Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 59 (1961)

Heft: 12

Artikel: Sur le rôle de la méthode des moindres carrés en mécanique et statique

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-216925

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 · LIX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Dezember 1961

Sur le rôle de la méthode des moindres carrés en mécanique et statique

Par A. Ansermet

Dans le numéro de septembre dernier a paru un article consacré à des calculs géodésiques et statiques ainsi qu'à la corrélation existant entre eux. Le sujet est si vaste qu'il fut seulement introduit et traité dans le plan; il y a lieu, dans les lignes qui suivent, de le développer plus à fond et de l'étendre à l'espace. On aboutira notamment à des notions qui paraissent nouvelles: les ellipses et ellipsoïdes d'erreur de la géodésie subsistent, mais ce ne sont plus des erreurs; on peut parler de déformations. Des cas concrets montreront en quoi consistent ces courbes et surfaces.

En géodésie on justifie en général l'application de la méthode des moindres carrés en s'aidant de la théorie des probabilités; certains auteurs font aussi valoir que les poids sont amplifiés le plus fortement grâce au principe des moindres carrés. C'est ce que l'on indique parfois comme étant la seconde théorie de Gauss.

En mécanique et statique c'est différent: la condition $[pvv]$ = minimum traduit mathématiquement un théorème fondamental, celui relatif au travail de déformation A. Sous sa forme générale cette valeur A est fonction des forces S exerçant leur action longitudinalement dans les barres («Stabkräfte»), des moments et des forces transversales.

Dans la présente étude il ne sera question que de systèmes articulés («Stabfachwerke», «Stabverbände»); l'allongement ou le raccourcissement d'une barre est exprimé par la formule connue:

$$\frac{Ss}{EF} = ds \qquad \text{([3], p. 278, I)} \qquad (1)$$

où s est la longueur de la barre, F la section transversale, E le module d'élasticité; il faut prendre bien garde aux dimensions de ces éléments. De plus:

$$A = \sum \frac{S^2 s}{2\,EF} = \sum \left\{ \left(\frac{Ss}{EF} \right)^2 \cdot \frac{EF}{2\,s} \right\} = \Sigma\,(v^2 p) = \text{minimum} \qquad (2)$$

C'est la condition des moindres carrés sous la forme courante; la somme est étendue à toutes les barres tandis que les p sont les poids; ceux-ci interviennent par leurs valeurs relatives et non absolues. En général on peut poser:

$$p = F : s,$$

mais il faut tenir compte de la dimension de E si E = constante.

Pour réaliser la condition du minimum on a souvent recours en géodésie à une solution dite provisoire; c'est une première étape du calcul qui fournit un réseau provisoire. En hyperstatique c'est en principe la même chose; il faut connaître pour le système un état dit principal ou fondamental («Grundsystem»). C'est précisément la face du problème qui fut traitée trop sommairement en septembre dernier; l'exemple ci-après fera mieux comprendre de quoi il s'agit:

Détermination d'une station spatiale ou

Calcul d'un pylône à quatre barres

Dans la figure 1 il faut considérer la moitié de gauche; il y a un seul point ou nœud libre, le sommet 1 de la pyramide quadrangulaire. Géodésiquement ce problème est tellement connu qu'il suffit de rappeler sommairement les étapes du calcul. Il y a un élément surabondant.

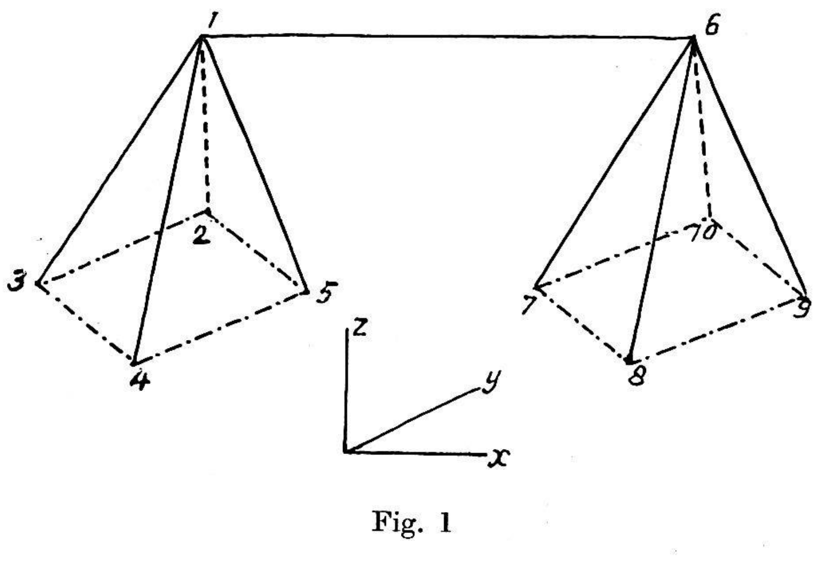

Fig. 1

Désignons par x_0, y_0, z_0 des coordonnées provisoires du sommet 1 et par dx, dy, dz les variations à faire subir à ces coordonnées pour réaliser la condition $[pvv]$ = minimum. On a le système:

$$-f_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz \qquad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1) \qquad (3)$$

f_i étant le terme absolu: distance provisoire – distance mesurée.

En d'autres termes les v sont fractionnés algébriquement:

$$v = (\text{valeur provisoire} - \text{valeur mesurée}) + \\ + (\text{valeur compensée} - \text{valeur provisoire})$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \qquad \text{poids: } p_i$$

Sous forme implicite, les équations normales sont:

$$[pav] = 0, \quad [pbv] = 0, \quad [pcv] = 0, \quad [pff] \geq [pvv] \tag{4}$$

$$m^2 \cong [pvv] : r \qquad (r \text{ éléments surabondants; ici } r = 1) \tag{5}$$

On sait que cette formule ne peut pas être établie rigoureusement; elle est fondamentale, joue aussi un rôle en statique en changeant le mot erreur contre un autre (déformation).

On a de plus la matrice des équations normales et sa réciproque:

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pba] & [pbb] & [pbc] \\ [pca] & [pcb] & [pcc] \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Si les matrices sont diagonales, on a:

$$[paa]\, Q_{11} = 1 \qquad [pbb]\, Q_{22} = 1 \qquad [pcc]\, Q_{33} = 1 \tag{7}$$

Les Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} sont les coefficients de poids des inconnues.

Une solution consiste aussi à éliminer les inconnues dx, dy, dz dans le système d'équations (3); grâce aux calculatrices électroniques, ce mode de faire peut être envisagé. On obtient:

$$[Av] + w = 0 \tag{7}$$

D'une manière générale le raisonnement qui précède est applicable en statique sauf en ce qui concerne la formation des termes absolus f_i; il en sera question plus loin.

Ellipsoïdes de déformation

Avec les méthodes usuelles de l'hyperstatique on ne peut guère calculer de telles surfaces dont l'intérêt est manifeste. Dans le plan on a des ellipses qu'il ne faut pas confondre avec les ellipses d'élasticité de Culmann et W. Ritter; rappelons ici que trois professeurs Ritter ont fait bénéficier la statique de leurs recherches. Considérons la position définitive du sommet 1, définie par les coordonnées: $x_0 + dx$, $y_0 + dy$, $z_0 + dz$.

Ce point est choisi comme origine d'un nouveau système de coordonnées dont les axes sont parallèles à ceux des x, y, z. Il en résulte que les coefficients a_i, b_i, c_i subsistent, les nouvelles coordonnées étant ξ, η, φ, et on aura des v'_i au lieu des v_i:

$$v'_i = a_i \, \xi + b_i \, \eta + c_i \, \varphi + v_i \tag{8}$$

et, à cause des équations (4):

$$[pv'v'] = [pvv] + [paa] \, \xi^2 + 2[pab] \, \xi\eta + 2[pac] \, \xi\varphi + [pbb] \, \eta^2 + \ldots$$
$$\text{ou} \quad [pv'v'] = [pvv] + (QT), \tag{9}$$

(QT) étant une forme quadratique ternaire à 6 termes en ξ, η, φ. Le problème devient plus simple si dans la matrice réciproque (6) les coefficients quadratiques sont seuls différents de zéro; c'est donc le cas particulier (7), les matrices (6) étant diagonales:

$$[paa] \, \xi^2 + [pbb] \, \eta^2 + [pcc] \, \varphi^2 = \frac{\xi^2}{Q_{11}} + \frac{\eta^2}{Q_{22}} + \frac{\varphi^2}{Q_{33}} = m^2 \tag{10}$$

C'est l'ellipsoïde dit moyen qui intéresse les géodésiens mais aussi les staticiens; on peut concevoir d'autres termes absolus. Le travail de déformation est constant si le nœud ou sommet (1) se déplace sur une telle surface dont le centre répond à la condition $[pvv]$ = minimum. Une solution plus générale sera développée ci-après, basée sur d'autres considérations.

Formation des termes absolus f_i

Considérons toujours le pylône 1, 2, 3, 4, 5 qui se déforme jusqu'à réaliser la condition $[pvv]$ = minimum. On peut y parvenir si l'on connaît un état intermédiaire. Il y a une ou des forces extérieures qui ne sont pas indiquées sur la figure; les forces S des formules ou équations (1), (2) ne sont pas connues. Cette étape du calcul est traitée à fond dans la littérature hyperstatique et il n'y a donc pas lieu de s'y attarder. Une barre est coupée fictivement, ce qui rend le système statiquement déterminé, donc calculable facilement en exprimant que le système est en équilibre. L'action exercée par la barre est remplacée par une force inconnue X ou variable hyperstatique; la valeur cherchée X répondra à la condition du minimum. Provisoirement on attribue à cette force une valeur choisie arbitrairement; il en résulte un état provisoire dont on déduit les f_i. Un professeur lausannois, dans une publication qui fut très remarquée (voir [2]), montra qu'un système spatial pouvait être calculé dans le plan; les déformations sont déterminées graphiquement. La méthode de Williot est généralisée.

Analytiquement les déformations revêtent la forme d'un binôme avec un terme indépendant de X et un terme variant linéairement avec X. La valeur $X = 1$ caractérise l'état dit fondamental («Grundsystem»). En général il y a autant d'inconnues hyperstatiques X_1, X_2, X_3 ... que d'éléments surabondants; le travail de déformation est aussi exprimé en fonction de ces inconnues.

En géodésie on compare les $m^2 \cong [pvv]:r$ d'un réseau à l'autre; en statique on fera de même entre les systèmes.

L'application de la méthode des moindres carrés en statique se justifie surtout quand le nombre des éléments surabondants est élevé; le calcul peut être fractionné, ce qui est courant en géodésie. La méthode aux variations de coordonnées a fait ses preuves en géodésie; dans certains cas elle fera aussi ses preuves en hyperstatique des systèmes articulés et spatiaux.

La différence ($[pff] - [pvv]$), qui n'est jamais négative, est calculée à double à titre de contrôle.

Détermination d'une paire de stations spatiales ou

Calcul d'un double pylône

Ainsi que le montre la figure 1, c'est le même problème, mais en géodésie les poids ne sont pas les mêmes qu'en statique. Les côtés mesurés, au nombre de neuf, deviennent des barres. Il y a deux nœuds libres les sommets 1 et 6, donc six variations de coordonnées. Il faut couper trois barres sur les neuf pour rendre le système statiquement déterminé; ce calcul, avec six barres, fut traité par A. Föppl dans «Vorlesungen über technische Mechanik» (Tome II) et dans [2], p. 41. Cette seconde solution porte sur la représentation plane du système spatial; il n'y a pas lieu de s'y arrêter car, pour le moment, la méthode des moindres carrés ne joue pas de rôle.

On a donc, pour la suite: $m^2 \cong [pvv]:3$

$$-f_i + v_i = a_i\,dx_1 + b_i\,dy_1 + c_i\,dz_1 + a'_i\,dx_6 + b'_i\,dy_6 + c'_i\,dz_6 \qquad (11)$$

$$(\text{poids } p_i) \quad i \leq 9$$

Admettons des valeurs numériques simples et de nature à réaliser une certaine symétrie; voici le tableau des coefficients:

barre	$i =$	a_i	b_i	c_i	a'_i	b'_i	c'_i	p_i
1–2	1	+0,557	+0,575	+0,60	0	0	0	1
1–3	2	+0,557	—0,575	+0,60	0	0	0	1
1–5	3	—0,557	+0,575	+0,60	0	0	0	1
1–4	4	—0,557	—0,575	+0,60	0	0	0	1
1–6	5	+1,00	0	0	—1,00	0	0	0,6
6–10	6	0	0	0	+0,557	+0,575	+0,60	1
6–7	7	0	0	0	+0,557	—0,575	+0,60	1
6–9	8	0	0	0	—0,557	+0,575	+0,60	1
6–8	9	0	0	0	—0,557	—0,575	+0,60	1

Pour les équations normales et les coefficients de poids des inconnues, on a les matrices mutuellement réciproques:

$$\begin{bmatrix} 1{,}84 & 0 & 0 & -0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}44 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}60 & 0 & 0 & 1{,}84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}610 & 0 & 0 & +0{,}20 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}758 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}694 & 0 & 0 & 0 \\ +0{,}20 & 0 & 0 & 0{,}610 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}694 \end{bmatrix}$$

Le seul coefficient ou élément non diagonal différent de zéro exprime la corrélation existant entre les dx des nœuds 1 et 6. Les axes des ellipsoïdes de déformations pour les sommets libres 1 et 6 sont parallèles aux axes de coordonnées et dans le rapport:

$$\sqrt{0{,}610} : \sqrt{0{,}758} : \sqrt{0{,}694}$$

La suite du calcul ne présente pas d'intérêt spécial; on pourrait éliminer les inconnues dans le système (11) d'où les équations:

$$[Av] + w_1 = 0 \qquad [Bv] + w_2 = 0 \qquad [Cv] + w_3 = 0 \tag{12}$$

Théoriquement ce système (12) aurait pu être établi à priori.

Coupole d'après Zimmermann (type «Reichstag»)

Ce cas sera traité uniquement quant au rôle joué par la méthode des moindres carrés. Le système statiquement déterminé comprend 24 barres et 12 nœuds, soit 36 coordonnées (voir [2]), mais 12 de ces coordonnées ne sont pas susceptibles de varier. En fait on a 12 liaisons simples en ce sens que les variations dz sont nulles pour les 8 nœuds de 5 à 12; en outre, comme la figure 2 le montre, on a de plus:

$$dx_6 = dx_{10} = 0 \quad \text{et} \quad dy_8 = dy_{12} = 0$$

Il y aura donc quatre ellipsoïdes de déformation aux nœuds 1, 2, 3, 4 et quatre ellipses aux nœuds 5, 7, 9, 11, mais seulement de petits segments linéaires en 6, 8, 10, 12. En ajoutant des barres, ce qui rend le système hyperstatique, le théorème sur le travail minimum de déformation devient applicable. Voici les coordonnées en mètres, les valeurs étant positives:

nœuds	x	y	z	nœuds	x	y	z
1	11,5	20,88	14,9	7	24,7	30,0	0,0
2	24,7	20,88	14,9	8	36,2	20,88	0,0
3	24,7	9,12	14,9	9	36,2	9,12	0,0
4	11,5	9,12	14,9	10	24,7	0,0	0,0
5	0,0	20,88	0,0	11	11,5	0,0	0,0
6	11,5	30,0	0,0	12	0,0	9,12	0,0

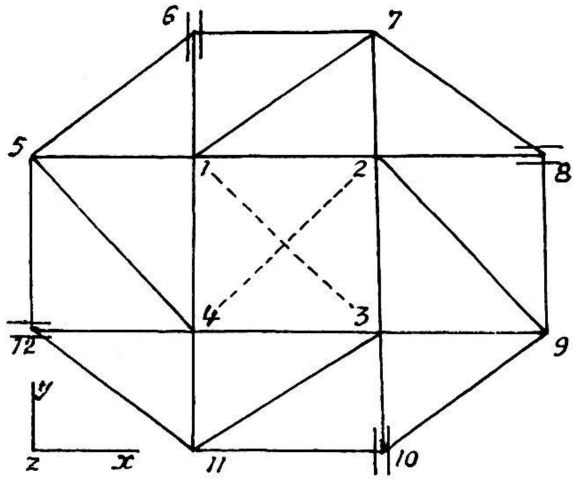

Fig. 2

Considérons les deux diagonales surabondantes 1–3 et 2–4; on peut en concevoir d'autres:

$$-f_{13} + v_{13} = -0{,}747\,(dx_1 - dx_3) + 0{,}665\,(dy_1 - dy_3)$$

$$\overline{0{,}747}^2 + \overline{0{,}665}^2 = 1$$

$$-f_{24} + v_{24} = +0{,}747\,(dx_2 - dx_4) + 0{,}665\,(dy_2 - dy_4)$$

En statique les coordonnées des nœuds ne servent qu'à calculer les coefficients; pour la diagonale 4–5 on a:

$$-f_{45} + v_{45} = -0{,}52\,(dx_4 - dx_5) - 0{,}53\,(dy_4 - dy_5) + \\ + 0{,}67\,(dz_4 - dz_5)$$

$$\text{mais } dz_5 = 0$$

$$\overline{0{,}52}^2 + \overline{0{,}53}^2 + \overline{0{,}67}^2 = 1$$

Le calcul des ellipsoïdes d'erreur est moins simple que précédemment, car les axes principaux ne sont plus parallèles aux axes de coordonnées; ce problème fut déjà traité dans cette Revue (voir [4]). Ici encore les forces extérieures ne sont pas indiquées sur la figure.

Le problème des liaisons

L'application de la méthode des moindres carrés permet aisément de tenir compte de liaisons en statique, et il y a même plus d'une solution. Dans la figure 1, par exemple, le sommet 1 est astreint à une liaison;

il en résulte, entre les inconnues, une équation nouvelle qui vient s'ajouter aux systèmes (3) ou (11). Une solution, assez courante, consiste à fractionner le calcul; dans une première étape on fait abstraction de la liaison, mais les valeurs obtenues pour les inconnues subissent des corrections lorsqu'on effectue la seconde phase, ultérieurement. On pourrait croire que c'est une complication, mais ce mode de calculer, par fractionnement, a fait ses preuves.

Considérations générales et finales

En hyperstatique, comme en géodésie, si on applique le procédé aux variations de coordonnées, il faut déterminer des éléments dits provisoires; en statique on a recours à des coupures fictives et à des forces de remplacement pour rendre le système statiquement déterminé. On obtient une structure, un état que l'on peut calculer (voir [2]); c'est un état initial permettant d'aboutir à l'état final. La notion de travail ou d'énergie de déformation intervient, ce qui justifie le rôle de la méthode des moindres carrés.

Les forces de remplacement susmentionnées sont choisies arbitrairement; les valeurs X_1, X_2, X_3 ..., qui répondent à la condition du minimum, sont les inconnues du problème. En fonction de ces dernières on peut exprimer l'énergie et former les dérivées de la fonction par rapport à X_1, X_2, X_3 ... ([5], p. 41). En les rendant nulles (théorème de Ménébréa), on obtient un système d'équations linéaires dites d'élasticité; cette solution est séduisante, mais donne lieu parfois à des mécomptes en pratique. Les coefficients des inconnues sont connus avec peu de précision, et le déterminant relatif au système d'équations a souvent une valeur très petite par rapport aux coefficients ([5], p. 68). Il y a donc ici autant d'inconnues que d'éléments surabondants. La méthode aux variations de coordonnées convient surtout quand le nombre des éléments surabondants est relativement élevé; grâce au calcul électronique, cette méthode prend de l'intérêt. Ici on a encore un état caractérisé par la valeur $[pvv]$ = minimum, qui est l'état final, mais qui est précédé d'un autre caractérisé par la valeur $[pff] \geq [pvv]$. Il y a analogie avec la géodésie; le passage de l'expression $[pff]$ à $[pvv]$ est l'étape vraiment intéressante, car c'est à ce moment-là que les coordonnées varient pour les nœuds du système. Le calcul des ellipses ou ellipsoïdes de déformation est aisé.

En conclusion on constate que l'application en géodésie de la méthode des moindres carrés n'est pas absolument exemple d'arbitraire; en mécanique, en statique, cette méthode est l'expression mathématique du théorème sur le travail de déformation minimum. On pourrait traiter le cas où il y a des moments, les v étant alors des valeurs angulaires.

Littérature

[1] *K. Friedrich,* Zwei aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitete Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1943, Mai).

[2] *B. Mayor,* Introduction à la statique graphique des systèmes de l'espace (Lausanne, Payot, 1926).
[3] *F. Stüssi,* Baustatik I, II (Birkhäuser, Basel).
[4] *A. Ansermet,* Calcul d'ellipsoïdes d'erreur (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1957).
[5] *F. Salles,* Initiation à la théorie de l'énergie élastique (Dunod, Paris).

Enquête concernant les influences de la réunion parcellaire sur l'évolution structurelle d'une commune rurale vaudoise

Par F. Quillet, ingénieur agronome, Lausanne

Introduites dans le canton de Vaud par la loi du 22 mai 1951, les réunions parcellaires ont accéléré le processus de groupement de la propriété foncière rurale. Elles ont permis, par leur coût modeste, de faire profiter rapidement un grand nombre d'agriculteurs de l'avantage majeur des remaniements intégraux: la diminution du nombre des parcelles et leur rapprochement de la ferme. Stade transitoire avant le remaniement intégral, la réunion parcellaire n'entre toutefois en ligne de compte que pour un périmètre pourvu de bonnes dévestitures et ne nécessitant pas de travaux d'assainissement.

Le but initial de cette enquête était de faire ressortir les incidences de la réunion sur l'économie des exploitations paysannes, c'est-à-dire les modifications de revenu ainsi engendrées. Devant la complexité de l'interaction des différents facteurs influençant l'évolution des revenus en agriculture, il est apparu impossible de déterminer rigoureusement, par une étude rétrospective, la part de l'augmentation de revenu devant être attribuée à la réunion parcellaire.

C'est pourquoi cette enquête est plus descriptive qu'analytique, le principal objet en étant l'évolution technique de l'agriculture de l'ensemble d'une commune, en rapport avec la réunion parcellaire.

La réunion parcellaire à Thierrens

A la croisée des routes menant de Moudon à Yverdon et de Lausanne à Estavayer-le-Lac, le territoire de la commune de Thierrens est adossé aux contreforts nord du Jorat, ancienne région tabulaire s'élevant progressivement du nord-ouest au sud-est, dont l'érosion glaciaire a modifié d'une façon considérable la forme primitive des sillons d'érosion fluviale; des dépôts glaciaires, de leur côté, y ont produit des modifications dans les formes extérieures des tronçons découpés par l'érosion. Les sols y sont, par conséquent, assez variés, plutôt légers et peu profonds, parfois caillouteux sur les crêtes, plus fertiles, parce que plus lourds, dans le fond des vallonnements. Les terres cultivables se trouvent à une altitude variant entre 700 et 800 mètres avec, comme extrêmes,