

# Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerefeldes in der Erdkruste

Autor(en): **Müller, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **62 (1964)**

Heft 2

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-219196>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 2 · LXII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Februar 1964

## Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerefeldes in der Erdkruste

*Von Pierre Müller, dipl. Physiker, Zürich*

### Zusammenfassung

Am Beispiel eines 35 Meßpunkte umfassenden Stationsnetzes wird eine neue Methode der gravimetrischen Gesteinsdichtebestimmung erprobt. Die Darstellung des gleichzeitig bestimmten Freiluftfeldes geschieht durch harmonische Polynome Cartesischer Raumkoordinaten. Eine Betrachtung der reduzierten Schwerewerte in einer Ebene wird dadurch ermöglicht und erlaubt die einwandfreie Kartierung von Schwereanomalien. Beispiele und Fehlerrechnungen behandeln die theoretische und praktische Anwendbarkeit der Methode. Mit Hilfe eines elektronischen Rechenautomaten werden die umfangreichen numerischen Rechnungen, insbesondere die Bestimmung der Terrainkorrekturen auf Grund eines speziell ausgearbeiteten Programms, durchgeführt. Es wird eine bemerkenswerte Genauigkeit erreicht. Die übliche Behandlung der Plattenkorrektur erfährt ebenfalls Modifikationen. Sie wird auf Grund der Anziehung einer im allgemeinen exzentrisch zum Meßpunkt gelegenen sphärischen quadratischen Schale berechnet.

### Résumé

Une nouvelle méthode gravimétrique pour la détermination de la densité des roches a été étudiée à l'exemple d'un réseau de stations contenant 35 points. Le champ de pesanteur en air libre, déterminé simultanément, est représenté par des polynômes harmoniques en coordonnées cartésiennes. Cela permet l'étude du champ dans un plan ainsi que la représentation correcte des anomalies de pesanteur. Des exemples et les calculs des erreurs démontrent l'applicabilité pratique de la méthode. Tous les calculs sont fait à l'aide d'un ordinateur. Les corrections topo-

graphiques traitées par un programme spécial atteignent une précision remarquable. Le traitement usuel de la correction de Bouguer est modifié. Son calcul est basé sur l'attraction d'une section quadratique d'un globe creux, normalement située excentriquement vers le point de référence.

### 1. Überblick über bisherige Arbeiten

Die Idee der gravimetrischen Bestimmung der Dichten anstehender Gesteinsmassen aus Oberflächenmessungen stammt von L.L. Nettleton [14]. In seinen Untersuchungen beschränkt sich Nettleton auf Stationsprofile und eine graphische Ermittlung der Dichte. Die gemessenen Schwerewerte der Profilstationen werden mit verschiedenen Dichten nach Bouguer reduziert und als Funktion der Profillänge graphisch aufgetragen. Der beste Dichtewert ergibt sich aus derjenigen Punktefolge, die am ehesten durch eine Gerade beschrieben werden kann.

Später wurde seine Methode von anderen Autoren in verschiedener Hinsicht ausgebaut. Insbesondere K. Jung [10], [11], [12] befaßte sich damit, die gravimetrische Gesteinsdichtebestimmung nach Nettleton in eine rechnerische Form zu bringen. Er bediente sich dabei der Ausgleichs- und der Korrelationsrechnung. Ferner lag es nahe, das Nettleton-Verfahren auch bei Stationsnetzen anzuwenden, wobei anstelle der Ausgleichsgeraden die Ebene als Ausgleichsfläche tritt. Dieses ursprüngliche Nettleton-Verfahren setzt offensichtlich zwei Hypothesen voraus:

1. Annahme einer homogenen Gesteinsdichte für die sichtbaren Massen.
2. Die reduzierten Schwerewerte können durch lineare Ortsfunktionen dargestellt werden.

Die zweite Hypothese trifft für entferntere Störungsmassen des Untergrundes wohl zu. Befinden sich aber Dichteunregelmäßigkeiten direkt unter dem homogen angenommenen Gesteinskomplex, dessen Dichte zu bestimmen ist, so müssen in der Ortsfunktion höhere Glieder für die Lagekoordinaten angesetzt werden. Diesen Umstand berücksichtigt erstmals A. Yaramanci [16], durch Ansetzen einer Reihenentwicklung, doch beschränkt er sich in den praktischen Beispielen auf die Glieder erster Ordnung. Ähnliche Ansätze sieht man bei R. Bortfeld [3] und K. Jung [12], der zusätzlich ein Kriterium für die Durchführbarkeit der Dichtebestimmung angibt.

Die bisher üblichen Methoden der gravimetrischen Dichtebestimmung beruhen auf der Annahme eines normalen, vertikalen Schweregradienten für die Freiluftreduktion. Letzterer wird auch Freiluftgradient genannt. Er beträgt für eine sphärische Massenverteilung der Erdkugel mit einer mittleren Dichte  $\bar{\rho} = 5,51 \text{ gr/cm}^3$

$$c_n = \frac{8 \pi}{3} k_0 \bar{\rho} = 0,308 \text{ mgl/m} .$$

$k_0$  ist die Gravitationskonstante ( $k_0 = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ gr}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ )

Benützt man das internationale Erdellipsoid als Erdmodell, so ergibt sich zum Beispiel für die Breite in Zürich unter Berücksichtigung der Atmosphäre [5] ein Normalgradient von

$$c_n = 0,30845 \text{ mgl/m.}$$

Experimentell gemessene Freiluftgradienten ergeben Abweichungen von mehreren Prozenten vom Normalwert. (Siehe hierzu H. Rische [15], S. 49.)

A. Yaramanci [16] führt in seiner Theorie der konstanten Gradienten auch einen konstanten vertikalen Störgradienten für das ganze Meßgebiet ein, der mit der Dichte mitbestimmt werden soll. Allein, dies ist in den allermeisten Fällen nicht zweckmäßig. Bekanntlich werden nennenswerte Störgradienten hauptsächlich durch die nächstgelegenen Dichteinhomogenitäten verursacht, was im Widerspruch zur vorherigen Hypothese steht.

Eine theoretisch einwandfreie gravimetrische Dichtebestimmung ist daher nur möglich bei Mitbestimmung des sogenannten Freilufftfeldes. Darunter verstehen wir das Schwerefeld, das entstehen würde bei Wegnahme der sichtbaren Massen. Das Problem der gravimetrischen Dichtebestimmung ist daher eng verknüpft mit dem Problem der Schwere-reduktion. Diese Erkenntnis führte zu einer Methode, die zum erstenmal am Beispiel St. Anton praktisch erprobt wurde. Die Resultate der betreffenden Untersuchung sind von F. Gassmann und P. Müller [7] publiziert worden. Hauptgegenstand der Untersuchung war dort die Bestimmung der Lotkrümmungen der Lotlinie in St. Anton. Der Anteil der Störmassen, der sogenannten unsichtbaren Massen, an die Lotkrümmung ergibt sich aus der Kenntnis des Freilufftfeldes. Dieses wird im Raume des Meßgebietes bis hinunter zum Meeresniveau durch eine Entwicklung in harmonische Polynome rechtwinkliger Raumkoordinaten approximiert.

Während in der erwähnten Publikation die numerischen Resultate der ermittelten Lotlinie im Vordergrund standen und die Methode der Dichtebestimmung nur kurz behandelt wurde, ist es die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die Probleme der Dichtebestimmung, der Schwere-reduktion und ihrer Interpretation eingehender zu untersuchen. Insbesondere sind die Bedingungen für eine erfolgreiche Anwendung zu studieren. Die durch Fehlerbetrachtungen sich aufdrängende Genauigkeitssteigerung führt zu verfeinerten Reduktionsmethoden. Letztere sollen dargelegt und die technische Durchbildung der numerischen Anwendungen mittels elektronischer Rechenautomaten ausführlich beschrieben werden.

Da in dieser Arbeit an einem neuen Beispiel im wesentlichen dieselbe Methode illustriert wird, sind gewisse Wiederholungen zur ersten Publikation unvermeidlich. In der Absicht, nichts Unnötiges zu wiederholen, sei es gestattet, an entsprechenden Stellen auf diese erste Publikation von F. Gassmann und P. Müller [7] – abgekürzt einfach mit [7] – zu verweisen.

## 2. Grundsätzliches zur neuen Methode

### 2.1. Grundbegriffe

Das Potential  $\Phi(P)$  des Schwerfeldes der Erde in einem Raumpunkt  $P$  setzt sich aus drei Teilen zusammen: dem Gravitationspotential  $\Psi(P)$  der Erdmassen, dem Potential der Zentrifugalbeschleunigung  $\Omega(P)$  und dem Gravitationspotential  $\chi(P)$  der extraterrestrischen Massen, insbesondere der Sonnen- und Mondmasse.

$$\Phi(P) = \Psi(P) + \Omega(P) + \chi(P)$$

Ist  $\rho_E$  die Dichte der Erdmasse im Punkte  $Q$ ,  $dQ$  das Volumenelement an der Stelle  $Q$ ,  $r$  der Abstand  $\overline{PQ}$ ,  $q_E$  der senkrechte Abstand des Punktes  $P$  von der Rotationsachse der Erde und  $\omega_E = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, so gilt:

$$\Psi(P) = k_0 \int \frac{\rho_E(Q)}{r} dQ \quad \text{und} \quad \Omega(P) = \frac{1}{2} \omega_E^2 q_E^2$$

Die Integration erstreckt sich über alle Massen, aus denen die Erde besteht. Bedeuten weiter  $M_s$  und  $M_m$  die Sonnen- beziehungsweise die Mondmasse,  $r_s$  und  $r_m$  die Abstände Sonne-Erde beziehungsweise Mond-Erde, so folgt für  $\chi(P)$ :

$$\chi(P) \cong k_0 \left( \frac{M_s}{r_s} + \frac{M_m}{r_m} \right)$$

Den Vektor der Schwerebeschleunigung erhält man durch Gradientenbildung.

$$\vec{g}(P) = \text{grad } \Phi = \text{grad } \Psi + \omega_E^2 q_E \vec{e}_q - k_0 \left( \frac{M_s}{r_s^2} \vec{e}_s + \frac{M_m}{r_m^2} \vec{e}_m \right)$$

$\vec{e}_q$ ,  $\vec{e}_s$  und  $\vec{e}_m$  bezeichnen Einheitsvektoren, und zwar  $\vec{e}_q$  in Richtung des senkrechten Abstandes  $q$  von der Rotationsachse der Erde zum Aufpunkt  $P$ ,  $\vec{e}_s$  und  $\vec{e}_m$  in Richtung Sonne-Erde beziehungsweise Mond-Erde.

Die folgenden Angaben über Größenordnung der einzelnen Anteile beziehen sich auf die Projektionen der Vektorsummanden auf die Richtung der Resultierenden  $\vec{g}$ . In mittleren Breiten macht der Anteil der Erdrotation etwa  $\frac{2}{1000}$  der Gesamtbeschleunigung aus. Die zeitlich variablen, aber sehr geringen Einflüsse der Gestirne Sonne und Mond auf die Schwere übersteigen selten ein Zehntelmilligal ( $1 \text{ cm sec}^{-2} = 1 \text{ gal} = = 1000 \text{ mgl}$ ). Dabei sind neben dem Gravitationsanteil auch die sekundären Wirkungen auf die Massenverteilung der Erde miteingeschlossen. Spezielle Tafeln dienen zur Korrektur dieser sogenannten täglichen Variationen. Mißt man nur Schweredifferenzen, und das in örtlich eng begrenzten Räumen innerhalb kürzerer Zeitabschnitte, so können die letztgenannten Einflüsse durch lineare Interpolation leicht eliminiert werden.

Das Schwerepotential  $\Phi$  ist auch im massenfreien Raum keine harmonische Ortsfunktion. Wegen

$$\Delta\Psi = \Delta\chi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\Omega = \omega_E^2$$

folgt

$$\Delta\Phi = \omega_E^2.$$

Dagegen sind die Feldkomponenten des Schwerefeldes  $\vec{g}$  harmonische Funktionen des Ortes

$$\Delta\Phi_x = \Delta\Phi_y = \Delta\Phi_z = 0.$$

## 2.2. Hypothesen für die grundsätzliche Anwendbarkeit der Methode

Wie schon in früheren Arbeiten wollen wir eine Einteilung der Massen in «sichtbare» und «unsichtbare» vornehmen. Denn gerade auf einer solchen, mehr oder weniger willkürlichen Aufteilung der Massen beruht letztlich die gravimetrische Dichtebestimmung. Die sichtbare Masse umfaßt den Meßbereich sowie dessen weitere Umgebung und ist nach unten durch ein frei wählbares Reduktionsniveau begrenzt (Fig. 1). Zu den unsichtbaren Massen zählen alle übrigen Erdmassen. Die sichtbare Masse besitze die einheitliche unbekannte Dichte  $\rho$ . Es empfiehlt sich daher schon aus geologischen Gründen, die Ausdehnung derselben nicht zu groß zu wählen. Allenfalls ist eine weitere Einteilung der sichtbaren Masse in stückweise homogene Dichteprovinzen möglich, wobei entsprechend mehrere Dichtewerte, die zum Teil auch bekannt sein können, einzuführen sind.

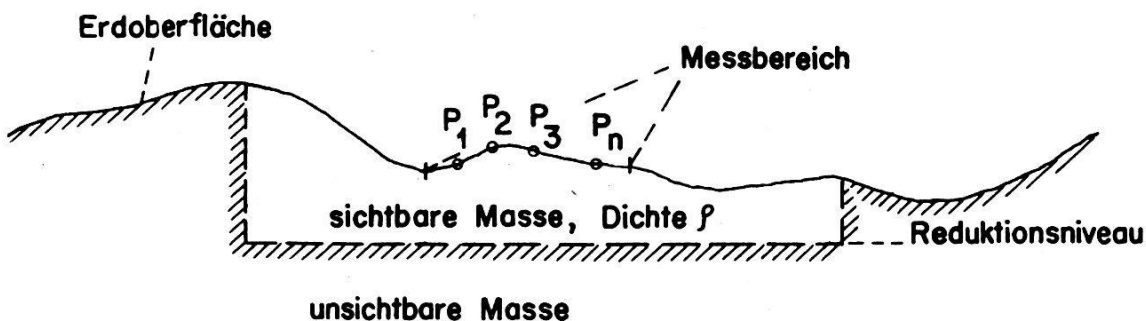


Fig. 1: Gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des reduzierten Schwerefeldes (Freiluftfeld)

Durch die «Wegnahme» der sichtbaren Masse wird das gemessene Schwerefeld  $\vec{g}$  um das Feld  $\vec{s}$  vermindert.

$$\vec{w} = \vec{g} - \vec{s} \quad (1)$$

Das verbleibende Feld  $\vec{w}$  ist damit innerhalb des Meßbereichs weitgehend von den Terraineinflüssen befreit. Es stellt im erwähnten Bereich das im Bouguerschen Sinne reduzierte Schwerefeld dar. Wir nennen  $\vec{w}$  in Übereinstimmung mit der Bezeichnung in der früheren Arbeit [7] das Frei-

luftfeld, welches zusammen mit der unbekanntem Dichte  $\rho$  der sichtbaren Masse aus den Schwermessungen in den Punkten  $P_1, P_2 \dots P_n$  ermittelt werden soll.

Das Feld  $\vec{s}$  ist wegen der unbekanntem Dichte nur bis auf einen freien Faktor bestimmt. Somit sind auch die Randwerte von  $\vec{w}$  in den Meßpunkten an der Erdoberfläche nicht bekannt. Es muß eine zusätzliche Hypothese gemacht werden. Diese besteht in der Annahme eines glatten Verlaufes des Freiluftfeldes im Meßbereich. Es wird also die Dichte so bestimmt, daß das Freiluftfeld durch Funktionen möglichst niedrigen Grades erzeugt werden kann. In der Durchführung beschränkt man sich allerdings auf die wichtigste Vertikalkomponente.

Eine andere Forderung wäre die, daß in den Stationspunkten zwischen den beiden Feldern  $\vec{w}$  und  $\vec{s}$  keine Korrelation bestehen solle. Der Nachteil dieser Methode ist aber bereits in [6] dargelegt worden.

Die oben formulierte Hypothese widerspiegelt die Grundidee Nettletons, doch diesmal in allgemeiner Form. Folgender böswilliger Extremfall muß noch ausgeschlossen werden. Existiert die Beziehung  $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{s}$ , so ist, wie leicht einzusehen, keine Dichtebestimmung möglich. Das Freiluftfeld enthält als wesentlichsten Faktor den vertikalen Freiluftgradienten. In diesem Fall würden nämlich die beiden wichtigsten Unbekannten, Dichte und Vertikalgradient, gekoppelt auftreten.

### 2.3. Lösung der Aufgabe durch Ausgleichung bei überbestimmten Systemen

Mit dem Gravimeter wird der Absolutbetrag der Schwerebeschleunigung in einem bestimmten Punkt gemessen, also  $g = |\vec{g}|$ . Sofern die Ausdehnung des Meßgebietes einige wenige Kilometer nicht übersteigt und ferner die auf Grund der Normalschwere definierten Lotabweichungen nur wenige Winkelsekunden betragen, begeht man einen vernachlässigbar kleinen Fehler, wenn man die  $g$ -Werte ihren Projektionen auf eine einheitliche Vertikale gleichsetzt. Wir führen das in der Geophysik übliche rechtwinklige Koordinatensystem ein mit den beiden horizontalen Achsen  $x$  und  $y$  in Richtung Nord beziehungsweise Richtung Osten und der  $z$ -Achse vertikal nach unten. Der Nullpunkt des Systems kann vorteilhaft in einen zentralen Stationspunkt gelegt werden. Die  $z$ -Komponente von  $\vec{w}$  und  $\vec{s}$  sollen der Einfachheit halber mit  $w$  beziehungsweise mit  $s$  bezeichnet werden. Gleichung (1) geht dann über in

$$w = g - s. \quad (2)$$

Unter den sichtbaren Massen können solche bekannter Dichte sein. Es sind dies hauptsächlich Seen. Ihr Anteil an  $s$  sei mit  $s_b$  bezeichnet. Es gilt nun

$$s = K \cdot \rho + s_b. \quad (3)$$

$K$  bedeutet demnach die Vertikalkomponente der Anziehung durch die übrigen sichtbaren Massen der Dichte 1. Es ist eine Größe, die bloß noch

von der Geometrie der sichtbaren Massen abhängt und daher bei deren Kenntnis bestimmt werden kann. In der Regel erhält man  $K$  durch Zerlegung in die sogenannte Terrain- und Plattenkorrektur. Wir werden im nächsten Kapitel darauf zurückkommen.

Dank der Befreiung von Einflüssen des nähern Terrains kann  $w$  im Bereich des Meßgeländes durch eine «glatte» Funktion angenähert werden. Als einfachste Approximationsfunktionen eignen sich Polynome niedrigen Grades. Bei der Entwicklung der Feldfunktionen kann man sich auf harmonische Polynome rechtwinkliger Raumkoordinaten beschränken, was bei gleichem Grad  $k > 1$  eine Ersparnis an unbekanntem Koeffizienten ergibt.

Ein allgemeines homogenes, harmonisches Polynom  $\Pi_k$  der drei Variablen  $x, y, z$  vom Grade  $k$  hat  $2k + 1$  willkürliche Koeffizienten. Es gibt einfache Verfahren zum Aufstellen solcher Polynome. Man erhält so zum Beispiel:

$$\Pi_0 = A$$

$$\Pi_1 = B_0x + B_1z + B_2y$$

$$\Pi_2 = C_0(x^2 - y^2) + C_1xz + C_2(z^2 - y^2) + C_3xy + C_4yz$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = D_0(x^3 - 3xy^2) + D_1(x^2z - y^2z) + D_2(xz^2 - xy^2) \\ + D_3(z^3 - 3y^2z) + D_4(x^2y - \frac{1}{3}y^3) + D_5xyz + D_6(yz^2 - \frac{1}{3}y^3) \end{aligned}$$

$A$  und die  $B_j, C_j$  und  $D_j, j = 0, 1, 2, \dots, 2k + 1$  sind die willkürlichen Koeffizienten.

Das Freiluftfeld  $w$  werde nun mit genügender Genauigkeit durch eine endliche Summe derartiger Polynome dargestellt.

$$w = \sum_{k=1}^d \Pi_k \tag{4}$$

Mit (3) und (4) erhält man durch Einsetzen in Gleichung (2)

$$\sum_{k=1}^d \Pi_k = g - K\rho - s_b,$$

oder, nach den Unbekannten geordnet,

$$K\rho + \sum_{k=1}^d \Pi_k = g - s_b. \tag{5}$$

Nach dem Grad  $d$  des angesetzten harmonischen Polynoms richtet sich die Anzahl  $m$  der Unbekannten:

$$m = 1 + \sum_{k=0}^d (2k + 1) = (d + 1)^2 + 1$$

$d$	1	2	3	4	5
$m$	5	10	17	26	37



Zur sicheren Bestimmung der  $m$  Unbekannten müssen mehr als  $m$  Messungen gemacht werden. Die aus den überschüssigen Messungen sich ergebende Streuung liefert gleichzeitig eine innere Kontrolle der Methode.

Die Anzahl der Meßstationen sei  $n$ . Im Sinne der vermittelnden Ausgleichung wird man auf folgende Fehlergleichungen geführt:

$$K_i \rho + \sum_{k=1}^d \Pi_k(x_i, y_i, z_i) - g_i + s_{bi} = v_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Die  $K_i$ ,  $g_i$  und  $s_{bi}$  sind als Meßgrößen zu werten. Die Koordinaten  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  sind in der Regel für unsere Zwecke entweder genügend genau bekannt oder gemessen, so daß sie als fehlerlos betrachtet werden können. Die Unbekannten, nämlich die Dichte  $\rho$  und die willkürlichen Koeffizienten des Polynoms, treten ausnahmslos linear auf. Die Theorie der vermittelnden Ausgleichung fordert die Fehlerlosigkeit der Koeffizienten der Unbekannten in den Fehlergleichungen. Wir führen daher eine Näherungsdichte  $\rho_0$  ein.

$$\sigma = \rho - \rho_0$$

$$K_i \sigma + \sum_{k=1}^d \Pi_k(x_i, y_i, z_i) - L_i = v_i \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (6)$$

mit 
$$L_i = -K_i \rho_0 + g_i - s_{bi}. \quad (7)$$

Die sogenannten Residuen  $v_i$  stellen Verbesserungen der absoluten Glieder  $L_i$  dar, welche in unserem Fall aus verschiedenen Meßgrößen zusammengesetzt sind. Die Unbekannten ergeben sich in bekannter Weise aus dem Normalgleichungssystem, auf welches man durch die Gaußsche Forderung

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \text{Minimum}$$

geführt wird.

Alle Fehlergleichungen sind mit dem gleichen Gewicht versehen. Für den mittleren quadratischen Fehler  $m_L$  der  $L_i$ , der in unserem Fall theoretisch mit dem sogenannten mittleren Fehler der Gewichtseinheit  $m_e$  übereinstimmt, erhält man:

$$m_L^2 = m_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n - m} \quad (8)$$

#### 2.4. Geophysikalische Bedeutung der Unbekannten und der Residuen

Für die folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf das Beispiel eines harmonischen Polynoms zweiten Grades zur Darstellung von  $w$ .

$$w = A + B_0 x + B_1 z + B_2 y + C_0 (x^2 - y^2) + C_1 xz + C_2 (z^2 - y^2) + C_3 xy + C_4 yz$$

Der Vertikalgradient des reduzierten Schwerefeldes ist dann gegeben durch

$$\frac{\partial w}{\partial z} = B_1 + C_1 x + 2 C_2 z + C_4 y \quad (9)$$

Betrachtet man eine horizontale Ebene im Abstand  $z_0$  vom Nullpunkt des Koordinatensystems, so gilt:

$$w(z = z_0) = [(A + B_1 z_0 + C_2 z_0^2) + (B_0 + C_1 z_0) x + (B_2 + C_4 z_0) y] + [C_0 x^2 + C_3 xy - (C_0 + C_2) y^2] \quad (10)$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z = z_0) = (B_1 + 2 C_2 z_0) + C_1 x + C_4 y$$

Die Entwicklung des Freilufffeldes nach harmonischen Polynomen gestattet eine einwandfreie Reduktion der gemessenen Schwerewerte. Ferner liefert sie eine Information über den Aufbau des Schwerefeldes aus regionalen und lokalen Anteilen. In Gleichung (10) kann der erste Klammerausdruck als eine ausgeglichene regionale Schwere, der zweite als eine auf das Meßgebiet beschränkte, lokale Anomalie interpretiert werden. Die Koeffizienten von  $x$  und  $y$  stellen dann die regionalen Schweregradienten in Nord- beziehungsweise Ostrichtung dar.

Die Entwicklung in harmonische Polynome vermittelt eine analytische Fortsetzung der nach Bouguer reduzierten Schwerewerte nach außen und in den Raum, der von der sichtbaren Masse (Bouguer-Masse) eingenommen wird. Betrachtet man das Freilufffeld in einer Ebene mit  $z = \text{konstant}$  entsprechend Gleichung (10), so sind die Schwerewerte gänzlich frei von einem Terraineffekt der sichtbaren Massen. Befinden sich nämlich Störungsmassen im Bereich der Meßpunkte direkt unterhalb des Reduktionsniveaus, so wäre ein Zusammenhang zwischen Schwere störung und Geländehöhe sehr wohl denkbar. Dieser Vorteil gegenüber früheren Methoden erscheint uns für die Belange der geophysikalischen Prospektion besonders wichtig. Der Terraineinfluß der restlichen Massen (unsichtbaren Massen), welcher aber bei vorsichtiger Abgrenzung der sichtbaren Massen im Bereich des Meßgebietes eine untergeordnete Rolle spielt, wird mit dem Freilufffeld erfaßt.

Unser Polynom gibt als abgebrochene Reihenentwicklung die wahren Verhältnisse nur in nächster Umgebung der Meßstationen richtig wieder. Die durch das Polynom gegebenen Werte außerhalb des Meßgebietes müssen natürlich mit dem dortigen wirklichen Freilufffeld nicht übereinstimmen.

Der Vertikalgradient ist durch ein um ein Grad niedrigeres Polynom dargestellt, was selbstverständlich eine Folge des Abbrechens der Reihenentwicklung ist. Bekanntlich besteht nun eine theoretisch begründete Steigerung des Auflösungsvermögens in der Darstellung zweier benach-

barten Anomalien mittels höherer Ableitungen (zum Beispiel erste beziehungsweise zweite Ableitung der Schwere). Bei oberflächlicher Betrachtung scheint da ein Widerspruch vorzuliegen. Die Tatsache der Wiedergabe unseres Vertikalgradienten durch eine Funktion niedrigeren Grades muß dahin gedeutet werden, daß das vorliegende Ausgangsmaterial voll ausgeschöpft ist. Man müßte höhere Glieder in der Entwicklung berücksichtigen. Diese sind aber gemäß unserer Hypothese sehr klein und damit schlecht bestimmt. Die Grenze wird durch die erreichbare Meßgenauigkeit und besonders durch die Erfüllung der Homogenitätshypothese für die sichtbare Masse gesetzt.

In den bisherigen praktischen Anwendungen der Methode, St. Anton und Falätsche, übertraf die Streuung der Residuen  $v_i$ , das heißt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit  $m_e$ , den zu erwartenden Fehler der verallgemeinerten Meßgrößen  $L_i$ . Mit anderen Worten muß mindestens eine unserer beiden Arbeitshypothesen nicht erfüllt sein. Die Abweichungen  $v_i$  sind dann durch folgende zusätzliche Ursachen erklärbar. Neben der vielleicht ungenügenden Annäherung des Freiluftfeldes durch eine abgebrochene Potenzreihe spielen auch lokale Inhomogenitäten der sichtbaren Masse eine Rolle. Trifft nur das zweite zu, so kommt auch den Residuen physikalische Bedeutung zu. Wirkt nämlich zum Beispiel eine Dichtestörung bloß auf die Schwere einer einzigen, nahe gelegenen Station meßbar ein, so wird ihr Einfluß nicht durch das Polynom erfaßt, sondern sie muß sich im Residuum der betreffenden Station äußern.

### **3. Verwendung von Rechenautomaten für die numerischen Rechnungen**

Die Gravimetrie erheischt im Verhältnis zu anderen geophysikalischen Methoden, wie Seismik und Elektrik, geringere Feldarbeit, aber dafür vermehrten Rechenaufwand bei der Auswertung. Die gesteigerte Meßgenauigkeit der modernen Gravimeter wird vielfach gar nicht ausgenützt. Mit der Anpassung der Präzision der Reduktionen, nämlich Terrain- und Plattenkorrektur, an die Meßgenauigkeit der Gravimeter ist man in der Lage, bedeutend feinere Anomalien des Untergrundes zu analysieren. Der damit verbundene Mehraufwand ist durchaus tragbar, wenn bessere und zuverlässigere Resultate erzielt werden können. Außerdem reduziert sich der Rechenumfang bei Verwendung von schnellen elektronischen Rechenautomaten auf ein vertretbares zeitliches Maß.

In unserem Beispiel wurde ausschließlich die elektronische Rechenmaschine der ETH (ERMETH) verwendet. Durch die Ausarbeitung mehrerer Programme kamen alle numerischen Rechnungen mit ihr zur Durchführung. Den weitaus größten zeitlichen Aufwand erforderte die Bestimmung der Anziehungen  $K_i$  der sichtbaren Massen, welche in Terrain- und Plattenkorrekturen aufgeteilt wurden. Ein separates Programm ermittelte aus den Meßgrößen die Koeffizientenmatrix und die absoluten Glieder der Fehlergleichungen. Der Grad des harmonischen Polynoms

und damit die Anzahl der Unbekannten sind bei diesem Programm frei wählbar. Ein Bibliothekprogramm des Institutes für angewandte Mathematik der ETH gestattete sodann die Bestimmung der Unbekannten sowie aller übrigen Größen, die für die vollständige Lösung der Ausgleichungsaufgabe wichtig sind. Ein weiteres Programm endlich, bei dem die Stationskoordinaten und die Koeffizienten des harmonischen Polynoms als Daten eingegeben wurden, erlaubte die zahlenmäßige Darstellung des Freiluftfeldes in den Stationspunkten und insbesondere in ihren Projektionen auf eine frei wählbare horizontale Ebene.

### *3.1. Terrainkorrekturen für Schwere und Lotanziehungen*

Als Terrainkorrektur in einem Stationspunkt  $P$  definiert man die Wirkung auf die Schwere beziehungsweise auf die Lotrichtung in  $P$  durch eine Ausebnung des Geländes auf das Stationsniveau. Meistens wird dabei eine einheitliche Dichte für die Gesteinsmassen angenommen. Nach den bisherigen Verfahren hat man das Gelände in einem Umkreis um jede Station mit vorgegebenem Radius berücksichtigt und dasselbe in Kreisringsektoren eingeteilt. Für jeden Sektor schätzte man eine mittlere Geländehöhe. Wie schon in [7] erwähnt, hat diese Methode zwei große Nachteile. Die bei der Terrainkorrektur berücksichtigten Geländestücke stimmen für die verschiedenen Stationen nicht überein. Da die sichtbare Masse bei uns einheitlich definiert sein muß, fällt die konventionelle Kreisringmethode schon aus diesem Grunde außer Betracht. Der zweite Nachteil besteht darin, daß gleiches Gelände für jede Station gesondert ausgezählt werden muß. Durch eine Verfeinerung der Einteilung würde sich diese Mehrarbeit vervielfachen. Andererseits hatte man die Notwendigkeit der Bestimmung viel genauerer Terrainkorrekturen schon früh erkannt. Bei der Prüfung neuer Möglichkeiten ließ man sich durch die Forderungen leiten: Wie kann man auf bedeutend speditivere Weise genauere und zuverlässigere Terrainkorrekturen erhalten?

Als Endresultate dieser Bestrebungen liegen nun zwei Programme für Terrainkorrekturen vor. Das eine ist für die Ermittlung der Vertikal-komponente der Anziehung sichtbarer Massen, das andere für die Ermittlung der Horizontalkomponenten bestimmt. Während nämlich ersteres noch in Bearbeitung war, entstand im Zusammenhang mit den Lotlinienbestimmungen in St. Anton [7] das Bedürfnis, ein entsprechendes Programm zur Bestimmung der Lotanziehungen zu besitzen.

#### *3.1.1. Begrenzung und Einteilung der sichtbaren Masse*

Durch die Forderung einer einheitlichen Begrenzung der sichtbaren Masse für alle Stationen drängt sich ein rechteckiger beziehungsweise quadratischer Umriß geradezu auf. Wird ein so begrenzter Geländeabschnitt aus homogenem Material der Dichte  $1 \text{ gr/cm}^3$  ausgeebnet, so stellt die Terrainkorrektur eine rein geometrische Größe dar. Sie kann durch ein bestimmtes Integral beschrieben werden, das nur von der Gestalt der Erdoberfläche und der Stationslage abhängt. Legt man entspre-

chend wie in 2.2 den Nullpunkt eines rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystems in den Stationspunkt, so gilt für die Anziehung  $\vec{T}$  ( $T_x, T_y, T_z$ ) der wegzunehmenden und hinzuzufügenden topographischen Massen mit den Dichten  $+1$  beziehungsweise  $-1$ :

$$T_x = -k_0 \iiint \operatorname{sgn}(z) \frac{x dV}{r^3}, \quad T_y = -k_0 \iiint \operatorname{sgn}(z) \frac{y dV}{r^3},$$

$$T_z = -k_0 \iiint \operatorname{sgn}(z) \frac{z dV}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = dx dy dz$$

Die Integration ist über alle topographischen Massen zu erstrecken. Bei der Schwere interessiert man sich für den Zustand nach der Ausebnung, so daß im Sinne einer Korrektur das Vorzeichen gekehrt werden muß. Wir definieren nun als Terraineffekte (Anziehungen)  $t_x$  und  $t_y$  beziehungsweise als Terrainkorrektur  $t_z$ :

$$t_x = \rho T_x, \quad t_y = \rho T_y, \quad t_z = -\rho T_z$$

Die Terrainkorrektur der Schwere  $t_z$ , im folgenden einfach mit  $t = \rho \cdot T$  bezeichnet, ist wegen  $z \cdot \operatorname{sgn}(z) = |z|$  stets eine positive Größe. Bei der Bestimmung von  $T$  muß für Distanzen  $q = \sqrt{x^2 + y^2}$  über 6 km näherungsweise der Einfluß der Erdkrümmung berücksichtigt werden.

Bezeichnet  $\bar{g}$  eine mittlere Erdbeschleunigung im Meßgebiet, so erhält man wegen  $t_x \ll \bar{g}$  und  $t_y \ll \bar{g}$  die als «Lotanziehungskomponenten» bezeichneten Winkel  $\xi$  und  $\eta$  im Bogenmaß gemäß den Gleichungen:

$$\xi = \frac{t_x}{\bar{g}}, \quad \eta = \frac{t_y}{\bar{g}}$$

$\xi$  und  $\eta$  werden aber ihrer Kleinheit wegen in Sekunden alter Teilung angegeben. In der Geodäsie arbeitet man im Zusammenhang mit astronomischen Beobachtungen meistens mit den negativen Werten von  $\xi$  und  $\eta$ , die als Lotabweichungskomponenten definiert sind.

Die Oberfläche der topographischen Massen läßt sich natürlich nicht durch einfache Funktionen beschreiben. Die numerische Integration muß sich deshalb auf eine approximative Darstellung der topographischen Massen durch ein stufenförmiges Gelände stützen. Es lag nahe, die Unterteilung des Grundrisses in Quadrate vorzunehmen. In jedem dieser Quadrate wird eine mittlere Geländehöhe geschätzt. Als einzelner Bestandteil der numerischen Integration hat man also die Anziehung eines Quaders mit quadratischer Grundfläche.

### 3.1.2. Näherungsfunktionen für die Anziehung eines Quaders

Die exakte Berechnung der Anziehung eines homogenen Quaders führt auf sehr umständliche Ausdrücke. Bei der Integration müssen

daher Näherungsfunktionen verwendet werden, ansonst die Bestimmung der Terrainkorrekturen selbst mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine zuviel Zeit in Anspruch nähme. Die verwendeten Näherungsfunktionen basieren auf der Komprimierung der Quadermasse mit der Dichte  $1 \text{ gr/cm}^3$  in einen Massenpunkt oder in eine Massenstrecke beziehungsweise auf der Massenverlagerung in einen Hohlzylindersektor gleichen Volumens (Fig. 2).

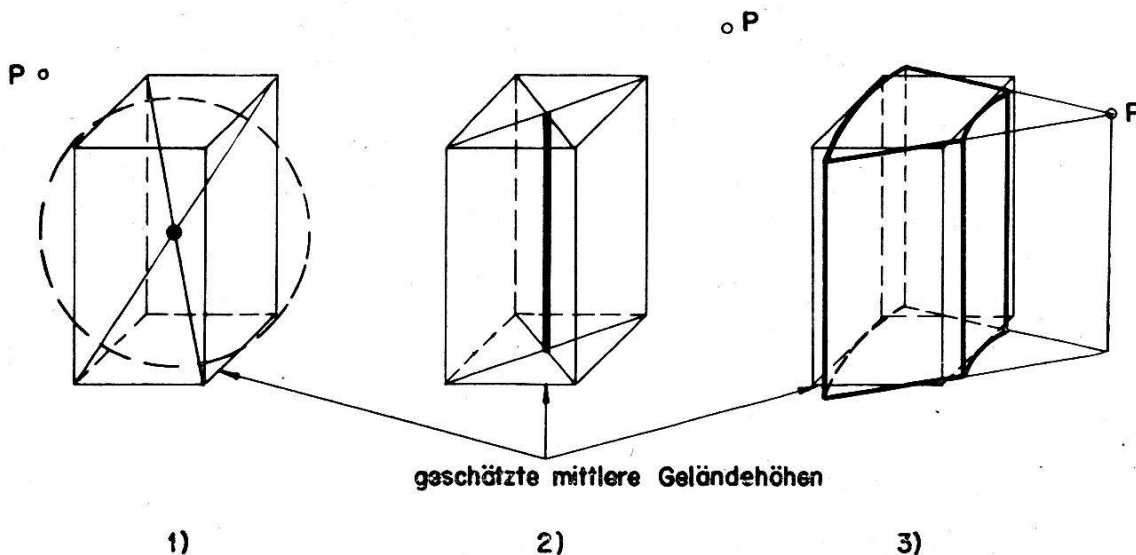
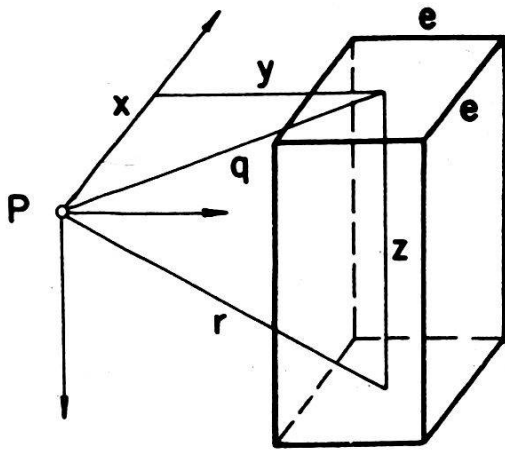


Fig. 2: Näherungsfunktionen für die Anziehung eines Quaders

- 1) Näherung durch Massenpunkt (beziehungsweise homogene Kugel) im Mittelpunkt des Quaders
- 2) Näherung durch homogene Massenstrecke zwischen den Mittelpunkten der Grund- und der Deckfläche
- 3) Näherung durch volumengleichen Hohlzylindersektor, dessen Achse durch den Aufpunkt  $P$  geht. Die Differenz der Radien ist gleich der Kantenlänge der Deckflächen

Zwecks Einsparung von Rechenzeit ging es vor allem darum, irrationale Funktionen, wie Quadratwurzeln, Logarithmen und trigonometrische Funktionen, zu vermeiden oder wenigstens auf ein Minimum zu beschränken. Die Rechenautomaten vollziehen fast ausnahmslos ihre Operationen ohne Hilfe von gespeicherten Funktionstabellen. Die Berechnung der irrationalen Funktionen erfolgt auf Grund fest gespeicherter Unterprogramme. Die Funktionswerte werden durch rasch konvergierende Reihenentwicklungen oder Kettenbrüche auf die nötige Stellengenauigkeit approximiert. Damit erreicht man eben die Darstellung dieser Funktionen mit den vier Grundoperationen, welche dem digitalen Rechengenrät allein als «verdrahtete» Rechenoperationen zur Verfügung stehen.



$$q = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\lambda = \frac{e}{q} \quad \mu = \frac{|z|}{q}$$

Fig. 3: Parameter  $\lambda, \mu$  für die Wahl der Näherungsfunktionen

Mit den in Figur 3 eingeführten Bezeichnungen lauten die Näherungsfunktionen für Schwerestörung und Lotanziehungen:

1. Massenpunkt:

$$T_1 = \frac{k_0}{2} \frac{e^2 z^2}{\left(q^2 + \frac{z^2}{4}\right)^{3/2}}, \quad \xi_1 = -k_0 \frac{e^2 xz}{\left(q^2 + \frac{z^2}{4}\right)^{3/2}}, \quad \eta_1 = \frac{y}{x} \xi_1$$

2. Massenstrecke:

$$T_2 = k_0 e^2 \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right), \quad \xi_2 = -k_0 \frac{e^2 xz}{q^2 r}, \quad \eta_2 = \frac{y}{x} \xi_2$$

3. Zylindersektor:

$$T_3 = k_0 \frac{e}{q} \left( e - \sqrt{\left(q + \frac{e}{2}\right)^2 + z^2} + \sqrt{\left(q - \frac{e}{2}\right)^2 + z^2} \right), \quad -, \quad -$$

Die Funktionen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  verwendet auch M. H. P. Bott [4]. Bei den Lotanziehungen wurde die dritte Näherungsfunktion nicht als Konkurrenzfunktion zugelassen, weil sie nicht wesentlich bessere Werte als die zweite Näherung liefert. Das Programm trifft nun in einem bestimmten Fall selber die Wahl zwischen den verschiedenen Formeln, je nach dem Wert der Parametergrößen  $\lambda$  und  $\mu$ . Bleibt  $\mu$  unter einer gewissen – noch frei zu wählenden – Schranke  $\mu_0$ , so kommt unabhängig von  $\lambda$  immer die Massenpunktsformel zur Durchführung. Bei größeren  $\mu$  entscheidet der Parameter  $\lambda$  über die weiteren Verzweigungen. Um extremen Fällen gerecht zu werden, und auch zwecks Genauigkeitskontrollen, wurden die exakten Quaderformeln hergeleitet und – sowohl für die Vertikal- als auch für die Horizontalkomponenten – in das Programm aufgenommen.

Es gelang mittels nicht analytischer Funktionen, wie zum Beispiel  $\text{sgn}(x)$  und  $|x|$ , Fallunterscheidungen hinsichtlich Lage des Aufpunktes

$P$  zu vermeiden. Die Formeln gelten auch für einen innern Punkt der Deckfläche. Sie lauten:

$$T_4 = k_0 [F(a_1, b_1) - \operatorname{sgn}(\hat{a}) F(a_2, b_1) - \operatorname{sgn}(\hat{b}) F(a_1, b_2) + \operatorname{sgn}(\hat{a}) \operatorname{sgn}(\hat{b}) F(a_2, b_2)]$$


---

wobei

$$F(a, b) = f_1(a, b) + f_2(a, b) + f_3(a, b)$$

$$f_1 = a \ln \frac{(b + \sqrt{a^2 + b^2}) \sqrt{a^2 + z^2}}{(b + \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}) a}$$

$$f_2 = b \ln \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \sqrt{b^2 + z^2}}{(a + \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}) b}$$

$$f_3 = |z| \operatorname{arctg} \frac{a b}{|z| \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

und

$$\hat{a} = |x| - \frac{e}{2}, \quad a_1 = \left| |x| + \frac{e}{2} \right|, \quad a_2 = \left| |x| - \frac{e}{2} \right| = |\hat{a}|$$

$$\hat{b} = |y| - \frac{e}{2}, \quad b_1 = \left| |y| + \frac{e}{2} \right|, \quad b_2 = \left| |y| - \frac{e}{2} \right| = |\hat{b}|$$

bedeuten.

$$\xi_4 = -\frac{k_0}{g} \operatorname{sgn}(z) \operatorname{sgn}(a_1') \operatorname{sgn}(b_1') [\operatorname{sgn}(a_1') G(a_1, b_1) - \operatorname{sgn}(\hat{a}) \operatorname{sgn}(a_2') G(a_2, b_1) - \operatorname{sgn}(\hat{b}) \operatorname{sgn}(a_1') G(a_1, b_2) + \operatorname{sgn}(\hat{a}) \operatorname{sgn}(\hat{b}) \operatorname{sgn}(a_2') G(a_2, b_2)]$$


---

$$\eta_4 = -\frac{k_0}{g} \operatorname{sgn}(z) \operatorname{sgn}(a_1') \operatorname{sgn}(b_1') [\operatorname{sgn}(b_1') G(b_1, a_1) - \operatorname{sgn}(\hat{a}) \operatorname{sgn}(b_1') G(b_1, a_2) - \operatorname{sgn}(\hat{b}) \operatorname{sgn}(b_2') G(b_2, a_1) + \operatorname{sgn}(\hat{a}) \operatorname{sgn}(\hat{b}) \operatorname{sgn}(b_2') G(b_2, a_2)]$$


---

mit

$$G(a, b) = g_1(a, b) + g_2(a, b) + g_3(a, b)$$

$$g_1 = a \operatorname{arctg} \frac{b |z|}{a \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

$$g_2 = b \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} (|z| + \sqrt{b^2 + z^2})}{b (|z| + \sqrt{a^2 + b^2 + z^2})}$$



$$g_3 = |z| \ln \frac{\sqrt{a^2 + z^2} (b + \sqrt{b^2 + z^2})}{|z| (b + \sqrt{a^2 + b^2 + z^2})}$$

und

$$\hat{a} = |x| - \frac{e}{2}, \quad a_1' = x + \frac{e}{2}, \quad a_2' = x - \frac{e}{2}, \quad a_1 = |a_1'|, \quad a_2 = |a_2'|$$

$$\hat{b} = |y| - \frac{e}{2}, \quad b_1' = y + \frac{e}{2}, \quad b_2' = y - \frac{e}{2}, \quad b_1 = |b_1'|, \quad b_2 = |b_2'|$$

Nachstehend sind einige Beispiele der Vertikalkomponenten von Quaderanziehungen mit den Werten der Näherungsfunktionen in einer kleinen Tabelle zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind die gleichen wie in Figur 4.  $e, x, y, z$  sind in Metern,  $T_1, T_2, T_3$  und  $T_4$  in Einheiten von  $10^{-3}$  mgl angegeben. Die Beispiele könnten durchaus der Praxis entstammen.

$e$	$x$	$y$	$z$	$\lambda$	$\mu$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
100	1500	2000	100	0,04	0,04	0,02133	0,02132	0,02133	0,02133
100	750	1000	50	0,08	0,04	0,04266	0,04264	0,04270	0,04274
100	750	1000	100	0,08	0,08	0,17034	0,16994	0,17021	0,17034
100	750	1000	200	0,08	0,16	0,67650	0,67017	0,67120	0,67173
100	750	1000	400	0,08	0,32	2,63038	2,53864	2,54207	2,54402
50	225	300	25	0,13	0,07	0,09865	0,09848	0,09892	0,09914
50	225	300	50	0,13	0,13	0,39264	0,39006	0,39175	0,39263
50	225	300	100	0,13	0,27	1,53979	1,50141	1,50735	1,51064
50	75	100	25	0,40	0,20	2,62847	2,59053	2,69088	2,75116
50	75	100	50	0,40	0,40	10,0622	9,5412	9,8436	10,0485

### 3.1.3. Gestaltung des Rechenprogramms

Eine durchgehende Unterteilung des zum Integrationsgebiet gehörenden Grundrisses in gleich große quadratische Felder ist in den wenigsten Fällen angebracht. Besonders in unseren schweizerischen alpinen und voralpinen Gegenden ist ein solches Vorgehen vollkommen ungenügend. Denn die Beiträge der näheren Massen überwiegen natürlich sehr stark. Je nach Einteilung wäre das Verfahren entweder viel zu wenig genau bei Anwendung eines zu groben Netzes oder dann sehr unrationell bei einem feinen Netz. Vielmehr ist eine gegen Stationsnähe feiner werdende Einteilung wie bei der früheren, konventionellen Methode geboten.

Das Problem wurde auf folgende Weise gelöst. Die Grundlage des Programms bildet das durchgehend in gleiche Felder unterteilte Teilgebiet rechteckiger oder quadratischer Form. Wir nennen ein solches Teilgebiet einen Block (Fig. 4). Doch kann zum Beispiel durch geeignete Maßnahmen entweder ein fester rechteckiger oder je nach Stationslage verschiedener quadratischer Ausschnitt bei der Integration ausgelassen

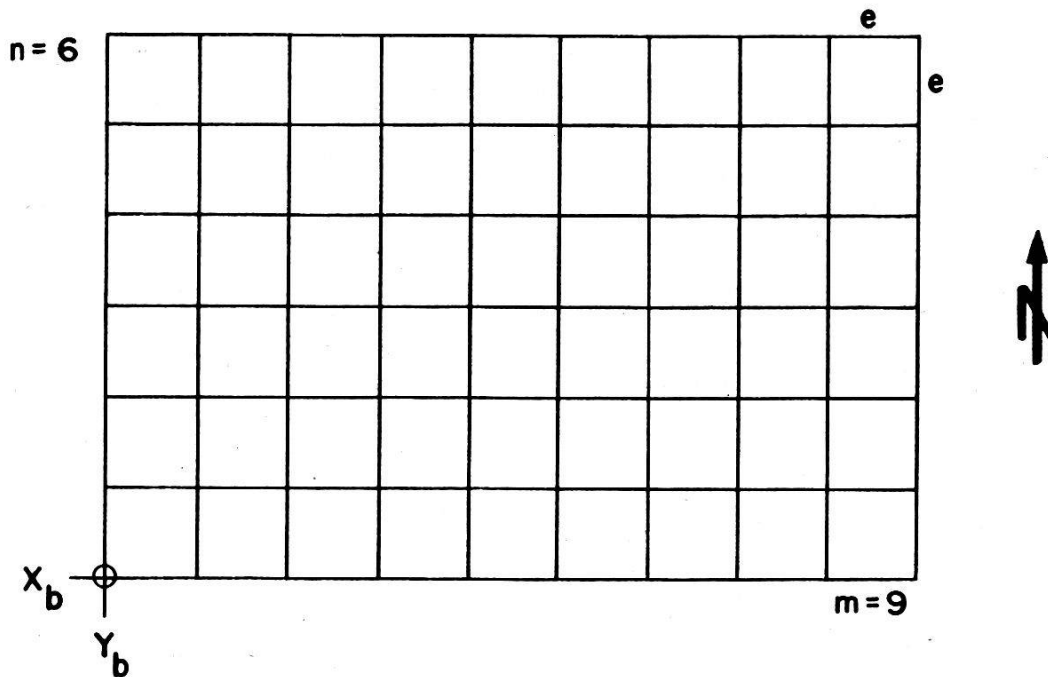


Fig. 4: Block als Teil des Integrationsgebietes

Blockgrößen:

- $b$  Blocknummer
- $e$  Netzweite (Quadratseite eines Feldes)
- $m$  Anzahl Kolonnen
- $n$  Anzahl Zeilen
- $Y_b$  } Koordinaten des Blocknullpunktes
- $X_b$  } (südwestliche Ecke des Blocks)

werden. Man hat so die wichtige Möglichkeit, Blöcke mit verschiedenen feiner Einteilung ineinander zu schachteln. In der Regel wird ein Block für jede Station bis zu seinem Rand ausgezählt. Es ist aber auch vorgesehen, von einem bestehenden Block für jede Station nur über ein gewisses quadratisches Teilstück, eventuell noch mit inneren Auslassungen, zu summieren. Bei gegebener Größe des äußeren und des inneren Randes wählt das Programm für jede Station automatisch die richtigen Felder aus dem Block aus. Bei dieser weitgehenden Automation ist das lückenlose Ineinandergreifen der verschiedenen Integrationsgebiete mit unterschiedlicher Feinheit der Einteilung gewährleistet.

Besondere Aufmerksamkeit wurde dem stationsnahen Gelände geschenkt. Denn gerade die nächstgelegenen Terrainunebenheiten bis zu 100 und 200 m Entfernung tragen relativ viel zur Vertikalkomponente der Terrainkorrektur bei, und kleine Unsicherheiten der Höhen geben die größten Fehlerbeiträge. In den allermeisten Fällen ist es unumgänglich, die nächste Umgebung jeder Station durch mindestens einen Block mit kleinsten Netzweiten zu erfassen. Größe der Blöcke und Feinheit des Netzes richten sich nach dem mittleren Stationsabstand, der gewünschten Genauigkeit und nach den zur Verfügung stehenden Kartenunterlagen. Wo großmaßstäbliche Karten und Übersichtspläne fehlen,

wie dies zum Beispiel in den Alpengegenden der Fall ist, wird man daher oft zu Meßtischaufnahmen gezwungen sein.

Zwecks bester Ausnützung des aus der Karte entnommenen Knotenmaterials werden die neun einer Station nächstgelegenen Quadrate nochmals unterteilt (Fig. 5). Das Gelände wird durch eine einfache Fläche

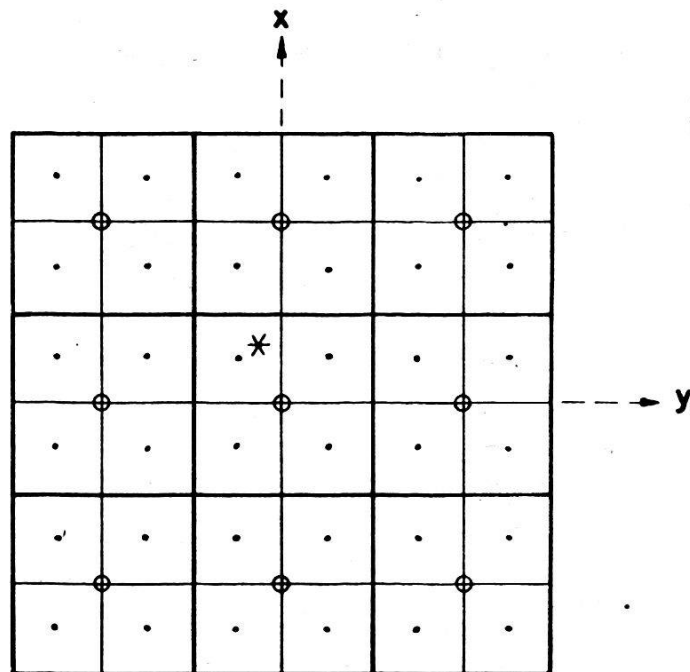


Fig. 5: Nächste Stationsumgebung

- \* Meßstation
- o Knoten aus Karte gelesen
- Knoten durch Interpolation berechnet

approximiert, welche durch die neun Knotenpunkte geht. Diese bestimmen gerade die neun Koeffizienten der biquadratischen Funktion:

$$H' = a_0 + a_1y + a_2x + a_3y^2 + a_4yx + a_5x^2 + a_6y^2x + a_7yx^2 + a_8y^2x^2$$

Die Höhen der 36 neuen Feldermittelpunkte auf der Fläche vierten Grades werden sodann als mittlere Höhen interpretiert. Der Stationspunkt wird für die Berechnung ebenfalls auf der Approximationsfläche angenommen (Normalprojektion). Das beschriebene Verfahren hat zwei Vorteile. Erstens kommt man dem wirklichen Gelände näher, und zweitens ist die Approximation durch die Näherungsfunktionen dank der feineren Einteilung besser.

Das Programm ist sehr allgemein gehalten und gewährt somit große Freiheiten in den möglichen Aufteilungen des Integrationsgebietes. Bei der Blockeinteilung wird man sich durch die angestrebte Genauigkeit und durch bestmögliche Anpassung an das gegebene Stationsnetz leiten lassen. Das Grundprinzip lautet, bei geringstem Aufwand, nämlich mit möglichst wenig Feldern, ein Maximum an Genauigkeit und ein Minimum an Rechenzeit zu erzielen. Der Vorteil der programmgesteuerten Berechnung ist offensichtlich um so größer, je kleiner der Durchmesser des

Stationsnetzes im Vergleich zur Ausdehnung der sichtbaren Massen ist und je mehr Stationen das Netz aufweist.

Auf eine nähere Beschreibung des Programms soll hier nicht eingegangen werden. Detaillierte Angaben über die Anwendung des Programms sind der ausführlichen Anleitung zu entnehmen. Im Institut für Geophysik und in der Schweizerischen Geodätischen Kommission an der ETH in Zürich liegt je ein Exemplar auf.

(Fortsetzung folgt)

## Analytische Luftphotogrammetrie

*B. Hallert, Stockholm*

### *Zusammenfassung*

Die grundlegende Genauigkeit der Bildkoordinaten photographischer Luftaufnahmen ist unter wirklichen Aufnahmeverhältnissen geprüft worden. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate sind die regelmäßigen Fehler der Bildkoordinaten möglichst gut von den unregelmäßigen Fehlern getrennt, und die letzteren sind als mittlere Gewichtseinheitsfehler bestimmt und angegeben worden. Es wurde eine ausgeprägte Gewichtsverteilung der Bildkoordinaten in Richtung des Radius vom Bildhauptpunkt aus festgestellt. Der quadratische Mittelwert der mittleren Gewichtseinheitsfehler der Bildkoordinaten ist zu  $\pm 7 \mu\text{m}$  gefunden worden.

Nach einer elementaren Ableitung grundlegender Formeln der analytischen Photogrammetrie sind praktische analytische Auswertungen durchgeführt worden. Die Messungen der Bildkoordinaten sind im Stereokomparator Wild Stk 824 und die Berechnungen in der elektronischen Rechenanlage FACIT durchgeführt worden. Die Genauigkeitsverhältnisse sind sehr gut unter der Voraussetzung, daß regelmäßige Bildfehler korrigiert werden. Die quadratischen Mittelwerte der Höhenfehler wurden theoretisch und praktisch als etwa  $1/15\,000$  der Flughöhe gefunden.

### *Résumé*

L'exactitude fondamentale des coordonnées de l'image de prises de vue aériennes a été vérifiée dans des conditions de levé réelles. A l'aide de la méthode des moindres carrés, les erreurs systématiques de l'image ont été séparées aussi bien que possible des erreurs accidentelles et ces dernières déterminées et représentées comme erreurs moyennes d'unité de poids. Il a été constaté une répartition très prononcée en fonction du rayon à partir du point principal de l'image. La valeur de la moyenne quadratique de l'erreur d'unité de poids des coordonnées de l'image a été trouvée de  $\pm 7 \mu\text{m}$ .

Après une dérivation élémentaire des formules principales de la photogrammétrie analytique, des restitutions analytiques pratiques ont été effectuées. Les mesures des coordonnées de l'image ont été exécutées avec le stéréocomparateur Wild Stk 824 et les calculs au moyen d'une calculatrice électronique FACIT. Les rapports d'exactitude sont très bons, pour autant que les erreurs systématiques de l'image soient corrigées. La valeur de la moyenne quadratique de l'erreur altimétrique a été déterminée, en théorie comme en pratique, à environ  $1/15\,000$  de la hauteur de vol.