Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 61 (1963)

Heft: 6

Artikel: L'analogie entre les ellipsoïdes d'erreur et les ellipsoïdes de déformation en statique

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-218448

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 · LXI. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Juni 1963

L'analogie entre les ellipsoïdes d'erreur et les ellipsoïdes de déformation en statique

Par A. Ansermet

Rappel de notions usuelles. Cet intéressant problème fut abordé dans la présente Revue, mais de façon assez succincte et en laissant de côté certains aspects du calcul (numéro de décembre 1961). On se trouve en présence d'un système de points appelés sommets ou nœuds, reliés mutuellement par des côtés ou des barres; les côtés sont mesurés tandis que les barres subissent des déformations, allongements ou raccourcissements.

A la base du calcul, si les éléments connus sont en nombre surabondants, on a la condition: $[pvv]$ = minimum.

Pour les barres du système articulé on a:

$$p_1 : p_2 : p_3 \ldots = \frac{E_1 S_1}{l_1} : \frac{E_2 S_2}{l_2} : \frac{E_3 S_3}{l_3} \ldots \qquad \text{(voir [6])}$$

où les E sont les coefficients d'élasticité, les S les sections transversales des barres et les l leurs longueurs; de plus $v = \frac{Tl}{ES}$ en laissant les indices de côté, les T étant les tensions. Les lecteurs connaissent la signification des p et des v en télémétrie (mesures linéaires).

La détermination des éléments surabondants est basée sur le même raisonnement en géodésie et en statique; considérons un système de cinq sommets ou nœuds reliés mutuellement par dix côtés ou barres. Il y a donc quinze coordonnées spatiales inconnues mais, sans déformer le système, on peut lui faire subir trois translations et trois rotations. Géométriquement cela revient à choisir arbitrairement six coordonnées; en d'autres termes, on attribuera une valeur nulle à six variations de coordonnées des sommets ou nœuds. Le choix de ces six éléments n'est pas toujours facile; spatialement on a donc au moins six liaisons. En général une liaison s'exprime analytiquement par une relation F (x, y,

$z) = 0$ entre les coordonnées d'un sommet ou nœud déterminé ou aussi, en fonction des variations de coordonnées, par une équation telle que $a_0\,dx + b_0\,dy + c_0 dz = 0$. Le nœud est astreint à se déplacer sur une surface.

Rappelons enfin la formule: $m^2_0 \cong [pvv] : r$, où m_0 est l'erreur quadratique moyenne relative à l'unité de poids (en statique la déformation). Le nombre d'éléments surabondants est égal à r.

Equations aux erreurs et aux déformations

L'établissement de ces équations est l'étape fondamentale du calcul; il y a là quelques particularités à mettre en évidence. Quand on se base sur des mesures linéaires, il est impossible de déterminer les coordonnées des sommets sans ambiguïté; une solution entre plusieurs consiste, comme en statique, à couper momentanément les côtés surabondants, ce qui lève l'ambiguïté. Le praticien est parfois dans l'embarras pour choisir ces côtés dont il est fait abstraction. On obtient alors des valeurs provisoires qui diffèrent de quantités f_i de celles mesurées; la solution provisoire correspond à des valeurs nulles pour les variations des coordonnées.

On a donc la forme générale connue:

$$v = f + a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz') \qquad (a^2 + b^2 + c^2 = 1) \tag{1}$$

$[pff] \geq [pvv]$; les (dx, dy, dz) et (dx', dy', dz') sont les variations de coordonnées des extrémités du côté mesuré. En statique on coupe aussi les barres surabondantes après les avoir choisies, ce qui est souvent malaisé; mais on ne peut pas former les termes absolus f comme ci-dessus. Après ces coupures on obtient une structure statiquement déterminée; aux forces extérieures viennent s'ajouter, pour chaque barrée coupée, deux forces opposées de grandeur arbitraire (en général 1 tonne chacune). C'est la solution provisoire de la statique; on passe ensuite à l'état final caractérisé par les valeurs $X_1 \cdot 1^T$, $X_2 \cdot 1^T$, $X_3 \cdot 1^T$ ... pour les tensions inconnues dans les barres coupées. Ces X_1, X_2, X_3 ... sont les inconnues hyperstatiques ($[pvv]$ minimum). Pour la solution provisoire on avait $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, ce qui fournit les f; l'équation (1) est encore valable. On passe des f aux v en faisant varier les coordonnées des nœuds. Certains staticiens ont formé des équations sans opérer de coupures, donc sans avoir recours à des termes absolus f ([2], p. 50–57); des conditions d'équilibre furent ajoutées et il y a autant d'inconnues que d'équations, ce qui peut mener loin (une équation par barre, trois par nœud, une par réaction ou liaison).

Il est essentiel de remarquer que les solutions provisoires ont un caractère arbitraire tant en ce qui concerne le choix des côtés ou barres à couper que celui des forces s'exerçant provisoirement à chaque coupure (en général 1 tonne). On peut ajouter une valeur provisoire ou la retrancher dans les équations sans modifier les poids.

L'équation aux erreurs ou aux déformations revêt donc la forme:

$$-f_i + v_i = a_i\,(dx_g - dx_h) + b_i\,(dy_g - dy_h) + c_i\,(dz_g - dz_h) \qquad (2)$$
$$\text{poids } p_i \quad (a^2{}_i + b^2{}_i + c^2{}_i = 1)$$

i est l'indice de la barre ou du côté, g et h les indices des nœuds ou sommets. Les dx, dy, dz sont des variations. Ce système d'équations (2) est l'élément de base du problème; on peut calculer les poids des inconnues ou de fonctions de celles-ci indépendamment des f_i. En particulier on calculera les poids P_i des binômes $(-f_i + v_i)$; ce sont les poids des côtés ou des barres *a posteriori* à comparer avec ceux *a priori* p_i. On a $P_i > p_i$ et la somme des quotients $(p_i : P_i)$ est égale au nombre des inconnues ([5]). Un cas concret sera traité ci-après.

La quantité $[pvv]$ exprime le *travail de déformation* (minimum). Pour simplifier admettons $dx_h = dy_h = dz_h = 0$ et posons:

$$-f_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy + c_i \cdot dz$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\,[pvv]}{\partial\,dx} = \left[pv\,\frac{\partial v}{\partial\,dx}\right] = [pav] = 0. \text{ De même: } [pbv] = [pcv] = 0. \qquad (3)$$

Ce sont les équations normales sous forme implicite avec la matrice des coefficients:

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pba] & [pbb] & [pbc] \\ [pca] & [pcb] & [pcc] \end{bmatrix} \qquad \text{termes absolus: } [paf],\ [pbf],\ [pcf]$$

Pour les ellipsoïdes il faut s'efforcer de réduire l'influence des éléments non diagonaux et de rendre les coefficients quadratiques presque égaux; le cas concret le montrera. Les dx, dy, dz fournis par les équations répondent à la condition $[pvv]$ = minimum; c'est le cas simple où un sommet ou un nœud est considéré isolément. Admettons ce point comme origine d'un nouveau système de coordonnées parallèle au précédent, donc obtenu par translation et désignons par (dx), (dy), (dz) les coordonnées nouvelles; on aura donc, en fonction de ces accroissements:

$$v_i' = a_i(dx) + b_i(dy) + c_i\,dz + v_i \qquad (4)$$

et en tenant compte des équations (3): $\quad [pvv'] = [pvv]$

$$[pv'v'] = [pvv] + (QT) \qquad (5)$$

où (QT) est une forme quadratique ternaire (six termes) en (dx), (dy), (dz). C'est l'équation d'un ellipsoïde d'erreur ou de déformation dont le centre est le point pour lequel $[pvv]$ = minimum; si les coefficients quadratiques sont seuls différents de zéro, on a:

$$[pv'v'] = [pvv] + [paa]\,(dx)^2 + [pbb]\,(dy)^2 + [pcc]\,(dz)^2 \qquad (6)$$

Dans le cas général à six termes pour (QT) on retrouve un problème connu de géométrie analytique; on forme les trois invariants de la forme quadratique ternaire ([5], [3], p. 167). Les axes principaux sont vite calculés. Le terme $[pv'v']$ exprime un travail de déformation, ce qui confère de l'intérêt aux ellipsoïdes. L'équation (6) devient:

$$\frac{(dx)^2}{Q_{11}} + \frac{(dy)^2}{Q_{22}} + \frac{(dz)^2}{Q_{33}} = \text{constante } K \quad (\text{par exemple: } K = m^2{}_0). \tag{7}$$

Les dénominateurs, dits coefficients de poids des inconnues, sont les inverses des poids $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$. On a en effet:

$$dx = -\frac{1}{[paa]}[paf].$$

En application de la loi de propagation des erreurs et des poids de Gauss, on obtient pour le poids p_x de dx en posant $m^2{}_0 = 1$:

$$\frac{1}{p_x} = \left(\frac{p_1 a_1}{[paa]}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{p_2 a_2}{[paa]}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \left(\frac{p_3 a_3}{[paa]}\right)^2 \frac{1}{p_3} + \ldots = \frac{1}{[paa]} = Q_{11} \tag{8}$$

Les poids des f jouent ici un rôle, mais pas les f. $[pbb]\ Q_{22} = 1$, $[pcc]\ Q_{33} = 1$. Dans le cas général où les coefficients $[pab]$, $[pac]$, $[pbc]$ ne sont pas nuls, le calcul est connu (voir [1]).

Application. Considérons un système articulé avec un seul nœud libre 1 relié par des barres à quatre nœuds fixes 2, 3, 4, 5. En radiotélémétrie ce même problème se présente avec des mesures linéaires.

	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i
barre 1–2	+0,817	0,00	+0,577	1,0	1,38
barre 1–3	0,00	—0,817	+0,577	1,2	1,55
barre 1–4	—0,817	0,00	+0,577	1,0	1,38
barre 1–5	0,00	+0,817	+0,577	1,2	1,55

$$[pab] = [pac] = [pbc] = 0$$

$$[paa] = 1{,}33, \qquad [pbb] = 1{,}60, \qquad [pcc] = 1{,}47$$

$$Q_{11} = 0{,}75 \qquad Q_{22} = 0{,}625 \qquad Q_{33} = 0{,}68$$

$$\sqrt{Q_{11}} = 0{,}867 \qquad \sqrt{Q_{22}} = 0{,}79 \qquad \sqrt{Q_{33}} = 0{,}825$$

$$\frac{(dx)^2}{0{,}75} + \frac{(dy)^2}{0{,}625} + \frac{(dz)^2}{0{,}68} = m^2{}_0 = 1 \tag{9}$$

(ce $m^2{}_0$ a une dimension)

Cette surface diffère peu d'une sphère; on a trois paires de plans respectivement parallèles aux plans de symétrie de l'ellipsoïde et tan-

gents à cette surface; dans le cas particulier c'est suffisant, car les axes de coordonnées coïncident avec les axes principaux. Chacune des quatre barres fournit aussi une paire de plans tangents normaux par rapport à ces barres; le centre de la surface est à la distance $\pm m_0 : \sqrt{P_i}$ de ces plans (voir [1]), [5]), donc $\pm\sqrt{1/P_i}$ si l'on admet $m^2_0 = 1$. Ces poids P_i, dits *a posteriori,* sont les poids *a priori* p_i amplifiés par l'application du principe des moindres carrés. On a pour la somme des quotients $(p_i : P_i)$:

$$[p_i : P_i] = 2 \times \frac{1}{1{,}38} + 2 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}55} = 2\,(0{,}727 + 0{,}773) = 3{,}00 = \qquad (10)$$

$$= \text{nombre des inconnues.}$$

Les P_i sont les poids des binômes $(-f_i + v_i)$.

Or, ici on rencontre une concordance parfaite avec la géométrie. Considérons l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et la tangente à la courbe dont la direction est connue; son équation est: ([3], p. 134)

$$y = mx + h = mx + \sqrt{m^2 a^2 + b^2} = \operatorname{tg}\varphi \cdot x \cdot + \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi \cdot a^2 + b^2}$$

où h est le segment déterminé sur l'axe des y par la tangente $(x = 0)$. La distance de l'origine à la tangente est $h \cos\varphi$, d'où:

$$h^2 \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \cdot a^2 + \cos^2\varphi \cdot b^2$$

et, en introduisant les valeurs numériques de l'équation (9):

$$h^2 \cos^2\varphi = \overline{0{,}817}^2 \times 0{,}75 + \overline{0{,}577}^2 \times 0{,}68 = 0{,}727 \qquad \text{(plan } x\text{–}z)$$

et $$h^2 \cos^2\varphi = \overline{0{,}817}^2 \times 0{,}625 + \overline{0{,}577}^2 \times 0{,}68 = 0{,}644 \qquad \text{(plan } y\text{–}z)$$

Or, ce sont précisément les valeurs $\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_3}$ ou $\frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_4}$, (voir [5]) car la loi de propagation donne, si les coefficients quadratiques sont seuls, différents de zéro:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_3} = \overline{0{,}817}^2 \times Q_{11} + \overline{0{,}577}^2 \times Q_{33} = 0{,}727 \qquad (\text{pour } Q_{13} = 0)$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_4} = \overline{0{,}817}^2 \times Q_{22} + \overline{0{,}577}^2 \times Q_{33} = 0{,}644 \qquad (\text{pour } Q_{23} = 0)$$

On aboutit au même résultat par deux voies différentes. Bien entendu, ces considérations sont valables quand une extrémité de la barre est fixe; en général le poids de la barre *a posteriori* dépend de six et non de trois variations de coordonnées. L'analogie entre les ellipsoïdes d'erreur relatifs à des mesures linéaires et les ellipsoïdes de déformation est manifeste.

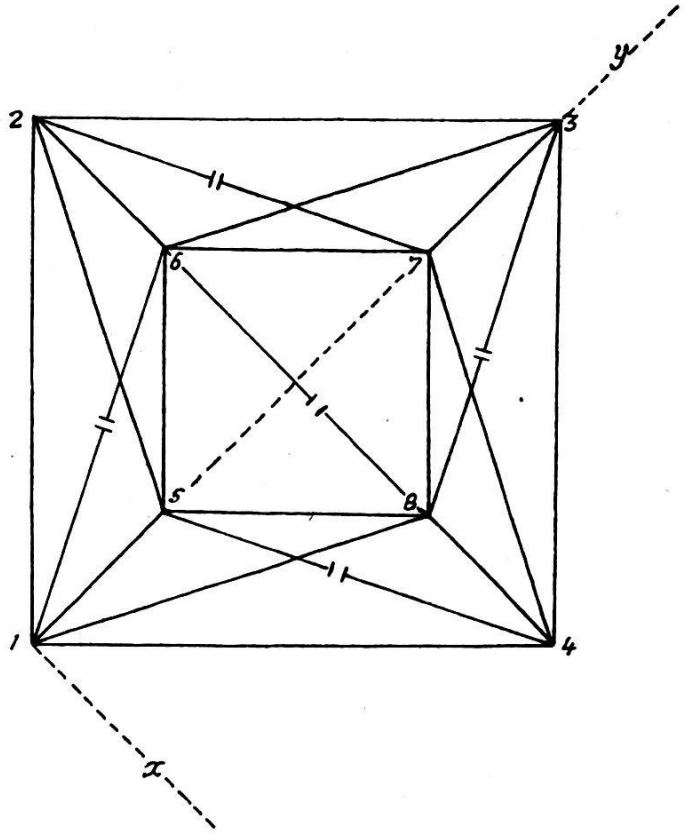
Calcul d'une coupole. Le cas envisagé ici est très simple; le cas des coupoles, sous une forme plus générale, sera traité ultérieurement.

Il y a huit nœuds, donc 24 coordonnées; numériquement on a:

Nœuds	*x*	*y*	*z*	
1	0.00	0.00	0.00	L'unité de mesure
2	—1.414	+1.414	0.00	est arbitraire, par
3	0.00	+2.83	0.00	exemple: le déca-
4	+1.414	+1.414	0.00	mètre. Ces valeurs
5	0.00	+0.707	+1.414	servent à calculer
6	—0.707	+1.414	+1.414	les coefficients
7	0.00	+2.12	+1.414	*a, b, c* . . .
8	+0.707	+1.414	+1.414	

Il y a 24 variations de coordonnées, mais six peuvent d'emblée être considérées comme nulles; le nombre des liaisons simples n'est pas inférieur à trois planimétriquement et à six spatialement. Par exemple on aura:

$$dx_1 = dy_1 = dz_1 = dz_2 = dz_4 = dx_3 = 0$$



Admettons en tout huit liaisons simples; rappelons que la coupole du Reichstag d'après Zimmermann reposait sur huit nœuds astreints à douze liaisons simples. Si le nombre des côtés ou des barres est supérieur à 16 (24–8), on opère des coupures qui sont au nombre de cinq sur la

figure, mais ce choix est ici arbitraire. Remarquons d'autre part que le calcul peut être plus ou moins facilité par un choix judicieux du système de coordonnées. Sur la figure les forces extérieures ne sont pas indiquées. Bornons-nous à écrire les équations pour les barres 8–6, 5–1, 8–1:

$$\left.\begin{aligned}
-f_{8-6} + v_{8-6} &= dx_8 - dx_6 \\
-f_{5-1} + v_{5-1} &= 0{,}448\, dy_5 + 0{,}895\, dz_5 \quad (dx_1 = dy_1 = dz_1 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } 5\text{–}1 = 1{,}58) \\
-f_{8-1} + v_{8-1} &= 0{,}333\, dx_8 + 0{,}667\, dy_8 + 0{,}667\, dz_8 \quad (8\text{–}1 = 2{,}12)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Quand on considère comme connus les poids p_i et la structure du système, on peut calculer les dimensions des ellipsoïdes mais en valeurs relatives, pas absolues tant que les termes absolus f n'interviennent pas; c'est un élément caractéristique de cette solution. Pour le sommet ou nœud 1 l'ellipsoïde se réduit à un point à cause des trois liaisons simples; pour d'autres cette surface se réduit à un segment linéaire ou à une ellipse toujours à cause des liaisons.

Pour la détermination des f, c'est-à-dire pour le calcul du système dit fondamental, la solution par la représentation plane est indiquée; en particulier dans le cas de la coupole Schwedler ([2], p. 71) cette méthode est favorable, les barres surabondantes étant donc coupées. Pour la résolution des équations normales et l'inversion de matrices, l'emploi de calculatrices électroniques est à envisager.

En *résumé* on peut dire que le calcul des déformations en hyperstatique des systèmes articulés est facilité grâce à l'application des notions déjà connues en théorie des erreurs, l'analogie avec une théorie des déformations étant manifeste quand les erreurs portent sur des mesures linéaires.

Littérature

[1] *C. F. Baeschlin,* Ausgleichungsrechnung (Cours ETH).

[2] *B. Mayor,* Statique graphique des systèmes de l'espace (Payot, Lausanne 1926).

[3] *Ringleb-Bürklen,* Mathematische Formelsammlung (Sammlung Göschen).

[4] *F. Stüssi,* Baustatik I, II (Birkhäuser, Basel).

[5] *A. Ansermet,* Théorie de l'équivalence et les ellipsoïdes d'erreur (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1960).

[6] *A. Ansermet,* Calcul des déformations en hyperstatique (Bulletin Technique, 1963, N° 5, Lausanne).