mußten.

Die mittleren Höhen der Zellen einerseits und die Koordinaten der Punkte P_i und Q_j andererseits sind die Daten, die in die programmgesteuerte Rechenmaschine zu geben waren. Die Maschine lieferte dann direkt die Werte von T, s_B''' usw. für die vorgegebenen Punkte. Die Werte sind in den Tabellen I und II aufgeführt. In Tabelle II ist $H_j = H_0 - z_j$ die Meereshöhe des Punktes Q_j .

Tabelle II

Stat. Q_j	H_j [m]	Z_j [m]	G'_j/\bar{g}	T'_j/\bar{g}	$s'B_j/\bar{g}$	$-s'R_j/\bar{g}$	G''_j/\bar{g}	T''_j/\bar{g}	$s''B_j/\bar{g}$	$-s''B_j/\bar{g}$	q'_j [mm]	q''_j [mm]
$Q_0 = Q_1$	1121,19	0,00	-0,027	-0,185	0,127	0,157	-0,002	-2,016	-0,016	0,424	0,00	0,00
Q_2	1000	121,19	-0,024	-0,156	0,127	0,158	-0,002	-2,013	-0,016	0,425	0,03	0,00
Q_3	900	221,19	-0,022	-0,199	0,128	0,159	-0,002	-2,017	-0,016	0,426	0,07	-0,01
Q_4	800	321,19	-0,019	-0,237	0,128	0,160	-0,001	-2,012	-0,016	0,427	0,07	-0,03
Q_5	700	421,19	-0,017	-0,298	0,128	0,160	-0,001	-2,002	-0,016	0,428	0,03	-0,04
Q_6	600	521,19	-0,015	-0,344	0,128	0,161	-0,001	-1,988	-0,016	0,429	-0,07	-0,05
Q_7	500	621,19	-0,012	-0,388	0,128	0,161	-0,001	-1,964	-0,016	0,429	-0,20	-0,03
Q_8	400	721,19	-0,010	-0,425	0,128	0,161	-0,001	-1,943	-0,016	0,429	-0,37	0,00
Q_9	300	821,19	-0,007	-0,464	0,128	0,161	-0,001	-1,915	-0,016	0,430	-0,56	0,06
Q_{10}	200	921,19	-0,005	-0,497	0,128	0,161	0,000	-1,887	-0,016	0,429	-0,78	0,15
Q_{11}	100	1021,19	-0,002	-0,529	0,128	0,161	0,000	-1,857	-0,016	0,429	-1,02	0,26
Q_{12}	0	1121,19	0,000	-0,560	0,128	0,161	0,000	-1,828	-0,016	0,429	-1,28	0,40

Die Zahlen in den Kolonnen, deren Überschriften \bar{g} im Nenner enthalten, bedeuten Winkel, ausgedrückt in Sekunden alter Teilung



Figur 6. Vermutliche Isohypsen der unteren Begrenzungsfläche der Quartärauffüllung des Rheintals.

F. Die Gesteinsdichte und das Freiluftfeld

29. Die vermittelnde Ausgleichung auf Grund der Fehlergleichungen 13 ergibt für den Fall a von Abschnitt 20 $m_L = 0,075 \pm 0,022$ mgl als Streuung der L_i , das heißt als mittleren Fehler der Gewichtseinheit. Für die Unbekannten und ihre mittleren Fehler erhält man mit

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \sigma = 2,65 + \sigma \\ \rho &= 2,678 \pm 0,08 \text{ gr/cm}^3 \\ A &= 980\,389,814 \pm 4 \text{ mgl} \\ B_0 &= 1,44 \pm 0,09 \text{ mgl/km} \\ B_1 &= 0,3073 \pm 0,0033 \text{ mgl/m} \\ B_2 &= -0,47 \pm 0,07 \text{ mgl/km} \\ C_0 &= 0,064 \pm 0,028 \text{ mgl/km}^2 \\ C_1 &= 0,90 \pm 0,34 \text{ mgl/km}^2 \\ C_2 &= -0,025 \pm 0,040 \text{ mgl/km}^2 \\ C_3 &= -0,060 \pm 0,032 \text{ mgl/km}^2 \\ C_4 &= -0,49 \pm 0,26 \text{ mgl/km}^2\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte für die Koeffizienten des in 11 eingeführten Polynoms Π und für ρ kann man ohne weiteres die Größen berechnen, die nach 18 die Krümmungen der Lotlinie beschreiben. Es ist insbesondere, wie schon in 7 erwähnt, nicht nötig, sich um die Normalschwere zu kümmern. Da aber die gravimetrische Bestimmung von Gesteinsdichten sowohl in der Geodäsie wie auch für die gravimetrische Prospektion von allgemeinem Interesse ist, rechtfertigt es sich, die oben stehenden numerischen Ergebnisse unabhängig von ihrer Verwendung für die Berechnung der Lotkrümmungen etwas näher zu betrachten.

30. Der Wert für die Dichte ρ entspricht den Erwartungen und anderweitigen Meßergebnissen. Die Meßfläche liegt im Gebiet der subalpinen Molasse. ρ ist die durchschnittliche Dichte der vorkommenden Gesteine, nämlich von Nagelfluh, Sandstein und Mergel der untern Süßwassermolasse in regelmäßiger Wechsellagerung.

31. Das Polynom Π stellt approximativ das Freiluftfeld p''' dar. Mit Hilfe der in 29 gegebenen numerischen Werte seiner Koeffizienten A, B_0, \dots, C_4 kann der Wert von Π für jeden Punkt des Raumes berechnet werden. Die Güte der Approximation läßt sich an der Differenz $p''' - \Pi = -v$ ablesen. Die Werte von $-v$ für die Meßpunkte P_1 bis P_{16} sind in Tabelle I enthalten. Der größte vorkommende Absolutwert der Differenz ist 0,09 mgl. Wenn man bedenkt, daß p''' aus der gemessenen Schwere durch Subtraktion der z-Komponente der Anziehung der sichtbaren Massen, die bis gegen 40 mgl betragen kann, entsteht, so ist es bemerkenswert, wie gut sich p''' durch die im Raume sehr glatt verlaufende Funktion Π approximativ darstellen läßt. Diese Tatsache beweist, daß die der hier angewendeten Methode der Gesteinsdichtebestim-

mung zugrunde liegende Annahme, der Probekörper (siehe 25) sei homogen, mit genügender Annäherung zutrifft. Für 0_0 (siehe 21) ist

$$p''' - \Pi = p''' - A = 0,07 \text{ mgl.}$$

32. Auch die Normalschwere γ läßt sich im Bereiche der Meßfläche durch ein Polynom darstellen, nämlich

$$\gamma \cong \Pi_n(x, y, z) = A_n + B_{0n}x + B_{1n}z + B_{2n}y$$

A_n ist die Normalschwere im Nullpunkt 0_0 des Koordinatensystems, B_{1n} der vertikale Freiluftgradient der Normalschwere in diesem Punkt, ferner sind B_{0n} und B_{2n} die horizontalen Gradienten in x - und in y -Richtung. Die allgemeinen Formeln für diese Koeffizienten und ihre Werte für St. Anton sind die folgenden:

$$A_n = \gamma_0(\varphi) - B_{1n}(H_0 + N) = 980490,73 \text{ mgl}$$

$$B_{1n} = 0,30855 + 0,00022 \cos 2\varphi \text{ mgl/m} = 0,30853 \text{ mgl/m}$$

$$B_{0n} = 0,812 \sin 2\varphi \cos \alpha \text{ mgl/km} = 0,809 \text{ mgl/km}$$

$$B_{2n} = -0,812 \sin 2\varphi \sin \alpha \text{ mgl/km} = -0,022 \text{ mgl/km}$$

$\varphi = 47^\circ 24' 40''$ ist die geographische Breite und H_0 die Meereshöhe von 0_0 .

$\gamma_0(\varphi) = 978049(1 + 0,005288384 \sin^2\varphi - 0,000005869 \sin^2 2\varphi) \text{ mgl}$
 $= 980846,83 \text{ mgl}$ ist die Normalschwere auf der Oberfläche des Erdellipsoides, das dieser Schwereformel zugrunde liegt, N die Erhebung des Geoides über dem Erdellipsoid und α die Meridiankonvergenz in 0_0 , das heißt der Winkel zwischen der x -Achse und der Nordrichtung, und zwar positiv gerechnet, wenn die $+x$ -Achse östlich vom Meridian durch 0_0 liegt. Für St. Anton ist nach Heiskanen 1957 $N = 33 \text{ m}$ zu nehmen, ferner ist $\alpha = 1^\circ 32'$.

33. Nach 6 und 8 ist $u''' = p''' - \gamma$ die z -Komponente der Anziehung der unsichtbaren Störungsmassen, das heißt die Bouguersche Schwereanomalie. Für die Punkte 0_0 und P_1 bis P_{16} wird u''' mit Abweichungen, deren absolute Werte kleiner als $0,1 \text{ mgl}$ sind, durch $\Pi - \Pi_n$ dargestellt. Für 0_0 ist $\Pi - \Pi_n = A - A_n = -100,9 \text{ mgl}$. Die Differenz dieses Wertes zu der von Niethammer 1921 in der Bouguerschen Schwerekarte der Schweiz dargestellten Anomalie liegt innerhalb des von Niethammer für die reduzierten Werte angegebenen Fehlers, wenn man die Unterschiede in der Definition der Absolutwerte der gemessenen Schwere und der Normalschwere bei Niethammer und in der vorliegenden Arbeit in Rechnung stellt.

34. Die Komponenten des horizontalen Gradienten der Bouguer-Anomalie in 0_0 sind angenähert $B_0 - B_{0n} = 0,63$ und $B_2 - B_{2n} = -0,45 \text{ mgl/km}$. Die entsprechenden, der Bouguerschen Schwerekarte der Schweiz von Th. Niethammer 1921 zu entnehmenden Durchschnittswerte für die Region St. Anton sind $1,03$ beziehungsweise $-0,43 \text{ mgl/km}$.

35. Wie der mittlere Fehler von B_1 in 29 zeigt, ist die Abweichung vom Normalwert B_{1n} des vertikalen Freiluftgradienten nicht verbürgt. In Übereinstimmung mit 4 ist der mittlere prozentuale Fehler von ρ das 2,8fache desjenigen von B_1 .

36. Nach 13 setzt sich die in 29 aufgeführte Streuung m_L aus der Streuung m_g von g_i und der Streuung m_T von $\rho_0 K_i + s_{bi}'''$ zusammen. Die Untersuchung der Fehler in der Erfassung der Topographie hat $m_T = 0,024$ mgl ergeben. In m_g ist der in 21 angegebene Meßfehler $m_S = 0,025$ mgl enthalten. Man denkt sich m_g aus m_S und einem davon unabhängigen Restfehler m_R zusammengesetzt, so daß $m^2_L = m^2_T + m^2_g = m^2_T + m^2_S + m^2_R$ ist. Daraus folgt $m_R = 0,066$ mgl. Wahrscheinlich sind es zwei Ursachen, die zu diesem Restfehler beitragen, nämlich erstens lokale Gesteinsinhomogenitäten in der näheren Umgebung jeder Meßstation, zweitens der Umstand, daß das Polynom zweiten Grades II das gegebene Freiluftfeld p''' naturgemäß nicht exakt, sondern nur angenähert darstellt. Da die Anzahl der Schweremeßstationen auf ein Minimum beschränkt war, gestatten die vorliegenden Ergebnisse keine eingehendere Diskussion über die Zusammensetzung von m_R .

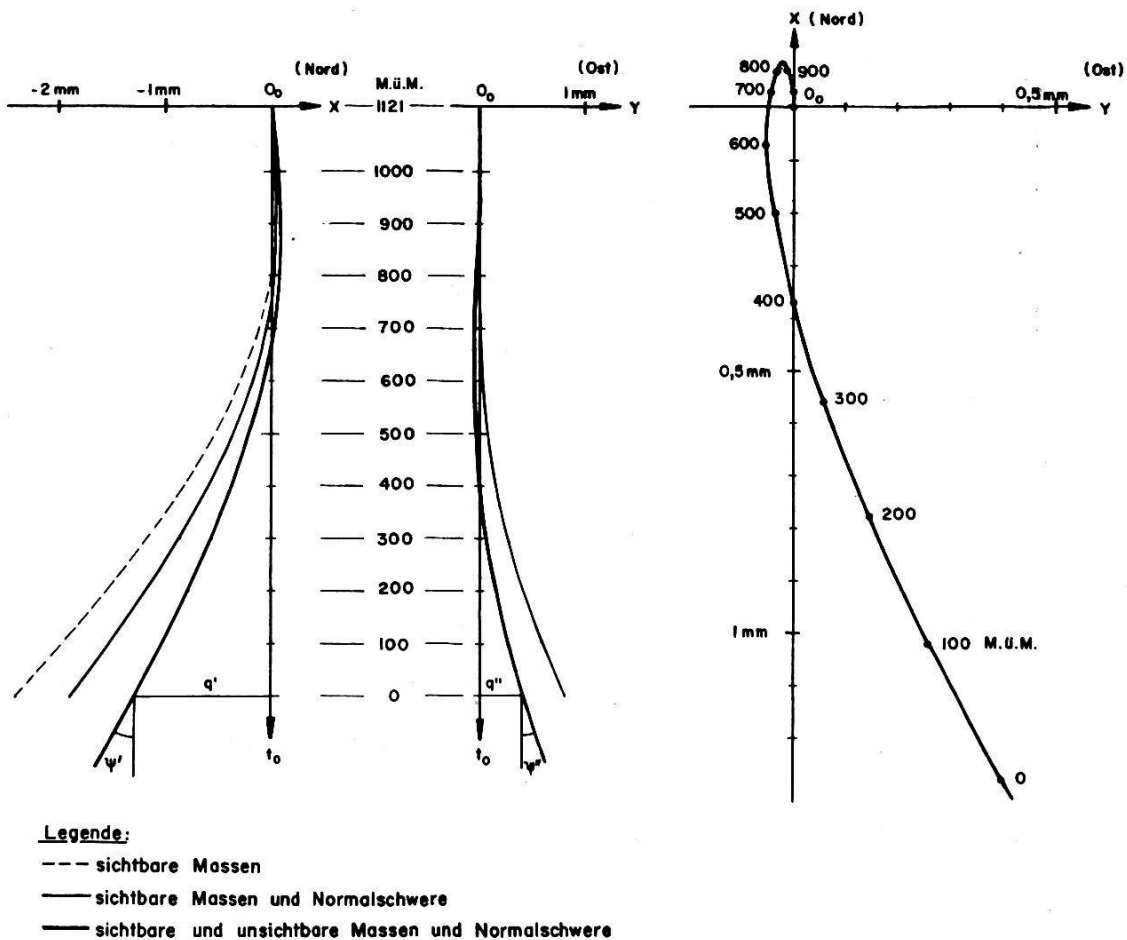
G. Die Lotkrümmungen

38. In Tabelle III sind für das Meeresniveau, das heißt für $z = H_0$, die in 15 definierten und nach 18 berechneten Winkel ψ' und ψ'' und die Strecken q' und q'' angegeben, und zwar sind die von den sichtbaren Massen, der Normalschwere und den unsichtbaren Massen herrührenden Anteile einzeln aufgeführt. Nach 18 erhält man zwar lediglich die Anteile der sichtbaren Massen und die Summe der Anteile der Normalschwere und der unsichtbaren Massen, nämlich den Anteil des Freiluftfeldes. Die Ausscheidung des Anteils der Normalschwere mit Hilfe von 32 ist für die Berechnung der gesamten Lotkrümmungen nicht notwendig. Sie ist nur vorgenommen worden, um zu zeigen, welchen Einfluß die Berücksichtigung der unsichtbaren Massen auf die Endergebnisse besitzt. Die Nichtberücksichtigung des Feldes der unsichtbaren Störungsmassen würde, in Prozenten des Totals ausgedrückt, Fehler von 50% für ψ' , von 53% für

Tabelle III

	ψ'	ψ''	q'	q''
Sichtbare Massen	−1,00"	0,50"	−2,41 mm	0,82 mm
Normalschwere	0,19	−0,01	0,52	−0,01
Unsichtbare Massen	0,27	−0,17	0,61	−0,41
Total	−0,54"	0,32"	−1,28 mm	0,40 mm
Mittlerer Fehler	±0,04	±0,03	±0,10	±0,05

ψ'' , von 48% für q' und von 102% für q'' ergeben. Die Berechnung der in Tabelle III angegebenen mittleren Fehler wird in der umfassenden Publikation über die Basismessung Heerbrugg dargestellt werden.



Figur 7. Verlauf der Lotlinie des Punktes St. Anton

39. Der Verlauf der Lotlinie von O_0 bis hinunter zum Meeresniveau ergibt sich aus den in Tabelle II aufgeführten Werten von q' und q'' für die Zwischenpunkte Q_2 bis Q_{11} . Figur 7 zeigt die Normalprojektionen der Lotlinie auf die Koordinatenebenen, wobei als z-Achse die Tangente t_0 an die Lotlinie in O_0 gewählt ist.

Literatur

- Gassmann, F., 1960: Zur gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten und Lotlinienkrümmungen in der Erdkruste. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie. Nr. 2, S. 39–49. Mitteilung Nr. 37 aus dem Institut für Geophysik, ETH, Zürich. (In der Arbeit abgekürzt mit F. G. 1960 bezeichnet.)
- Heiskanen, W. A., 1957: The Columbus Geoid. Transactions American Geophysical Union, vol. 38, p. 841–848.
- Hunziker, E., 1960: Bericht an die Schweizerische Geodätische Kommission über im Sommer 1960 ausgeführte Gravimeter-Messungen auf St. Anton und in der

Umgebung, erstattet von E. Hunziker im Dezember 1960 (Maschinenschrift, vervielfältigt, 23 Seiten).

Kobold, F., 1960: Die Messung der Basis und des Basisvergrößerungsnetzes von Heerbrugg im Jahre 1959. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Nrn. 1 und 2, 17 Seiten.

Nettleton, L. L., 1939: Determination of Density for Reduction of Gravity Observations. Geophysics, vol. 4, no. 3, p. 176–183.

Niethammer, Th., 1921: Schwerebestimmungen in den Jahren 1915–1918. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 16, 191 Seiten.

Rische, H., 1957: Dichtebestimmungen im Gesteinsverband durch Gravimeter- und Drehwaagemessungen unter Tage. Freiburger Forschungshefte, C 35, Geophysik, Akademie-Verlag Berlin, 83 Seiten.

Le problème de la similitude entre les réseaux géodésiques et les systèmes hyperstatiques

Par A. Ansermet

Au cours de ces dernières années, à l'étranger surtout, certains géodésiens ont montré l'analogie existant entre le calcul des réseaux géodésiques à mesures linéaires et le calcul des systèmes articulés hyperstatiques. Cette similitude se manifeste en ce qui concerne les déformations; dans ce domaine la géodésie peut tirer un bénéfice de méthodes, surtout graphiques, appliquées en statique. Ce problème n'ayant guère été traité dans la présente Revue, il a paru opportun de lui consacrer quelques lignes. Le but de celles-ci est de montrer qu'en statique comme en géodésie, le principe des moindres carrés trouve son application; les côtés et les sommets deviennent des barres et des nœuds. Dans les deux cas, à la base de tous les calculs, il y a une figure qui se déforme. En statique une solution consiste à rendre minimum le travail de déformation; ce n'est pas toujours celle-là qui est appliquée. Les poids sont exprimés en fonction des longueurs des barres et de leurs sections transversales. C'est une particularité du problème mais, sans cela, les règles du calcul par les moindres carrés subsistent comme on le constatera ci-après.

Considérons un cas concret simple: une maille quadrangulaire à deux diagonales; il y a donc six côtés et quatre sommets (six barres et quatre nœuds) et huit coordonnées en tout dont trois sont arbitraires. Un élément est surabondant; on dit qu'il y a une inconnue hyperstatique. En ramenant le nombre des côtés ou des barres à cinq on obtient ce que l'on appelle en statique un système principal ou isostatique fondamental de référence.

Soient l_1, l_2, \dots, l_6 les côtés mesurés et $(l_1 + f_1), (l_2 + f_2) \dots (l_6 + f_6)$ des valeurs provisoires, mais arbitraires, sous cette réserve que les $f_1, f_2 \dots f_6$ soient suffisamment petits. De plus, après application du principe des moindres carrés, on obtient les valeurs $(l_1 + v_1), (l_2 + v_2) \dots (l_6 + v_6)$