

Sur le calcul de réseaux à mesures linéaires

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **60 (1962)**

Heft 11

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-217707>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur le calcul de réseaux à mesures linéaires

Par A. Ansermet

La compensation de mesures angulaires est un problème qui, depuis longtemps, fut traité sur toutes ses faces. Pour des raisons faciles à comprendre, on ne peut pas dire qu'il en soit de même en ce qui concerne les mesures linéaires. En principe il y a peu de différences; quelques particularités sont cependant à mettre en évidence. A cet effet deux applications seront développées ci-après, toutes deux étant de caractère élémentaire. Il y a lieu, d'une part, de combiner des mesures linéaires, dont on veut améliorer la précision, avec des mesures angulaires revêtant une forme spéciale. D'autre part, dans les exemples traités, les équations de condition sont établies en dissociant le calcul des termes absolus; en télémétrie, pour certains problèmes, une telle solution peut présenter des avantages. En triangulation la détermination des termes absolus est, en général, moins laborieuse; elle n'est donc pas dissociée.

Première application. Considérons (fig. 1) une base AD fractionnée de telle manière que:

$$AB \cong BC \cong CD \cong l_0 \text{ (valeur provisoire } l_0)$$

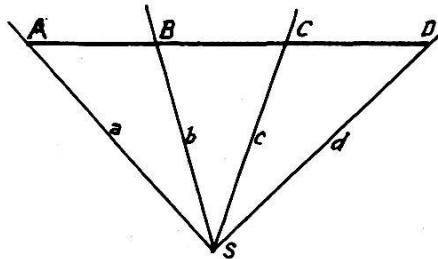


Fig. 1

Quatre mesures sont effectuées: l_1, l_2, l_3, l_4 .

$$AC = l_1 + v_1, \quad BD = l_2 + v_2, \quad AB = l_3 + v_3, \quad CD = l_4 + v_4$$

de plus: $BC = l_0 + dy, \quad AB = l_0 + dx, \quad CD = l_0 + dz$

Les v_1, v_2, v_3, v_4 étant tels que $[pvv] = \text{minimum}$.

On en déduit quatre équations dont la forme est usuelle:

$$\left. \begin{array}{ll} -f_1 + v_1 = +dx + dy; & \text{poids: } 1,0 = p_1 \\ -f_2 + v_2 = & +dy + dz; \text{ poids: } 1,0 = p_2 \\ -f_3 + v_3 = +dx; & \text{poids: } 1,5 = p_3 \\ -f_4 + v_4 = & +dz; \text{ poids: } 1,5 = p_4 \end{array} \right\} \quad (1)$$

On obtient deux matrices mutuellement inverses: celle des équations normales et celle des coefficients de poids des inconnues compensées:

$$\begin{bmatrix} 2,5 + 1,0 & 0 \\ + 1,0 & 2,0 + 1,0 \\ 0 & + 1,0 & 2,5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0,533 - 0,333 + 0,133 \\ - 0,333 & 0,833 - 0,333 \\ + 0,133 - 0,333 & 0,533 \end{bmatrix} \quad (2)$$

d'où les poids P_1, P_2, P_3, P_4 a posteriori:

$$\frac{1}{P_1} = 0,533 + 0,833 - 2 \cdot 0,333 = 0,700 = \frac{1}{P_2}$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{1}{P_4} = 0,533$$

Contrôle: $[p_i : P_i]_1^4 = 0,700 + 0,700 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,533 = 3,00$ (3 inconnues).

Seconde phase des calculs. Pour accroître la précision on effectue des mesures angulaires, mais en stationnant en un point S (fig. 1) dont la position n'est pas connue par rapport à la base; les mesures n'interviennent qu'indirectement sous la forme du birapport (anharmonique):

$$(ABCD) = (abcd). \quad ((abcd) \text{ admis exempt d'erreur})$$

on peut avoir 24 rapports avec 6 valeurs distinctes seulement:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin(ca)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(da)}{\sin(db)} = k \quad (\text{ici } k \cong 4/3) \quad (3)$$

$$3(2l_0 + dx + dy)(2l_0 + dy + dz) \cong 4(l_0 + dy)(3l_0 + dx + dy + dz)$$

$$6l_0(dx + 2dy + dz) \cong 12l_0 dy + 4l_0(dx + dy + dz) \quad (4)$$

en négligeant les termes en $dx \cdot dy, dx \cdot dz, dy \cdot dz \dots$ finalement:

$$dx - 2dy + dz \cong 0, \quad \text{ou} \quad dx - 2dy + dz + w = 0$$

le terme absolu w étant encore inconnu.

Poids a posteriori P_i' . Cette étape du calcul est connue (voir [2], [3]). Il faut former les expressions:

$$\frac{[(A)f']^2}{[A(A)]}$$

les f' étant les coefficients des inconnues dans le système (1) tandis que les (A) sont les coefficients dits parfois transitoires:

$$A_1 = +1, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = +1$$

$$\left. \begin{array}{l} (A_1) = +0,533 + 2 \cdot 0,333 + 0,133 = +1,333 \\ (A_2) = -0,333 - 2 \cdot 0,833 - 0,333 = -2,333 \\ (A_3) = +0,133 + 2 \cdot 0,333 + 0,533 = +1,333 \end{array} \right\} [A(A)] = 7,333$$

Pour le système (1) on a quatre valeurs $[(A)f']$:

- I $[(A)f'] = + 1,333 - 2,333 = - 1,00$; $[(A)f']^2 : [(A)A] = 0,136$
 II $[(A)f'] = - 2,333 + 1,333 = - 1,00$; $[(A)f']^2 : [A(A)] = 0,136$
 III $[(A)f'] = + 1,333$; $(1,333^2 = 1,777)$; $[(A)f']^2 : [A(A)] = 0,243$
 IV $[(A)f'] = + 1,333$; $[(A)f']^2 : [A(A)] = 0,243$

Contrôle des poids P_i' :

$$0,700 - 0,136 \cdot 1,0 = 0,564$$

$$0,700 - 0,136 \cdot 1,0 = 0,564$$

$$0,800 - 0,243 \cdot 1,5 = 0,436$$

$$0,800 - 0,243 \cdot 1,5 = 0,436$$

$$[p_i : P_i] = 3,000$$

$$2,000 = [p_i : P_i']$$

L'amélioration résultant du birapport $(abcd)$ est manifeste.

Position de la station S. Formons le logarithme de $(abcd)$:

$$\log (abcd) = \log \sin (ca) - \log \sin (cb) - \log \sin (da) + \log \sin (db)$$

une solution favorable correspond aux valeurs:

$$(ca) \cong (db) \cong 90^\circ \quad (\text{angles } ASC \text{ et } BSD),$$

car les différences logarithmiques pour les sinus de ces deux angles sont nulles ou négligeables. Avec un théodolite moderne, c'est un jeu de déterminer rapidement et avec précision un rapport anharmonique; la méthode connue des combinaisons binaires est indiquée pour la mesure des angles.

On pourrait considérer un problème plus vaste avec cinq points A, B, C, D, E et cinq rayons a, b, c, d, e .

Seconde application. Le problème traité porte encore sur des mesures linéaires qui sont au nombre de neuf dont deux surabondantes; il y a cinq sommets (fig. 2) et, par suite, dix variations de coordonnées. Mais trois de

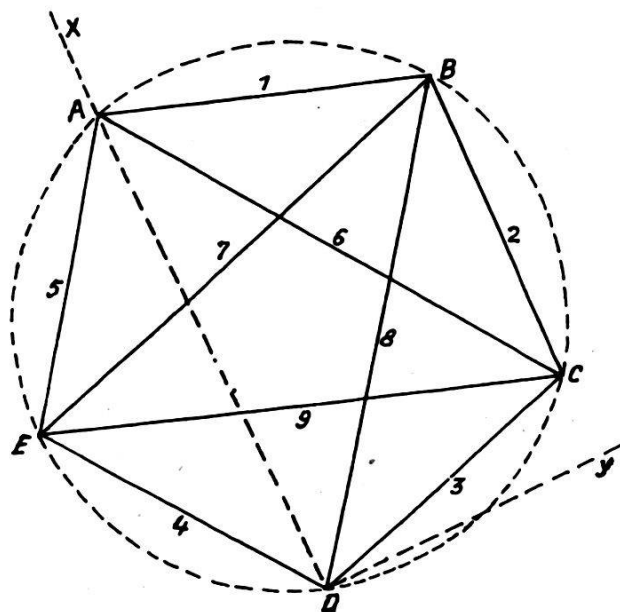


Fig. 2

ces valeurs peuvent être choisies arbitrairement; en fait elles seront nulles. Ce sont les dx_d et dy_d du point D , choisi comme origine et dy_a de A , point par lequel passe l'axe des x . Le problème, fort élémentaire, consiste à déterminer le poids de la diagonale non mesurée AD , c'est-à-dire le poids de l'abscisse x_a du point A ou plutôt de la variation dx_a que l'on choisit comme première inconnue. L'équation initiale revêt la forme usuelle:

$$-f_i + v_i = a_i dx_a + b_i dx_b + c_i dy_b + d_i dx_c + e_i dy_c + g_i dx_e + h_i dy_e \quad (\text{poids } p_i = 1) \quad (5)$$

Le coefficient de poids de l'inconnue dx_a sera donc $[\alpha\alpha]$ ([1], p. 27). Cette expression est trop connue et ne nécessite pas d'explications; ce n'est du reste pas $[\alpha\alpha]$ qui sera calculé mais $[FF]$ (voir [2]), car le problème sera résolu par la méthode aux équations de condition.

Ces lignes poursuivent un double but:

1° Montrer qu'ici on peut faire abstraction des termes absolus w .

2° Vérifier que les α et les F sont les mêmes coefficients obtenus par des voies différentes. Certains lecteurs penseront qu'une telle vérification n'est pas nécessaire; citons ici, sans la traduire, une phrase extraite d'un ouvrage considéré comme standard par les géodésiens: «Ein förmlicher Beweis, dass die Koeffizienten F unabhängig von der ersten Form der Funktion sind, ist nicht leicht zu führen; ein förmlicher Beweis ist auch nicht nötig . . . » (voir [2]).

La fonction en question est ici celle qui servira à déterminer le poids de AD ; elle peut revêtir diverses formes.

Ces considérations générales étaient nécessaires pour bien poser le problème; pour faciliter les calculs et les rendre plus explicites admettons l'hypothèse suivante: Les cinq sommets, en position provisoire, sont situés rigoureusement sur un même cercle. Les côtés 1 à 5 ont la même longueur choisie comme unité (1 km, 10 km . . .).

Avant d'établir les équations de condition, établissons le tableau des coefficients $a_i, b_i, c_i \dots$ dont l'utilité sera révélée plus loin:

$i =$	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	g_i	h_i	
1	+0,309	-0,309	+0,951					
2		+1,00		-1,00				
3				+0,309	+0,951			
4						+0,809	-0,588	
5	+0,809					-0,809	-0,588	(5')
6	+0,809			-0,809	+0,588			
7		+0,309	+0,951			-0,309	-0,951	
8		+0,809	+0,588					
9				-0,309	+0,951	+0,309	-0,951	

$$0,309^2 + 0,951^2 = 1 \quad 0,809^2 + 0,588^2 = 1$$

Si l'on fait abstraction de l'une des neuf équations du système (5), il en reste huit, entre lesquelles on peut éliminer les sept inconnues; le résultat prend la forme:

$$[Av] + w = 0 \quad (\text{les } A \text{ sont des coefficients}) \quad (6)$$

C'est une équation de condition; il en faut ici une seconde. Cette solution analytique générale avait une portée théorique mais, grâce à l'emploi de calculatrices modernes, on peut l'envisager. Appliquons la formule de Ptolémée aux figures $ABCE$ et $BCDE$:

$$\left. \begin{aligned} (1,00 + v_1) (1,62 + v_9) + (1,00 + v_2) (1,00 + v_5) &\cong (1,62 + v_6) (1,62 + v_7) \\ (1,00 + v_2) (1,00 + v_4) + (1,00 + v_3) (1,62 + v_7) &\cong (1,62 + v_8) (1,62 + v_9) \end{aligned} \right\} (7)$$

$$(1,00 \cdot 1,00 + 1,00 \cdot 1,62 = 1,62 \cdot 1,62 = 2,62)$$

En négligeant les termes en $v_1 v_2, v_1 v_3 \dots v_8 v_9$, on obtient les coefficients des v ; le signe \cong évite d'ajouter un terme absolu qui n'est pas calculé. Soient a_i', b_i' les coefficients:

$i =$	a_i'	b_i'	$a'a'$	$b'b'$	$a'b'$	f_I	f_{II}	f_{III}
1	+1,62		2,62			-1,00		+0,62
2	+1,00	+1,00	1,00	1,00	+1,00	-1,62		
3		+1,62		2,62		-1,00	+0,62	
4		+1,00		1,00			+1,00	+0,62
5	+1,00		1,00				+0,62	+1,00
6	-1,62		2,62			+1,62	+0,62	
7	-1,62	+1,00	2,62	1,00	-1,62			-1,00
8		-1,62		2,62		+1,62		+0,62
9	+1,00	-1,62	1,00	2,62	-1,62		-1,00	
			10,86 = = [a'a']	10,86 = = [b'b']	-2,24 = = [a'b']			

En appliquant encore le théorème de Ptolémée, on peut former trois fonctions pour exprimer AD ; la figure le montre clairement:

I (ABCD) $AD (1,00 + v_2) \cong (1,62 + v_6) (1,62 + v_8) - (1,00 + v_1) (1,00 + v_3)$ ou, en multipliant par $(1,00 - v_2)$ et en posant $(1,00 + v_2) (1,00 - v_2) = 1,00$
 $AD \cong (1,62 + v_6) (1,62 + v_8) (1,00 - v_2) - (1,00 + v_1) (1,00 + v_3) (1,00 - v_2)$ le coefficient de v_2 , par exemple, sera: $-1,62^2 + 1,00 = -2,62 + 1,00 = -1,62$

II (ACDE) $AD \cdot (1,62 + v_9) \cong (1,00 + v_3) (1,00 + v_5) + (1,00 + v_4) (1,62 + v_6)$ ou $AD \cdot 1,62^2 \cong (1,00 + v_3) (1,00 + v_5) (1,62 - v_9) + (1,00 + v_4) (1,62 + v_6) (1,62 - v_9)$
coefficient de v_9 : $(-1,00 - 1,62) : 1,62^2 = (-2,62) : 2,62 = -1,00$

III (ABDE) $AD (1,62 + v_7) \cong (1,00 + v_1) (1,00 + v_4) + (1,00 + v_5) (1,62 + v_8)$ ou $AD \cdot 1,62^2 \cong (1,00 + v_1) (1,00 + v_4) (1,62 - v_7) + (1,00 + v_5) (1,62 + v_8) (1,62 - v_7)$
coefficient de v_7 : $(-1,00 - 1,62) : 1,62^2 = -1,00 (1,62 : 2,62 = 0,62)$

Le tableau ci-dessus indique les coefficients sous f_I, f_{II}, f_{III} .

$$[af]_{\text{I}} = [bf]_{\text{I}} = -5,86; \quad [af]_{\text{II}} = -1,38, \quad [bf]_{\text{II}} = +3,62$$

$$[af]_{\text{III}} = +3,62, \quad [bf]_{\text{III}} = -1,38$$

On forme ensuite les équations dites parfois transitoires:

$$\text{I} \quad \begin{cases} +10,86 r_1 - 2,24 r_2 - 5,86 = 0 & r_1 = r_2 = +0,68 \\ -2,24 r_1 + 10,86 r_2 - 5,86 = 0 & \text{(voir [2])} \end{cases}$$

On obtient deux autres systèmes en changeant les termes absolus:

$$\text{II} \quad \begin{cases} +10,86 r_1' - 2,24 r_2' - 1,38 = 0 \\ -2,24 r_1' + 10,86 r_2' + 3,62 = 0 \end{cases} \quad r_1' = +0,061 \quad r_2' = -0,32$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} +10,86 r_1'' - 2,24 r_2'' + 3,62 = 0 \\ -2,24 r_1'' + 10,86 r_2'' - 1,38 = 0 \end{cases} \quad r_1'' = -0,32 \quad r_2'' = +0,061$$

Nous possédons tous les éléments pour calculer les F et $[FF]$.

On applique l'expression connue:

$$F_i = f_i + a_i' r_1 + b_i' r_2 \quad \text{(voir [2])} \quad (8)$$

en attribuant à f_i les valeurs contenues dans les colonnes du tableau ci-dessus sous $f_{\text{I}}, f_{\text{II}}, f_{\text{III}}$, tandis qu'on a successivement les trois paires de coefficients (r_1, r_2) , (r_1', r_2') et (r_1'', r_2'') .

Sur les neuf valeurs F_i bornons-nous à en considérer deux qui seront calculées à triple:

$$F_2 = -1,62 + 1,00 \cdot 0,68 + 1,00 \cdot 0,68 = +1,00 \cdot 0,061 - 1,00 \cdot 0,32$$

$$= -1,00 \cdot 0,32 + 1,00 \cdot 0,061 = -0,26$$

$$F_4 = +1,00 \cdot 0,68 = +1,00 - 1,00 \cdot 0,32 = +0,62 + 1,00 \cdot 0,061 =$$

$$= +0,68.$$

Les F_i sont portées, quant à leurs valeurs, dans le tableau ci-après; le triple calcul montre bien la concordance des 27 valeurs prises trois à trois, mais il faut encore comparer avec les α_i .

Concordance des α_i et des F_i

On sait que $\alpha_i = a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13} \dots + h_i Q_{17}$ ([1], p. 29) pour $p_i = 1$, le tableau (5') fournissant les coefficients $a_i, b_i, c_i \dots$. Bornons-nous à vérifier les équations connues:

$$[a\alpha] = [aF] = 1, \quad [b\alpha] = [bF] = 0, \quad [c\alpha] = [cF] = 0 \dots [h\alpha] = [hF] = 0. \quad (9)$$

$i =$	$F =$	aF	bF	cF	dF	eF	gF	hF
1	+0,10	+0,03	-0,03	+0,095				
2	-0,26		-0,26		+0,26			
3	+0,10				+0,03	+0,095		
4	+0,68						+0,55	-0,40
5	+0,68	+0,55					-0,55	-0,40
6	+0,52	+0,42			-0,42	+0,305		
7	-0,42		-0,13	-0,40			+0,13	+0,40
8	+0,52		+0,42	+0,305				
9	-0,42				+0,13	-0,40	-0,13	+0,40
[FF] = 1,91		+1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\alpha\alpha$] = 1,91		Les sept sommes ci-dessus concordent avec les équations (9).						

Le but de ces lignes était de mettre en évidence quelques aspects et particularités des compensations portant sur des mesures linéaires, surtout en ce qui concerne la pratique des calculs. De tels problèmes sont actuels.

Littérature

- [1] C. F. Baeschlin, «Ausgleichsrechnung und Landesvermessung».
- [2] Jordan-Eggert, «Vermessungskunde», I.
- [3] A. Ansermet, «A propos d'une forme générale de compensation» (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1959, N^o 11).

Alte Vermessungsstrukturen in moderner Landschaft

Zusammenfassung des Lichtbildervortrags von *Georges Grosjean*, gehalten an der 35. Hauptversammlung der Schweizerischen Gesellschaft für Photogrammetrie am 5. Mai 1962 in Bern

Die Schaffung großräumiger Planlandschaften, wie etwa der niederländischen Ijsselmeerpolder, ist nicht eine Erscheinung allein des 20. Jahrhunderts. Die Untersuchung alter Kulturlandschaften zeigt, daß oft unter scheinbar zufälliger Streuung der Siedlungen und unter scheinbar zwangslosem Verlauf von Straßen, Wegen und Grenzen bewußte Strukturen verborgen sind, die das Ergebnis systematischer Vermessung und Landaufteilung darstellen.

Das westschweizerische Mittelland eignet sich besonders für solche Untersuchungen. Hier ist auffällig, daß westlich und nordwestlich der Saane und Aare regelmäßige, dem Rechteck sich nähernde Gemeindeareale vorwiegen, die in der Regel nur *eine* Siedlungsagglomeration aufweisen. Ihre Fläche ist ziemlich einheitlich in der Größenordnung um 300 ha. Östlich und südöstlich der Saane und Aare dagegen sind die Gemeinden viel größer und uneinheitlicher, in der Größenordnung von 1000 bis 2000 ha; die Gemeindegrenzen sind unregelmäßig, lehnen sich öfter natürlichen Geländelinien an, und die Areale enthalten neben einer zentralen Dorfsiedlung mehrere Weiler und zahlreiche Einzelhöfe. Die