

# Le rôle de la déviation de la verticale en corrélation avec les nivellements trigonométriques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **61 (1963)**

Heft 7

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-218453>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Le rôle de la déviation de la verticale en corrélation avec les nivellements trigonométriques

Par A. Ansermet

Au cours de ces dernières années diverses publications ont paru tendant à développer les méthodes de nivellement trigonométrique; il y avait lieu notamment de chercher à intégrer, dans un même calcul de compensation, les éléments angulaires mesurés et ceux, encore inconnus, caractérisant la déviation de la verticale à chaque station. Ce problème est manifestement assez complexe; pour un réseau altimétrique déterminé, le nombre des inconnues augmente sensiblement.

Parmi les publications auxquelles il est fait allusion il convient de citer celle de la Commission géodésique suisse de 1960 (voir [2]); il faut savoir gré aux auteurs de ces recherches, MM. Kobold et Wunderlin, d'avoir traité ce sujet de façon si magistrale. Ce problème est vaste et fera sans doute l'objet d'autres publications de la part de ces mêmes auteurs.

Le but poursuivi par ces lignes est limité; sur la base d'exemples concrets, choisis parmi les plus simples, le praticien peut se familiariser avec un mode de calcul qui n'est pas encore très courant.

Avant de poursuivre, pour mémoire, rappelons qu'en principe et initialement il est nécessaire de décider si la compensation sera effectuée dans le système des altitudes «orthométriques» ou dans celui des altitudes «ellipsoïdales» ([3], p. 237). L'équation initiale, qui sera appliquée ici, est celle contenue dans la publication déjà mentionnée ([2], p. 9). Une solution provisoire est calculée au préalable; puis émettons certaines hypothèses destinées à simplifier les calculs et à faciliter l'interprétation des résultats. Posons, pour chaque visée:  $D_z: \cos^2 \alpha \cong 636\,620$  cm, car le coefficient  $\rho^{cc} \cdot \cos^2 \alpha: D_z$  revient dans chaque équation.

Pour la compensation proprement dite, la valeur  $D_z$  peut être arrondie; c'est la longueur curviligne du côté à l'altitude du point visé, tandis que  $\alpha$  est l'angle vertical mesuré. D'autre part le coefficient de réfraction n'est pas traité comme une inconnue; la forme générale de l'équation aux erreurs sera:

$$-f + v = -\Delta H_s + \Delta H_z + \cos A_z \cdot \xi + \sin A_z \cdot \eta \quad ([2], \text{p. } 9) \quad (1)$$

$f$  étant le terme absolu,  $A_z$  l'azimut géographique de la visée, tandis que  $\xi$  et  $\eta$  sont les composantes inconnues de la déviation de la verticale. Toujours pour la compensation les valeurs  $\alpha$  et  $A_z$  peuvent être arrondies.

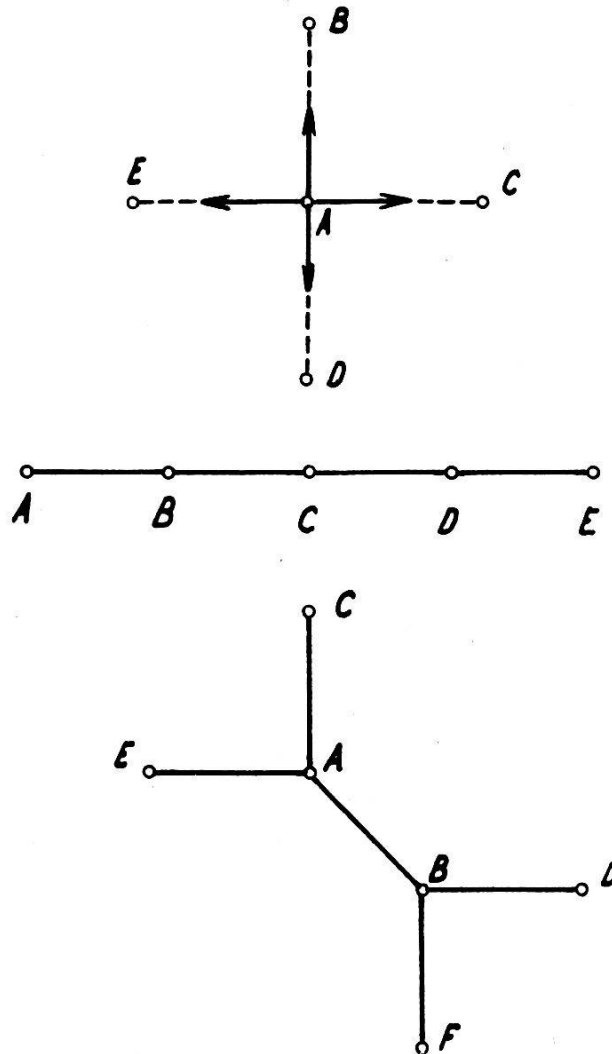
Par suite de l'hypothèse faite, les coefficients de  $\Delta H_s$  et  $\Delta H_z$  sont égaux à 1, mais ce 1 a une dimension donnée par le quotient  $\rho^{cc}: D_z$ ; en d'autres termes, numériquement, ces  $\Delta H$  expriment des secondes centésimales ou des centimètres. Ce sont les corrections à apporter aux

valeurs provisoires  $H_s, H_z$  des altitudes des points de stationnement et des points visés. Il y a donc quatre inconnues par équation en général.

Trois exemples concrets seront traités.

### 1° Relèvement altimétrique simple

Il y a quatre visées effectuées en A et trois inconnues  $\Delta H_s, \xi, \eta$ . Admettons:  $\sin^2 A_z \cong 0$  ou 1; on a immédiatement (voir figure):



visées	coefficients			poids $p_i$	En application des formules connues (voir [1]):
AB	-1	+1	0	1	$[paa] = 4 \quad [pbb] = [pcc] = 2$ $[pab] = [pac] = [pbc] = 0,$ les équations normales sous forme implicite étant: $[pav] = [pbv] = [pcv] = 0$
AC	-1	0	+1	1	
AD	-1	-1	0	1	
AE	-1	0	-1	1	

Les  $v$  sont les corrections à apporter aux angles  $\alpha$ .

Les coefficients de poids sont:

$$Q_{11} = 0,25; Q_{22} = Q_{33} = 0,5; Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0$$

ou sous forme matricielle:

$$m_0^2 \cong [p_{vv}]: 1 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice inverse:} \quad \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$m_0$  est l'erreur moyenne quadratique relative à l'unité de poids.

Les valeurs  $\sqrt{0,25} = 0,5$  et  $\sqrt{0,5} = 0,71$  permettent de calculer les erreurs moyennes des inconnues; c'est  $\Delta H_s$  qui est obtenu avec le plus de précision. Les  $\xi$  et  $\eta$  sont les composantes de la déviation  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  au point de stationnement; les poids  $p_i$  sont amplifiés 1,33 fois, car  $[p_i : P_i]_1^4 = 3$ .

On pourrait éliminer les trois inconnues pour aboutir à une équation de condition dans laquelle les coefficients des  $v$  sont égaux.

## 2° Cheminement altimétrique ABCDE

Il y a deux points de rattachement  $A$  et  $E$  dont tous les éléments intervenant dans le calcul sont connus; théoriquement il y a neuf inconnues, trois par point nouveau ( $B, C, D$ ). Faisons l'hypothèse

$$\sin^2 A_z \cong 1;$$

le calcul devient plus simple; les inconnues  $\xi$  n'interviennent plus. Pour une valeur quelconque, par exemple  $\sin^2 A_z \cong 0,5$ , on ne pourra pas compenser ni calculer car il y a une inconnue de trop; on raisonnera ainsi: le pôle est fictivement déplacé pour réaliser  $\sin^2 A_z \cong 1$ . En général, pour la compensation, on admettra que la surface est sphérique ( $\log R^m \cong 6,8047$ ) sauf si le réseau est étendu. Il suffit de connaître les coefficients à  $1/500^e$  et les termes absolus à  $1/1000^e$  près.

Le tableau des coefficients devient, en groupant les  $\Delta H$  ensemble:

visées	$\Delta H_B$	$\Delta H_C$	$\Delta H_D$	$\eta_B$	$\eta_C$	$\eta_D$	poids $p_i$	poids à posteriori
AB	+1	0	0	0	0	0	1	$P_1$
BA	-1	0	0	-1	0	0	1	$P_2$
BC	-1	+1	0	+1	0	0	1	$P_3$
CB	+1	-1	0	0	-1	0	1	$P_4$
CD	0	-1	+1	0	+1	0	1	$P_5$
DC	0	+1	-1	0	0	-1	1	$P_6$
DE	0	0	-1	0	0	+1	1	$P_7$
ED	0	0	+1	0	0	0	1	$P_8$

$$[p_i : P_i]_1^8 = 6$$

d'où la matrice du système d'équations normales:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A cause de la symétrie on a:

$$P_1 = P_8 \quad P_3 = P_6$$

$$P_2 = P_7 \quad P_4 = P_5$$

$$m_0^2 \cong [p\upsilon\upsilon]: 2$$

La matrice inverse, celle des coefficients de poids devient:

$$\begin{bmatrix} 0,542 & +0,5 & +0,208 & -0,25 & +0,167 & +0,25 \\ +0,5 & 1,00 & +0,5 & -0,5 & 0,00 & +0,5 \\ +0,208 & +0,5 & 0,542 & -0,25 & -0,167 & +0,25 \\ -0,25 & -0,5 & -0,25 & 0,75 & 0,00 & -0,25 \\ +0,167 & 0,00 & -0,167 & 0,00 & 0,667 & 0,00 \\ +0,25 & +0,5 & +0,25 & -0,25 & 0,00 & 0,75 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & & & \\ Q_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ Q_{61} & & & Q_{55} & Q_{56} \\ & & & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix}$$

*Calcul des poids à posteriori et contrôle*

$$1: P_1 = 0,542$$

$$1: P_2 = 0,542 + 0,75 - 2 \times 0,25 = 0,792$$

$$1: P_3 = 0,542 + 1,00 + 0,75 - 2 \times 0,5 + 2 \times 0,25 - 2 \times 0,5 = 0,792$$

$$1: P_4 = 0,542 + 1,00 + 0,667 - 2 \times 0,5 - 2 \times 0,167 + 2 \times 0,00 = 0,874$$

$$[1: P_i]_1^8 = 2 [1: P_i]_1^4 = 2 (0,542 + 0,792 + 0,792 + 0,874) = 6,00$$

(6 inconnues) ([3], p. 68)

$$\sqrt{0,542} = 0,74; \quad \sqrt{1,00} = 1,00; \quad \sqrt{0,75} = 0,87; \quad \sqrt{0,667} = 0,82$$

Ces valeurs permettent de calculer les erreurs moyennes des inconnues.

Pour mémoire rappelons que dans le réseau de l'Oberland bernois ([2], p. 10) il y avait 42 inconnues ( $14 \times 3$ ) et 73 équations aux erreurs; il était nécessaire d'avoir recours aux calculatrices électroniques.

### 3° Détermination altimétrique d'une paire de points

Pour les visées  $AB$  ou  $BA$  on fait l'hypothèse:  $\sin^2 A_z \cong 0,5$   
et pour les autres visées:  $\sin^2 A_z \cong 0$  ou  $1$ .

On obtient immédiatement le tableau des coefficients:

visées	$\Delta H_A$	$\xi_A$	$\eta_A$	$\xi_B$	$\eta_B$	$\Delta H_B$	pois $p_i$	pois à posteriori
AB	-1	-0,707	+0,707	0	0	+1	1	$P_1$
BA	+1	0	0	+0,707	-0,707	-1	1	$P_2$
AC	-1	+1	0	0	0	0	1	$P_3$
CA	+1	0	0	0	0	0	1	$P_4$
AE	-1	0	-1	0	0	0	1	$P_5$
EA	+1	0	0	0	0	0	1	$P_6$
BD	0	0	0	0	+1	-1	1	$P_7$
DB	0	0	0	0	0	+1	1	$P_8$
BF	0	0	0	-1	0	-1	1	$P_9$
FB	0	0	0	0	0	+1	1	$P_{10}$

$[p_i : P_i]_1^{10} = 6$ . On aurait pu grouper les inconnues autrement:  $m_0^2 \cong [p_{vv}] : 4$ .  
On voit que  $P_1 = P_2$   $P_3 = P_5 = P_7 = P_9$   $P_4 = P_6 = P_8 = P_{10}$   
à cause de la symétrie.

Comme précédemment on a deux matrices mutuellement inverses:

$$\begin{bmatrix} 6 & -0,293 & +0,293 & +0,707 & -0,707 & -2 \\ -0,293 & 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & -0,707 \\ +0,293 & -0,5 & 1,5 & 0 & 0 & +0,707 \\ +0,707 & 0 & 0 & 1,5 & -0,5 & +0,293 \\ -0,707 & 0 & 0 & -0,5 & 1,5 & -0,293 \\ -2 & -0,707 & +0,707 & +0,293 & -0,293 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +0,230 & +0,071 & -0,071 & -0,096 & +0,096 & +0,103 \\ +0,071 & 0,794 & +0,206 & -0,039 & +0,039 & +0,096 \\ -0,071 & +0,206 & 0,794 & +0,039 & -0,039 & -0,096 \\ -0,096 & -0,039 & +0,039 & 0,794 & +0,206 & -0,071 \\ +0,096 & +0,039 & -0,039 & +0,206 & 0,794 & +0,071 \\ +0,103 & +0,096 & -0,096 & -0,071 & +0,071 & +0,230 \end{bmatrix}$$

#### Calcul des poids à posteriori et contrôle

$$1 : P_1 = 0,23 + 0,5 \times 0,794 + 0,5 \times 0,794 + 0,23 + 1,41 \times 0,071 + \\ + 1,41 \times 0,071 - 2 \times 0,103 - 1 \times 0,206 - 1,41 \times 0,096 - \\ - 1,41 \times 0,096 = 0,772$$

$$1 : P_3 = 0,23 + 0,794 - 1,41 \times 0,096 = 0,883 \quad 1 : P_4 = 0,230$$

$$[1 : P_i]_1^{10} = 2 \times 0,772 + 4 \times 0,883 + 4 \times 0,230 = 6,00 \text{ (six inconnues)}$$

$$\sqrt{0,230} = 0,48 \quad \sqrt{0,794} = 0,89$$

La détermination des  $\Delta H$  est plus précise que celle des  $\xi$  et  $\eta$  dans notre cas; grâce à l'hypothèse faite, la comparaison est aisée puisque, numériquement, les valeurs obtenues pour les  $\Delta H$  expriment des centimètres ou des secondes centésimales. Une dernière remarque: En tirant des

dix équations aux erreurs quatre groupes de sept équations, et en éliminant les six inconnues dans chaque groupe, on obtient quatre équations de condition (calcul par voie électronique).

### *Littérature*

- [1] *C. F. Baeschlin*, Ausgleichungsrechnung (Cours ETH 1935).
- [2] *F. Kobold* et *N. Wunderlin*, Die Bestimmung von Lotabweichungen und Meereshöhen ... (Commission géodésique suisse, 1960).
- [3] *H. Wolf*, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg 1962).

## **Einiges über die Alp-Wasserversorgung Farneralp–Guntliberg (Gemeinde Goldingen, Kanton St. Gallen)**

*Von A. Scherrer, Kulturingenieur, St. Gallen/Bern*

Die vom Zürcher Landwirtschaftlichen Kantonalverein (ZLKV) dem kantonalen Meliorations- und Vermessungsamt St. Gallen übertragene Aufgabe bestand aus folgenden zwei Teilen:

Für die Farneralp: Versorgung von Haus, Alpstall und verschiedener Weidbrunnen mit genügend und einwandfreiem Wasser.

Für den Guntliberg: Verwendung der sogenannten «Hinteren Quelle» für die Versorgung der Hirtenhütte und von zwei Weidbrunnen.

Nach verschiedenen, zeitraubenden Studien kam schlußendlich folgende Lösung zustande.

### *A. Teil Farneralp*

#### *1. Wasserbeschaffung*

Die der Zürcher Heilstätte Wald gehörende Wasserversorgung in der Rüti vermochte den Anforderungen des Sanatoriumsbetriebes schon seit langem nicht mehr zu genügen, weder in quantitativer noch in qualitativer Hinsicht. Deshalb wurde dieses Wasser nur noch zur Speisung der Feuerlöschreserve und für Reinigungszwecke benützt. Der ZLKV konnte sich vertraglich das Recht sichern, bei der Sammelbrunnenstube des Sanatoriums laufend 4 l/min Wasser zu beziehen – eine relativ kleine Menge, aber für die Alp doch sehr wertvoll. Voraussetzung war freilich dessen vorherige Reinigung, wenigstens der als Trinkwasser zur Verwendung gelangenden Menge.