Interdépendance des transformations affine et d'Helmert en géodésie

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **60 (1962)**

Heft 9

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-217696

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 9 · LX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. September 1962

Interdépendance des transformations affine et d'Helmert en géodésie

Par A. Ansermet

Les transformations dont il est fait mention ci-dessus constituent des problèmes qui furent traités déjà abondamment, tout au moins quant à leur application dans le plan. Leur intérêt, au point de vue spatial, fut mis en évidence au cours de ces dernières années (voir [1]).

En principe, pour diverses raisons, un certain nombre de points sont déterminés à double, ce qui fait apparaître des discordances dont l'élimination totale ou au moins partielle s'impose. On sait que c'est un vrai problème-fleuve qui ne sera jamais résolu complètement.

La transformation d'Helmert peut être qualifiée de conforme, car elle comporte des translations, rotations et une correction d'échelle pour le système de points; en affinité il y a, spatialement, trois translations, trois rotations et une pure déformation. Cette dernière dépend de six paramètres d'où, en totalité, douze paramètres. En général, on a:

$$x' = ax + by + cz + d; \quad y' = \ldots\ldots, \quad z' = \ldots\ldots$$

Les translations ont pour but l'élimination des termes tels que d; seuls subsistent les neuf coefficients de x, y, z, qui constituent une matrice à neuf éléments. Une solution, pour ces translations, consiste à réaliser la coïncidence des centres de gravité des deux systèmes (x, y, z) et (x', y', z'). Dans la matrice les éléments diagonaux sont très voisins de un, tandis que les autres sont presque nuls; en formant les différences $(x' - x)$, $(y' - y)$, $(z' - z)$, les éléments diagonaux deviennent aussi très petits. Si la matrice est symétrique, on réalise un cas particulier très intéressant qui sera traité ci-après; il y a trois paramètres de moins, et la transformation se réduit à une pure déformation. L'affinité est dite aussi «transformation homogène».

En pratique le calculateur hésite parfois à faire un choix entre les divers modes de transformation; c'est le but principal de ces lignes de montrer qu'on peut concilier certains avantages de la transformation d'Helmert avec ceux de l'affinité. Dans celle-ci on peut fractionner le système en mailles (voir [2]), qui sont tétraédriques spatialement; mais la constitution des mailles n'est en général pas exempte d'arbitraire. On peut, comme on le verra, procéder aussi autrement.

Désignons par P_i et P_i' les points qui sont déterminés à double, les discordances à éliminer étant $P_i P_i'$ (élimination au moins partielle):

$$x_i' - x_i = (a - 1)\, x_i + b y_i + c z_i + d \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ou $$x_i' - x_i = dx_i = a' x_i + b y_i + c z_i + d.$$

Considérons un point $P(xyz)$ variable à l'intérieur du tétraèdre:

$$dx = a'x + by + cz + d.$$

L'élimination des quatre paramètres s'exprime par le déterminant:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ dx_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ dx_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ dx_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ dx & x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pour dy et dz, on a des développements analogues.

et en développant par rapport aux éléments de la première colonne:

$$dx = \frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4}{[p]} = \frac{[p\,dx]}{[p]}, \qquad (1)$$

où les p_1, p_2, p_3, p_4 sont proportionnels aux volumes des quatre tétraèdres ayant leur sommet commun au point variable P.

Exemple numérique: cas d'une maille triangulaire

Ici les poids p_i sont proportionnels aux surfaces des trois triangles ayant leur sommet commun au point P; on vérifie aussi les signes

$$\begin{vmatrix} dx_1 & +15 & +15 & 1 \\ dx_2 & +30 & +15 & 1 \\ dx_3 & +30 & +30 & 1 \\ dx & +25 & +20 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$dx = \frac{75\, dx_1 + 75\, dx_2 + 75\, dx_3}{225} = \frac{[dx]}{3}\,;\; dy = \frac{[dy]}{3}$$

Le point P est le centre de gravité de la maille.

Dissociation des rotations et des déformations pures

Pour faciliter les calculs, utilisons d'autres notations:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z \\ y' - y &= a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z \\ z' - z &= a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

les trois autres paramètres étant éliminés.

Posons: $2\,s_1 = a_{32} + a_{23}, \quad 2\,s_2 = a_{31} + a_{13}, \quad 2\,s_3 = a_{21} + a_{12}$
$2\,r_1 = a_{32} - a_{23}, \quad 2\,r_2 = a_{13} - a_{31}, \quad 2\,r_3 = a_{21} - a_{12}$

Les r_1, r_2, r_3 étant nuls si la matrice est symétrique,

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= (a_{11}\,x + s_3\,y + s_2\,z) + (r_2\,z - r_3\,y) \\ y' - y &= (s_3\,x + a_{22}\,y + s_1\,z) + (r_3\,x - r_1\,z) \\ z' - z &= (s_2\,x + s_1\,y + a_{33}\,z) + (r_1\,y - r_2\,x); \, (R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

où les trinômes expriment une déformation pure à six paramètres et les binômes à droite une rotation dont les composantes, suivant les axes de coordonnées, sont r_1, r_2, r_3. Les cosinus directeurs de l'axe instantané de rotation sont:

$$\frac{r_1}{R}, \; \frac{r_2}{R}, \; \frac{r_3}{R}.$$

Cas particulier. Si l'on a: $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ et $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \delta$, on retrouve la transformation d'Helmert, δ étant la variation d'échelle. Il y a donc une certaine corrélation entre cette transformation et l'affinité.

Transformation symétrique et droites doubles

Traitons auparavant le problème dans le plan en partant de la forme:

$$x' = a_{11}'\,x + a_{12}\,y \qquad y' = a_{21}\,x + a_{22}'\,y$$

Recherchons les droites pour lesquelles: $x' : x = y' : y$.

$$\frac{a_{11}'\,x + a_{12}\,y}{x} = \frac{a_{21}\,x + a_{22}'\,y}{y}$$

$$a_{11}'\,xy + a_{12}\,y^2 = a_{21}\,x^2 + a_{22}'\,xy$$

ou:
$$a_{12}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (a_{11}' - a_{22}')\left(\frac{y}{x}\right) - a_{21} = 0$$

Si $a_{12} = a_{21}$, le produit des racines pour $\left(\frac{y}{x}\right)$ est égal à -1; ces droites doubles sont rectangulaires. La transformation est dite symétrique. Spatialement on a:

$$x' : x = y' : y = z' : z = k \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}'\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}'\,y + a_{23}\,z \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}'\,z \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} (a_{11}' - k)\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= 0 \\ a_{12}\,x + (a_{22}' - k)\,y + a_{23}\,z &= 0 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + (a_{33}' - k)\,z &= 0 \end{aligned}\right.$$

équations qui sont compatibles si le déterminant ci-après est nul:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}' - k) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}' - k) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}' - k \end{vmatrix} = 0 \text{ ou: } k^3 - \mathrm{I}_1\,k^2 + \mathrm{I}_2\,k - \mathrm{I}_3 = 0 \quad (5)$$

$\mathrm{I}_1 = a_{11}' + a_{22}' + a_{33}'$.

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}' & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}' & a_{31} \\ a_{13} & a_{11}' \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}' \end{vmatrix}$$

Ce sont les invariants connus de la forme quadratique ternaire qui servent à déterminer les axes principaux d'un ellipsoïde quand: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

Pour k on trouve trois racines; les directions définies par les équations (4), en cas de symétrie de la matrice à neuf éléments, forment un système trirectangle.

En résumé, le praticien peut choisir entre trois transformations:

1° Celle d'Helmert à quatre paramètres;
2° celle avec symétrie, cas de l'affinité à six paramètres;
3° affinité, forme générale.

Auparavant on fait coïncider les centres de gravité des deux systèmes de points, ce qui élimine les trois paramètres de translation. Seuls subsistent ceux de rotation et de pure déformation.

Ces neuf paramètres suffisent pour définir la correspondance affine et pour éliminer les douze discordances qui se révèlent aux quatre sommets d'une maille tétraédrique; les douze coordonnées de ces sommets ne sont en effet plus indépendantes car on a:

$$[x] = [y] = [z] = 0 \quad \text{et} \quad [x'] = [y'] = [z'] = 0,$$

le centre de gravité commun étant l'origine.

Combinaison des transformations affine et d'Helmert

La méthode dite des mailles est séduisante; mais si, par exemple, on a un quadrilatère $ABCD$, on peut fractionner par AC ou par BD pour constituer deux mailles triangulaires; le calculateur est dans l'embarras. Spatialement il en est de même. Il faut renoncer à éliminer complètement les discordances; la somme de leurs carrés est rendue minimum, et les paramètres sont déterminés en conséquence.

On forme des équations non plus aux erreurs mais aux discordances. Il faut distinguer trois groupes d'équations, respectivement aux v_x, aux v_y et aux v_z. Sous forme implicite, on a:

$$[v_x] = [v_y] = [v_z] = 0 \quad \text{(voir [3])} \tag{6}$$

Ces équations sont relatives aux paramètres ou inconnues de translation éliminés au préalable.

Les rotations donnent lieu, toujours sous forme implicite, au système:

$$[xv_y - yv_x] = 0, \ [xv_z - zv_x] = 0, \ [yv_z - zv_y] = 0 \tag{7}$$

Ces systèmes (6) et (7) expriment que les discordances finales, si on les assimile à des forces, constituent un système en équilibre.

Les équations aux discordances auront donc la forme:

$$\left.\begin{cases} -f_{x_i} + v_{x_i} = a_{11}\,x_i + s_3\,y_i + \ldots & \mathrm{I} \\ -f_{y_i} + v_{y_i} = s_3\,x_i + a_{22}\,y_i + \ldots & \mathrm{II} \\ -f_{z_i} + v_{z_i} = s_2\,x_i + s_1\,y_i + \ldots & \mathrm{III} \end{cases}\right\} \begin{array}{c} i > 4 \\ \text{3 groupes de} \\ i \text{ équations} \end{array} \qquad (8)$$

si elles sont basées sur le système d'équations (3); il y en a 3 i en totalité. Les termes absolus f_{x_i}, f_{y_i}, f_{z_i} sont les discordances qui subsistent avant qu'on ait fait subir au système de points les rotations et déformations pures définies précédemment.

Les paramètres inconnus sont de petites quantités et, pour ce calcul, les valeurs x_i, y_i, z_i peuvent être arrondies.

Enfin, pour faciliter le raisonnement, admettons:

$$[xy] \cong [xz] \cong [yz] \cong 0$$

A. Transformation d'Helmert (conforme). δ est la variation d'échelle. Les quatre équations normales, sous forme implicite, sont:

$$\left.\begin{aligned} [xv_x + yv_y + zv_z] &= 0 \\ [yv_z - zv_y] &= 0 \\ [zv_x - xv_z] &= 0 \\ [xv_y - yv_x] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Les éléments diagonaux de la matrice des équations normales sont:

$$[xx + yy + zz],\ [zz + yy],\ [zz + xx],\ [yy + xx]$$

$i =$	δ	r_1	r_2	r_3	Groupes
1	x_1		z_1	$-y_1$	I (v_{x_i})
2	x_2		z_2	$-y_2$	
3	x_3		z_3	$-y_3$	
.	.		.	.	
.	.		.	.	
.	.		.	.	
1	y_1	$-z_1$		x_1	II (v_{y_i})
2	y_2	$-z_2$		x_2	
3	y_3	$-z_3$		x_3	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
1	z_1	y_1	$-x_1$		III (v_{z_i})
2	z_2	y_2	$-x_2$		
3	z_3	y_3	$-x_3$		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	.		

B. Affinité symétrique

Déformation pure. Equations normales:

$$\left.\begin{array}{c}[xv_x] = 0,\ [yv_y] = 0,\ [zv_z] = 0 \\ [zv_y + yv_z] = 0 \\ [zv_x + xv_z] = 0 \\ [yv_x + xv_y] = 0\end{array}\right\} \quad (10)$$

Eléments diagonaux:

$[xx], [yy], [zz]$ $[zz + yy], [zz + xx]$ $[yy + xx]$

$i =$	a_{11}	a_{22}	a_{33}	s_1	s_2	s_3	Groupes
1	x_1				z_1	y_1	
2	x_2				z_2	y_2	
3	x_3				z_3	y_3	I
.	.				.	.	(v_{x_i})
.	.				.	.	
.	.				.	.	
1		y_1		z_1		x_1	
2		y_2		z_2		x_2	
3		y_3		z_3		x_3	II
.		.		.		.	(v_{y_i})
.		.		.		.	
.		.		.		.	
1			z_1	y_1	x_1		
2			z_2	y_2	x_2		
3			z_3	y_3	x_3		III
.			.	.	.		(v_{z_i})
.			.	.	.		
.			.	.	.		

Il n'est guère facile d'opérer un choix entre ces deux transformations; tout dépend de l'allure des discordances.

L'affinité sous sa forme générale dépend des systèmes d'équations (2) ou (3); elle comporte neuf paramètres et permet encore mieux d'éliminer les discordances qu'avec les solutions *A* et *B*. Les rotations et la déformation pure contribuent en effet à cette élimination.

D'autre part, la méthode des mailles est aussi à envisager, malgré les réserves que l'on peut formuler à son égard.

Appliquons les équations (2):

$$\left.\begin{array}{ll}-f_x + v_{x_i} = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z & \mathrm{I} \\ -f_{y_i} + v_{y_i} = \ldots & \mathrm{II} \\ -f_{z_i} + v_{z_i} = \ldots & \mathrm{III}\end{array}\right\} \quad (11)$$

Il en résulte les neuf équations ci-après:

$$\left.\begin{array}{l}[xv_x] = [yv_x] = [zv_x] = 0; \quad [xv_y] = [yv_y] = [zv_y] = 0 \\ [xv_z] = [yv_z] = [zv_z] = 0\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Les trois dernières équations du système (9) sont compatibles avec les équations (12). Les v_x, v_y, v_z, discordances finales, si on les assimile à des forces, constituent encore un système en équilibre. Mais ces derniers v_x, v_y, v_z sont certainement plus petits que précédemment. Quant aux équations (3), elles fournissent un système qui équivaut à (12), mais sous une forme différente.

Ce serait une lacune de ne pas citer une transformation encore plus générale dite parfois homographique à 15 paramètres:

$$\left.\begin{array}{c} x' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{-ax - by - cz + 1}; \quad y' = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{-ax - by - cz + 1}; \\[2ex] z' = \dfrac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{-ax - by - cz + 1} \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Les signes au dénominateur facilitent le calcul.

$$\text{posons:} \quad a_1 - 1 = a_1', \quad b_2 - 1 = b_2', \quad c_3 - 1 = c_3'$$

$$\left.\begin{array}{l} x' - x = a_1' x + b_1 y + c_1 z + d_1 + axx' + byx' + czx' \\ y' - y = a_2 x + b_2' y + c_2 z + d_2 + axy' + byy' + czy' \\ z' - z = a_3 x + b_3 y + c_3' z + d_3 + axz' + byz' + czz' \end{array}\right\} \qquad (14)$$

(on devrait ajouter aux x, y, z et x', y', z' des indices i) $\quad i > 5$

En raisonnant comme précédemment et en remarquant que dans les membres de droite les x, x'; y, y'; z, z' jouent le rôle de coefficients, on peut attribuer une valeur commune, arrondie à x et x' puis à y et y' et enfin à z et z'; on obtient 15 équations normales sous forme implicite:

$$\left.\begin{array}{ll} [v_x] = [v_y] = [v_z] = 0 & (\text{pour les } d_1, d_2, d_3) \\ [xv_x] = [yv_x] = [zv_x] = 0 & (\text{pour } a_1', b_1, c_1) \\ [xv_y] = [yv_y] = [zv_y] = 0 & (\text{pour } a_2, b_2', c_2) \\ [xv_z] = [yv_z] = [zv_z] = 0 & (\text{pour } a_3, b_3, c_3') \\ [x^2 v_x + xy\, v_y + xz\, v_z] = 0 & (\text{pour } a) \\ [xy\, v_x + y^2 v_y + yz\, v_z] = 0 & (\text{pour } b) \\ [xz\, v_x + yz\, v_y + z^2 v_z] = 0 & (\text{pour } c) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

(Quant aux dimensions des paramètres, il faut distinguer 3 groupes)

Cette solution générale du problème posé présente un intérêt plus théorique que pratique; pour la valeur $i = 5$, il y a 15 discordances, que l'on peut entièrement éliminer. Encore une fois ce problème est vaste, et le but de ces lignes était d'en mettre en évidence quelques aspects.

Littérature:

[1] *W. Kuny,* «Festpunktlose räumliche Triangulation» (Wittwer, Stuttgart).

[2] *H. Merkel,* «Zur maschenweisen Abbildung» (Vermessungsnachrichten, 1934).

[3] *A. Ansermet,* «Sur un théorème en aéromensuration» (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1955, N° 9).

Reisebericht aus der Elfenbeinrepublik (Westafrika)

Von L. Hardegen, Heerbrugg

Immer noch sind größere und kleinere Gebiete der sogenannten «weißen Flecken» auf der heutigen Weltkarte zu erkennen. Um diese nur teilweise oder noch vollends unbekannten Gebiete zu erschließen, werden alljährlich umfangreiche Expeditionen vorbereitet und durchgeführt.

Wenn diese geographischen Unternehmen auch nicht mit denen um die Jahrhundertwende verglichen werden können, so erfordern auch diese Expeditionen trotz der Anwendung moderner technischer Errungenschaften und Hilfsmittel bei derartigen Unternehmen Mühe und Ausdauer.

Weite Gebiete unbekannten Geländes befinden sich in Asien, Australien, in der Arktis und Antarktis und in Teilen von Nord- und Südamerika. Auch in Afrika finden wir heute noch umfangreiche «geodätisch unerschlossene» Gebiete. Angefangen von Nordafrika mit den anschließenden großen Sandwüsten, über die Savannen im Sudan, Tschad, Niger, Mali und Mauritanien, bis zu den großen Urwäldern von Guinea, Liberia, der Elfenbeinküste, Nigeria und noch weiter bis Äquatorialafrika, befinden sich noch Tausende von Hektaren Busch, Savannen und Sumpflandschaften, von denen nur unvollständiges Kartenmaterial vorliegt. Die gesammelten Erfahrungen über Erkundung und Vermessung unbegangenen Gebietes erstrecken sich in der Hauptsache auf Westafrika und hier besonders auf die Elfenbeinküste.

Eine unserer Expeditionen wurde im Sommer 1959 auf dem Hauptvermessungsamt in Abidjan in Zusammenarbeit mit dem Bauamt der Elfenbeinrepublik in der Hauptstadt Abidjan vorbereitet. Die Aufgabe der Expedition bestand in der Begehung des Geländes zum Zwecke des Aufsuchens eines günstigen Verbindungsweges zwischen Soubré und Dagpadou (vgl. Abbildung 1). Hierbei sollte das Längenprofil und das zu jeder Aufnahmestation erforderliche Querprofil aufgenommen werden. Diese Vermessung mußte erfolgen, da sowohl das Längen- als auch die Querprofile für das Vorprojekt einer neu zu bauenden Straße notwendige Unterlagen sind. Der neue Verbindungsweg sollte ungefähr in der Nähe der in der Karte sichtbaren Verbindungslinie zwischen Koudoujou, einem