

Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **61 (1963)**

Heft 3

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-218442>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques

par A. Ansermet

Dans de nombreux domaines, en technique instrumentale notamment (voir [3]), on rencontre des fonctions périodiques qu'il faut analyser et dont on doit déterminer les coefficients. Dans la pratique on se borne en général à calculer une expression dite «somme trigonométrique» revêtant la forme suivante:

$$S(x) = y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (1)$$

Ce problème n'est pas nouveau, mais la solution classique ne donne pas toujours satisfaction au praticien; le but de ces lignes est surtout de mettre en évidence certains aspects de cette somme quant à son application. L'expression $S(x)$ peut être convertie en une somme de sinus ou de cosinus ([2], p. 211), par exemple:

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x = r \sin(x + \alpha)$$

où
$$r^2 = A_1^2 + B_1^2 \quad \text{tg } \alpha = A_1 : B_1$$

Après cette substitution sous forme de sinus, les termes prennent le nom d'harmoniques, la quantité telle que r étant une demi-amplitude. Faisons de plus l'hypothèse initiale suivante: Les valeurs observées de x sont contenues dans une seule période, égale ou ramenée à la valeur 2π . On aura n couples de valeurs expérimentales

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3 \dots x_n, y_n$$

donnant lieu à un système de n équations.

Un premier cas, très simple, est celui où le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues; il n'y a pas de compensation. $S(x)$ reçoit alors le nom de somme trigonométrique d'interpolation; ce cas simple est traité à fond dans la littérature ([2], p. 213). Toutes les discordances sont éliminées, mais ce calcul présente peu d'intérêt.

Pour la compensation proprement dite, et en vue de faciliter les calculs, on s'efforce de réaliser la condition suivante: La matrice du système d'équations normales est diagonale, et il en est de même pour la matrice inverse, celle des coefficients de poids des inconnues compensées.

La solution usuelle consiste à réaliser l'équidistance des n valeurs de x , mais une solution plus générale sera développée.

Solution de Bessel

Pour faciliter les écritures la période 2π sera exprimée en degrés (360°); de plus on peut avoir recours à une solution provisoire; l'équation (1) prend alors la forme familière et générale:

$$-f + v = dA_0 + dA_1 \cos x + dA_2 \cos 2x + \dots + dB_1 \sin x + dB_2 \sin 2x + \dots \quad (2)$$

la définition des f étant connue (valeur provisoire — valeur observée), tandis que les dA et dB sont les corrections à apporter aux valeurs provisoires des inconnues. D'autres particularités sont à signaler: On peut éliminer dA_0 en formant des équations réduites, mais les termes absolus f sont seuls à réduire car, grâce à l'équidistance des x , on a: $[\sin x] = [\cos x] = [\cos 2x] = \dots = 0$.

Des cas concrets montreront de façon explicite la marche à suivre le nombre des inconnues est limité à cinq, ce qui suffit au point de vue didactique. On aura successivement $n = 6$, puis $n = 7$:

	$x =$	$2x =$	$\cos x =$	$\sin x =$	$\cos 2x =$	$\sin 2x =$	
1	30°	60°	+ 0,866	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,866	+ 1
2	90°	180°	0,00	+ 1,00	- 1,00	0,00	+ 1
3	150°	300°	- 0,866	+ 0,500	+ 0,500	- 0,866	+ 1
4	210°	420°	- 0,866	- 0,500	+ 0,500	+ 0,866	+ 1
5	270°	540°	0,00	- 1,00	- 1,00	0,00	+ 1
6	330°	660°	+ 0,866	- 0,500	+ 0,500	- 0,866	+ 1

Certains calculateurs attribuent la valeur zéro à x , initialement, au lieu de 30°; cette valeur est arbitraire. Poids à priori: $p = 1$.

Inconnues: $dA_1, dB_1, dA_2, dB_2, dA_0$.

On obtient immédiatement la matrice des équations normales et l'inverse:

$$\begin{bmatrix} 3,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,00 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

En remarquant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et de même pour $2x$, on obtient les poids à posteriori qui sont tous égaux: $\frac{1}{P} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Contrôle de ces poids: $[p : P] = 6 \times \frac{5}{6} = 5$ (5 inconnues).

Le calcul des termes absolus des équations normales est facile.

En particulier on a: $-[f] = 6dA_0$

$$-[\cos x \cdot f] = 3dA_1 \quad -[\sin x \cdot f] = 3dB_1 \dots \quad (3)$$

C'est grâce à la propriété connue dite d'orthogonalité que les matrices sont diagonales. L'exemple ci-après fut conçu en vue d'être combiné avec le précédent; on a encore converti en degrés:

	$x =$	$2x =$	$\cos x =$	$\sin x =$	$\cos 2x =$	$\sin 2x =$	
1	25°,7	51°,4	+ 0,901	+ 0,434	+ 0,624	+ 0,782	1
2	77°,1	154°,3	+ 0,223	+ 0,975	- 0,901	+ 0,434	1
3	128°,6	257°,1	- 0,624	+ 0,782	- 0,223	- 0,975	1
4	180°	360°	- 1,00	0,00	+ 1,00	0,00	1
5	231°,4	462°,9	- 0,624	- 0,782	- 0,223	+ 0,975	1
6	282°,9	565°,7	+ 0,223	- 0,975	- 0,901	- 0,434	1
7	334°,3	668°,6	+ 0,901	- 0,434	+ 0,624	- 0,782	1

Quatre éléments diagonaux de la matrice des équations normales sont égaux à 3,5 et le cinquième à 7. A priori on a $p = 1$.

Pour les sept poids à posteriori on obtient la valeur $\frac{5}{7} = \frac{1}{P}$ ou $P = \frac{7}{5} = 1,4$. Dans ces deux exemples les poids sont amplifiés 1,2, puis 1,4 fois.

Solution générale

L'application trop systématique de l'équidistance dans le choix des valeurs de x présente des inconvénients; graphiquement les ordonnées $y_1, y_2 \dots y_n$ sont donc tracées à intervalles réguliers, et leurs extrémités coïncident plus ou moins avec la courbe représentative de la fonction $S(x) = y$. Si cette courbe présente des sinuosités prononcées, il serait désirable que l'intervalle entre deux ordonnées puisse varier, la matrice des équations normales restant diagonale. Une solution consiste à combiner deux groupes de valeurs x , ceux pour lesquels $n = 6$ et $n = 7$ par exemple; les valeurs initiales pour x peuvent varier, la différence $30^\circ - 25^\circ,7 = 4^\circ,3$ étant arbitraire. Le calculateur a donc bien des possibilités.

	$x =$	
1	25°,7	} Deux intervalles 51°,4 et 60°
2	30°	
3	77,1	
4	90	
5	128,6	
6	150	
7	180	
8	210	
9	231,4	
10	270	
11	282,9	
12	330	
13	334,3	

La forme des équations normales est toujours:

$$[v] = 0; [\cos x \cdot v] = [\sin x \cdot v] = [\cos 2x \cdot v] = [\sin 2x \cdot v] = 0, \quad (4)$$

et pour la matrice on obtient, en se basant sur ce qui précède:

$$\begin{bmatrix} 6,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13,0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs inverses des éléments diagonaux sont les coefficients de poids des inconnues compensées. L'amplification des poids est ici égale à $13/5 = 2,6$ fois.

A certains égards on pourrait renoncer à l'équidistance des valeurs observées, mais les calculs deviennent longs; cette solution portant sur deux équidistances ($51',4$ et 60°) joue un rôle intermédiaire. Dans certains cas elle sera fort opportune.

Méthode de Tchebicheff

Lorsque le nombre des inconnues augmente et surtout si le nombre n des observations devient fort élevé, on a recours à une solution plus simple dont le mérite revient à Tchebicheff; une solution provisoire n'est plus nécessaire. La forme initiale est de nouveau:

$$S(x) = y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots$$

L'inconnue A_0 est toujours calculée par l'expression:

$$nA_0 = [y]_1^n. \quad \text{Ce } A_0 \text{ peut être éliminé.}$$

De plus on admet la valeur initiale $x = 0$; traitons un cas concret pour $n = 48$ et 9 inconnues. Il y a équidistance, et la période est 2π .

La somme trigonométrique considérée est dite d'ordre $p = 4$. L'examen du tableau permet instantanément d'écrire les relations (5):

$$\left. \begin{aligned} y_0 - y_{180} &\cong 2(A_1 + A_3) & y_{90} - y_{270} &\cong 2(B_1 - B_3) & (\nu = 1) \\ y_0 - y_{90} + y_{180} - y_{270} &\cong 4A_2 & y_{45} - y_{135} + y_{225} - y_{315} &\cong 4B_2 & (\nu = 2) \\ y_0 - y_{60} + y_{120} - y_{180} + y_{240} - y_{300} &\cong 6A_3; \\ y_{30} - y_{90} + y_{150} - y_{210} + y_{270} - y_{330} &\cong 6B_3 & (\nu = 3) \\ y_0 - y_{45} + y_{90} - y_{135} + y_{180} - y_{225} + y_{270} - y_{315} &\cong 8A_4 & (\nu = 4) \\ y_{22,5} - y_{67,5} + y_{112,5} - y_{157,5} + y_{202,5} - y_{247,5} + y_{292,5} - \\ - y_{337,5} &\cong 8B_4 & (\nu = 4) \end{aligned} \right\} (5)$$

	x	$2x$	$3x$	$4x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\sin 2x$	$\cos 3x$	$\sin 3x$	$\cos 4x$	$\sin 4x$
1	0	0	0	0	+1,00	0,00	+1,00	0,00	+1,00	0,00	+1,00	0,00
2	7°,5											
3	15°	30°	45°	60°	+0,966	+0,259	+0,866	+0,500	+0,707	+0,707	+0,500	+0,866
4	22,5	45	67,5	90	+0,924	+0,383	+0,707	+0,707	+0,383	+0,924	0,00	+1,00
5	30	60	90	120	+0,866	+0,500	+0,500	+0,866	0,00	+1,00	-0,500	+0,866
6	37,5											
7	45	90	135	180	+0,707	+0,707	0,00	+1,00	-0,707	+0,707	-1,00	0,00
8	52,5											
9	60	120	180	240	+0,500	+0,866	-0,500	+0,866	-1,00	0,00	-0,500	-0,866
10	67,5	135	202,5	270	+0,383	+0,924	-0,707	+0,707	-0,924	-0,383	0,00	-1,00
11	75	150	225	300	+0,259	+0,966	-0,866	+0,500	-0,707	-0,707	+0,500	-0,866
12	82,5											
13	90	180	270	360	0,00	+1,00	-1,00	0,00	0,00	-1,00	+1,00	0,00
14	97,5											
15	105	210	315	420	-0,259	+0,966	-0,866	-0,500	+0,707	0,707	+0,500	+0,866
16	112,5	225	337,5	450	-0,383	+0,924	-0,707	-0,707	+0,924	-0,383	0,00	+1,00
17	120	240	360	480	-0,500	+0,866	-0,500	-0,866	+1,00	0,00	-0,500	+0,866
18	127,5											
19	135	270	405	540	-0,707	+0,707	0,00	-1,00	+0,707	+0,707	-1,00	0,00
20	142,5											
21	150	300	450	600	-0,866	+0,500	+0,500	-0,866	0,00	+1,00	-0,500	-0,866
22	157,5	315	472,5	630	-0,924	+0,383	+0,707	-0,707	-0,383	+0,924	0,00	-1,00
23	165	330	495	660	-0,966	+0,259	+0,866	-0,500	-0,707	+0,707	+0,500	-0,866
24	172,5											
25	180	360	540	720	-1,00	0,00	+1,00	0,00	-1,00	0,00	+1,00	0,00
26	187,5											
27	195	390	585	780	-0,966	-0,259	+0,866	+0,500	-0,707	-0,707	+0,500	+0,866
28	202,5	405	607,5	810	-0,924	-0,383	+0,707	+0,707	-0,383	-0,924	0,00	+1,00
29	210	420	630	840	-0,866	-0,500	+0,500	+0,866	0,00	-1,00	-0,500	+0,866
30	217,5											
31	225	450	675	900	-0,707	-0,707	0,00	+1,00	+0,707	-0,707	-1,00	0,00
32	232,5											
33	240	480	720	960	-0,500	-0,866	-0,500	+0,866	+1,00	0,00	-0,500	-0,866
34	247,5	495	742,5	990	-0,383	-0,924	-0,707	+0,707	+0,924	+0,383	0,00	-1,00
35	255	510	765	1020	-0,259	-0,966	-0,866	+0,500	+0,707	+0,707	+0,500	-0,866
36	262,5											
37	270	540	810	1080	0,00	-1,00	-1,00	0,00	0,00	+1,00	+1,00	0,00
38	277,5											
39	285	570	855	1140	+0,259	-0,966	-0,866	-0,500	-0,707	+0,707	+0,500	+0,866
40	292,5	585	877,5	1170	+0,383	-0,924	-0,707	-0,707	-0,924	+0,383	0,00	+1,00
41	300	600	900	1200	+0,500	-0,866	-0,500	-0,866	-1,00	0,00	-0,500	+0,866
42	307,5											
43	315	630	945	1260	+0,707	-0,707	0,00	-1,00	-0,707	-0,707	-1,00	0,00
44	322,5											
45	330	660	990	1320	+0,866	-0,500	+0,500	-0,866	0,00	-1,00	-0,500	-0,866
46	337,5	675	1012,5	1350	+0,924	-0,383	+0,707	-0,707	+0,383	-0,924	0,00	-1,00
47	345	690	1035	1380	+0,966	-0,259	+0,866	-0,500	+0,707	-0,707	+0,500	-0,866
48	352,5											

Des remarques essentielles sont opportunes: il a été fait abstraction des v ; de plus cette succession de termes positifs et négatifs entraîne l'élimination de l'inconnue A_0 même si ce A_0 n'était pas éliminé.

Les formules générales de Tchebicheff sont, en substituant 2π à 360° :

$$\left. \begin{aligned}
A_\nu + A_{3\nu} + A_{5\nu} + A_{7\nu} + \dots &\cong \frac{1}{2\nu} \left[y(0) - y\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \right. \\
&+ y\left(2\frac{\pi}{\nu}\right) - y\left(3\frac{\pi}{\nu}\right) + \dots - y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{\nu}\right) \left. \right] \\
B_\nu - B_{3\nu} + B_{5\nu} - B_{7\nu} + \dots &\cong \frac{1}{2\nu} \left[y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2\nu}\right) + \right. \\
&+ y\left(\frac{5\pi}{2\nu}\right) - \dots - y\left((4\nu-1)\frac{\pi}{2\nu}\right) \left. \right]
\end{aligned} \right\} (6)$$

Il n'y a que des indices multiples impairs de ν pour les A et les B . Dans les relations (5) on a successivement $\nu = 1, 2, 3, 4$. Si $\nu = 1$, on considère comme valables les indices ν et 3ν ; si $\nu = 2, 3, 4$, on fait abstraction des valeurs $3\nu = 6, 3\nu = 9, 3\nu = 12$, et ainsi de suite. Dans l'exemple numérique la valeur n fut portée à 48 pour mieux montrer l'application de la méthode.

En résumé les praticiens disposent des solutions suivantes:

- 1° celle classique de Bessel qui est trop connue pour donner lieu à des commentaires;
- 2° celle plus générale tendant à fractionner la série d'éléments observés en deux groupes ayant chacun une équidistance propre pour les valeurs x ; la matrice des équations normales est aussi diagonale;
- 3° la méthode de Tchebicheff, pour un nombre n fort élevé d'observations.

Pour terminer rappelons, au sujet de ce problème, une appréciation d'un géodésien éminent (sans traduire): «Genau genommen ergeben die Gleichungen gar nicht die A und B selbst, sondern Aggregate aus unendlich vielen Gliedern» (Helmert, Ausgleichsrechnung, p. 411). Cette remarque visait la solution de Bessel.

Littérature

- [1] *Fréchet et Romann*, Représentation de lois empiriques (Paris, Eyrolles).
- [2] *Runge und König*, Numerisches Rechnen (Berlin, Springer).
- [3] *A. Ansermet*, Beitrag zur Bestimmung von Kreisteilungsverbesserungen (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1954).