Graphische und halbgraphische Teilung von Vierecken

Autor(en): **Danial, N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **60 (1962)**

Heft 12

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-217710

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 · LX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Dezember 1962

Graphische und halbgraphische Teilung von Vierecken

Von Dr. N. Danial, Kairo

1. Aufgabe im allgemeinen

Von einem Viereck $ABCD$ (Fig. 1) soll $\frac{1}{n}$ seiner Fläche durch eine Gerade M_1N_1 in der Art abgeteilt werden, daß die Teilstrecke BM_1 zur Seite BC im gleichen Verhältnis $\frac{1}{n}$ steht.

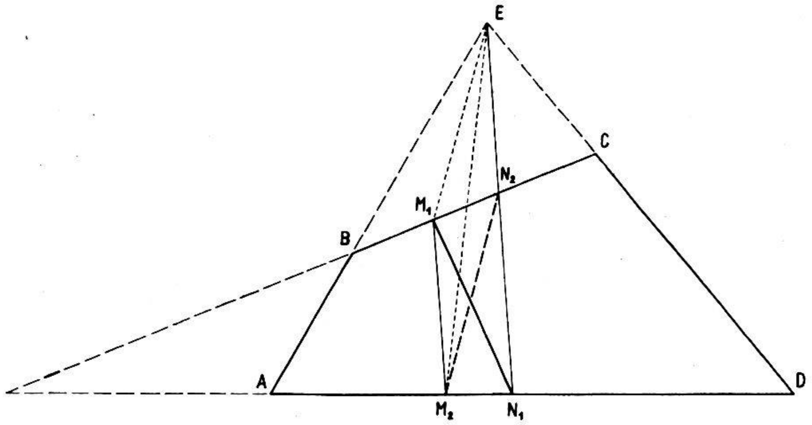

Fig. 1

2. Lösung

a) Man bestimmt den Hilfspunkt M_2 auf der Seite AD, so daß

$$\frac{AM_2}{AD} = \frac{BM_1}{BC} = \frac{1}{n},$$

und verbindet M_1 mit M_2.

b) Man ergänzt das Viereck $ABCD$ zu einem Dreieck AED, wobei der Teilpunkt M_1 und der Hilfspunkt M_2 auf den Seiten gegenüber der Spitze E liegen müssen.

c) Von E zieht man die Parallele EN_1 zur Verbindungslinie M_1M_2. Sie schneidet BC und AD der Reihe nach in N_2 und N_1.

d) Die zwischen M_1 und N_1 gezogene Gerade ist die gesuchte Teillinie. Es wird also

$$ABM_1N_1 = \frac{ABCD}{n}.$$

e) Soll die Teillinie nicht durch M_1, sondern durch M_2 gehen, so verbindet man M_2 mit N_2. Aus der Figur 1 ist ersichtlich, daß die Dreiecke $M_1M_2N_2$ und $M_1M_2N_1$ flächengleich sind. Es ist also

$$ABN_2M_2 = \frac{ABCD}{n}.$$

Teilpunkt und Hilfspunkt sind somit vertauschbar.

3. Beweis

$$\begin{aligned}
ABM_1N_1 &= ABM_1M_2 + M_2M_1N_1 \\
&= ABM_1M_2 + M_2M_1E \qquad (M_1M_2/EN_1) \\
&= AEM_2 - BEM_1 \\
&= \frac{AED}{n} - \frac{EBC}{n} \\
&= \frac{ABCD}{n}
\end{aligned}$$

4. Anwendungen

4.1 Von dem Viereck $ABCD = F$ soll ein Stück $AMND = f$ durch eine Gerade MN abgeschnitten werden, die durch einen auf AB gelegenen Punkt M geht.

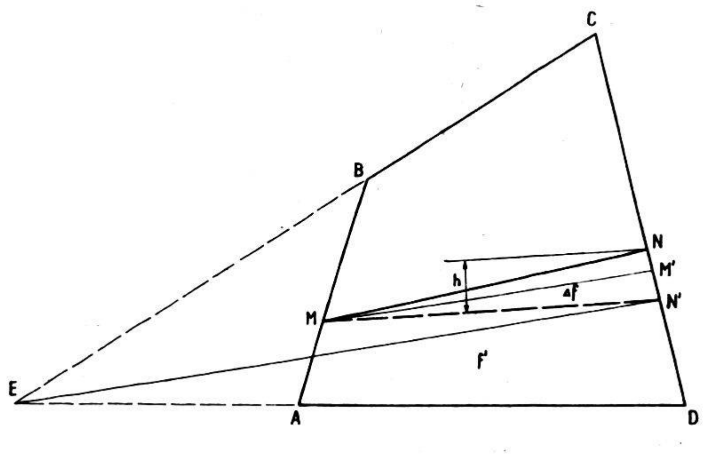

Fig. 2

Es gibt hier zwei Lösungen

4.1.1 Die erste Lösung (Fig. 2)

a) Man rechnet das Verhältnis $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{n}$ aus und bestimmt auf CD den Hilfspunkt M', der durch

$$\frac{M'D}{CD} = \frac{1}{n}$$

definiert ist.

b) Nach dem erwähnten Verfahren bestimmt man N'. Es wird dann

$$AMN'D = \frac{ABCD}{n} = f'.$$

c) Ist f' von f verschieden, so rechnet man die Flächendifferenz

$$\Delta f = f - f'.$$

d) In der Zeichnung mißt man die Länge MN' und rechnet die Höhe h des Dreieckes MNN' von der Fläche Δf:

$$h = \frac{2 \cdot \Delta f}{MN'}$$

e) Im Abstand h zieht man die Parallele zur ersten Teillinie MN'. Sie schneidet CD in N. Die Gerade MN ist die gesuchte Teillinie.

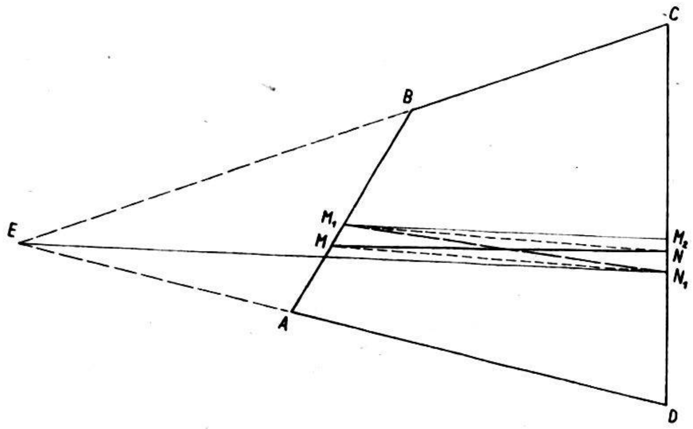

Fig. 3

4.1.2 Die zweite Lösung (Fig. 3)

a) Man bestimmt das Flächenverhältnis $\frac{f}{F} = \frac{1}{n}$.

b) Auf den Seiten AB und CD bestimmt man die Punkte M_1 und M_2, so daß

$$\frac{AM_1}{AB} = \frac{DM_2}{DC} = \frac{1}{n}.$$

c) Nach demselben Verfahren findet man N_1. Es ist also

$$AM_1N_1D = \frac{ABCD}{n} \quad \text{oder} \quad f = \frac{F}{n}.$$

d) Nun beschränkt sich die Aufgabe darauf, daß man die Figur AM_1N_1D in eine flächengleiche Figur $AMND$ umwandelt.
Wie Figur 3 zeigt, läßt sich das leicht machen, indem man von M_1 eine Parallele zu MN_1 zieht, die die Seite CD in N schneidet. MN ist die gesuchte Teillinie.

4.2. Das Viereck $ABCD$ (Fig. 4) soll nach den Verhältnissen von $m:n:\ldots:r$ geteilt werden.

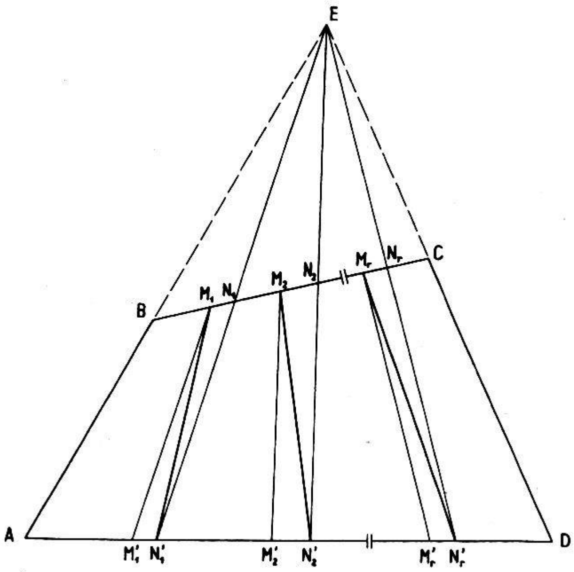

Fig. 4

a) Die Teilpunkte M_1, M_2, ... M_r sowie die Hilfspunkte M_1', M_2', ... M_r' werden so gewählt, daß

$$\frac{BM_1}{BC} = \frac{AM_1'}{AD} = m$$

$$\frac{M_1M_2}{BC} = \frac{M_1'M_2'}{AD} = n$$

....

$$\frac{M_rC}{BC} = \frac{M_r'D}{AD} = r$$

b) Nach demselben Verfahren werden N_1, N_2, ... N_r sowie N_1', N_2', ... N_r' bestimmt.

c) Die Teillinien sind entweder M_1N_1', M_2N_2' ... M_rN_r' oder $M_1'N_1$, $M_2'N_2$, ... $M_r'N_r$.

d) Durch Figurenumwandlung können die Teillinien in gewissen Grenzen gedreht werden, wenn sie andere Zwecke erfüllen sollen.

4.3 Von dem Viereck $ABCD = F$ (Fig. 5) soll ein Stück $ABGH = f$ abgeteilt werden, so daß

$$\frac{AH}{AD} = \frac{BG}{BC} = m.$$

a) Man rechnet zuerst das Flächenverhältnis $\frac{f}{F} = \frac{1}{n}$.

b) Der Teilpunkt M und der Hilfspunkt M' werden so gewählt, daß

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AM'}{AD} = \frac{1}{n}.$$

c) Die Teillinien MN' und $M'N$ sind grobe Annäherungen für die gesuchte Teillinie, die zwischen den beiden Geraden liegen muß.

d) Der Natur des Teilungsverfahrens nach ist

$$\frac{a}{L} = \frac{a'}{L'} = \frac{1}{n}.$$

Es soll aber

$$\frac{a + d}{L} = \frac{a' + c}{L'}$$

sein. Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$\frac{d}{c} = \frac{L}{L'}.$$

e) Mit einem Lineal sucht man eine Gerade GH, die das Verhältnis $\frac{d}{c}$ berücksichtigt. Natürlich müssen die schraffierten Dreiecke flächengleich sein, was zu erreichen ist.

f) Sollte das Teilen von bloßem Auge nicht genügen, so wählt man den Punkt G_1, der das Verhältnis $\frac{d}{c}$ mehr oder weniger berücksichtigt, und durch Figurenumwandlung bestimmt man den Punkt H_1. Stimmt das Verhältnis $\frac{MG_1}{M'H_1'}$ mit $\frac{L}{L'}$ überein, so ist G_1H_1 die endgültige Teillinie. Weist es eine Differenz auf, so ist sie durch nochmalige Anwendung des Verfahrens zu beheben.

g) Im Gegensatz zur rechnerischen Lösung gelangt man mit dieser Methode rasch zum Ziel.

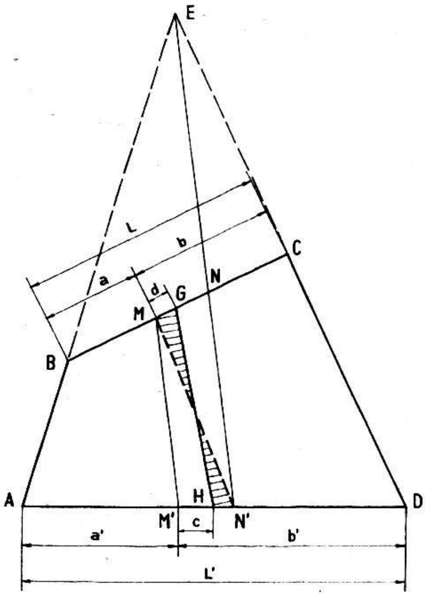

Fig. 5

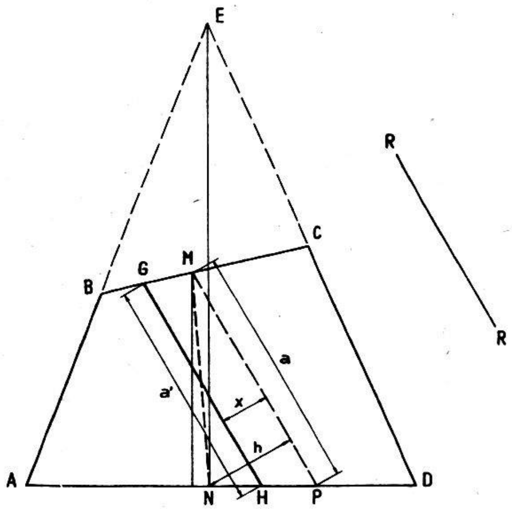

Fig. 6

4.4 Von dem Viereck $ABCD = F$ soll durch eine Parallele zu RR eine bestimmte Fläche f abgeschnitten werden (Fig. 6).

a) Man bestimmt MN, so daß

$$\frac{ABMN}{ABCD} = \frac{f}{F}.$$

b) Von M (oder N) zieht man eine Parallele MP zur gegebenen Richtung.

c) Die Aufgabe beschränkt sich jetzt darauf, daß man das Dreieck NMP in ein flächengleiches Trapez umwandelt, so daß

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a + a'}{2} \cdot x.$$

a und h werden der Zeichnung entnommen.

$$x = \frac{a \cdot h}{a + a'} = \frac{h}{1 + \frac{a'}{a}}.$$

d) Als erste Annäherung wählt man $a' = a$. Dann wird

$$x_1 = \frac{h}{2}.$$

Mit dem Abstand x_1 von MP zieht man die Parallele G_1H_1. Ihre Länge a_1' wird gemessen. Ein neuer Wert x_2 für x ergibt sich aus

$$x_2 = \frac{h}{1 + \frac{a_1'}{a}}.$$

Man wiederholt dieses Verfahren so lange, bis die Differenzen in den x-Werten verschwinden. Praktisch genügen zwei Wiederholungen.