

Die Gesamtflächenverzerrung in schweizerischen Plan- und Kartenwerken

Autor(en): **Bolliger, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **62 (1964)**

Heft 10

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-219231>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Gesamtflächenverzerrung in schweizerischen Plan- und Kartenwerken

Von J. Bolliger

Zusammenfassung

Aus dem Zusammenwirken der Projektionsvergrößerung mit der Verkleinerung durch die Horizontreduktion auf den Meeresspiegel ergibt sich die Gesamtverzerrung der Längen und Flächen in unseren Plan- und Kartenwerken. Im allgemeinen überwiegt die Verkleinerung. Eine Vergrößerung tritt nur außerhalb der verzerrungsfreien Linie auf, die im Norden von Basel dem Rheinlauf folgt bis zum Bodensee, im Süden bei Genf, im Wallis bei Sion eine Insel bildet und im südlichen Tessin verläuft.

Im ersten Teil werden die Formeln für das Bestimmen der Flächenverzerrung aus der Zylinderprojektion abgeleitet. An drei Beispielen wird die Anwendung dieser Formeln gezeigt und die Flächenverzerrung eines Blattes der Karte 1 : 100000 zu 3360 km² mit 37,5 ha Verzerrung, der Gemeinde Dinhard ZH zu 705 ha Gesamtfläche mit 809 m² Verzerrung und des Kantons Zürich zu 1729 km² Fläche mit 12 ha Verzerrung gegeben.

Die Flächenverzerrung aus der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel ist bedeutend kleiner. Nach der ohne Ableitung gegebenen Rechenformel wird für den Kanton Zürich eine Flächenverzerrung von nur 5 m² ermittelt.

Die Horizontreduktion gibt für Dinhard eine Flächenverkleinerung von 1016 m² = 0,144 ‰ des Gemeindeareals. Aus dem Zusammenwirken mit der Projektionsvergrößerung ist die vom Grundbuch gegebene Arealbestimmung für Dinhard um 207 m² = 0,03 ‰ zu klein.

Auf eine zweite Art, mit Äquidformaten, läßt sich die Gesamtverzerrung von beliebig großen und beliebig umgrenzten Flächen bestimmen. Das Beispiel für Dinhard zeigt in Figur 5 solche Äquidformaten, die mit leichter Höhenzunahme gegen Norden den Höhenkurven folgen. Die Konstruktion solcher Linien wird eingehend beschrieben. Für die Gesamtfläche der Schweiz orientiert eine Äquidformatenkarte über die Gesamtflächenverzerrung an beliebigen Orten, wie aus dieser Karte auch für die ganze Schweiz die Gesamtflächenverzerrung mit -14,5 km² bei 41 288 km² Landesfläche bestimmt wurde. Aus der Verkleinerung durch die Horizontreduktion läßt sich weiter die mittlere Höhe unseres Landes zu 1330 m über Meer bestimmen.

Abschließend wird in Figur 7 dargestellt, wie eine parabolische Mantelfläche, als geometrischer Ort der Verzerrungsfreiheit, vom Meeresspiegel nach Norden und Süden ansteigt und beim Durchdringen der Gelände- fläche die verzerrungsfreie Linie erzeugt.

Résumé

L'agrandissement dû au système de projection et la réduction due au choix du niveau de la mer comme horizon de référence produisent des altérations de longueur et de surface dans nos plans et nos cartes. En général, l'effet de la réduction est prépondérant. Un agrandissement ne se produit qu'au-delà d'une ligne qui au Nord suit le cours du Rhin de Bâle au Lac de Constance, au Sud passe à Genève et par le Tessin méridional, et forme une île dans le Valais près de Sion.

Dans la première partie sont développées les formules qui permettent de déterminer l'altération des surfaces dans la projection cylindrique.

Trois exemples montrent l'application de ces formules: l'altération pour une feuille de la carte nationale 1 : 100 000 d'une superficie de 3360 km² atteint 37,5 ha. Elle est de 809 m² pour la commune zurichoise de Dinhard qui s'étend sur 705 ha, et de 12 ha pour tout le canton de Zurich (1729 km²).

L'altération de surface résultant de la projection de l'ellipsoïde sur la sphère est insignifiante. La formule, non démontrée ici, donne pour le canton de Zurich une altération de 5 m² seulement.

La réduction au niveau de la mer diminue de 1016 m², soit de 0,144 ‰, la surface de la commune de Dinhard. En la combinant à l'agrandissement dû au système de projection, on obtient pour Dinhard une surface cadastrale trop petite de 207 m², soit 0,03 ‰.

Dans une seconde partie on montre à l'aide de lignes d'égale déformation comment déterminer l'altération générale pour des surfaces quelconques par leur grandeur et leur forme. Dans l'exemple de Dinhard, la figure 5 montre de telles lignes, qui suivent les courbes de niveau en s'élevant légèrement vers le Nord. La construction de ces lignes est décrite en détail. Une carte donne pour toute la Suisse l'altération générale des surfaces en un lieu quelconque ainsi que l'altération totale pour la Suisse entière qui atteint 14,5 km² pour une superficie de 41 288 km². La diminution de surface due à la réduction de l'horizon permet de fixer à 1330 m l'altitude moyenne de notre pays.

En conclusion la figure 7 montre que le lieu géométrique des points sans altération est une surface parabolique qui depuis le niveau de la mer s'élève vers le Nord et vers le Sud et dont l'intersection avec la surface terrestre est la ligne d'altération nulle.

Nach einer Publikation «Über Äquidformaten» in Nr. 1 der «Geographica Helvetica 1964» wurde aus Vermessungskreisen die Anregung gemacht, über die Gesamtflächenverzerrung, das Zusammenwirken der Projektionsverzerrung mit der Horizontreduktion, eine Veröffentlichung vorzunehmen. Im allgemeinen ist die Verzerrung durch die Horizontreduktion größer als durch die Projektion, so daß die aus Plänen und Karten bestimmten Vermessungsflächen zu klein sind. Nur nördlich der Rheinlinie von Basel bis zum Bodensee und im südlichen Tessin überragt die Projektionsverzerrung, was zu einer Flächenvergrößerung führt, wie noch gezeigt werden soll. Zum Bestimmen der Gesamtverzerrung sind vorerst die beiden Einzelverzerrungen zu ermitteln.

1. Die Flächenverzerrung in der Zylinderprojektion

Während für eine beliebig umrissene Fläche aus der Elementarverzerrung $d\Delta f$ durch Integration die Verzerrungsbestimmung nicht möglich ist, beschränken wir uns zunächst auf beliebig große Koordinatenfelder F_c mit den Begrenzungslinien Y_1 , Y_2 und X_1 , X_2 , in welche unser Gebiet aufgeteilt wird. Die Verzerrung der Restflächen am äußern Rand dieser Felder kann zusätzlich auf einfache Art genau bestimmt werden.

Ist ds eine Elementarstrecke auf der Kugel und ds' ihre Projektion in der Ebene, so ist das

$$\text{Verzerrungsverhältnis } m = \frac{ds'}{ds}$$

Da die Elementarverzerrung von der Richtung unabhängig ist, was der Bedingung für winkeltreue Übertragung entspricht, so wählen wir zur Bestimmung von m das Breitenkreisbogenstück ds , dessen Länge auf der Kugel im Punkt $P = R \cdot \cos \varphi \cdot dl$ ist, wenn φ die Breite des Punktes P ist und l dessen Länge. Da in der winkeltreuen Zylinderprojektion der Bogen für die geographische Länge l , vom Grundmeridian aus gezählt, auf dem Bild des Zylinderberührungskreises, der die Y -Achse in der Projektionsebene ist, längentreu abgebildet wird, so ist

$$Y = R \cdot l \text{ und } dY = R \cdot dl.$$

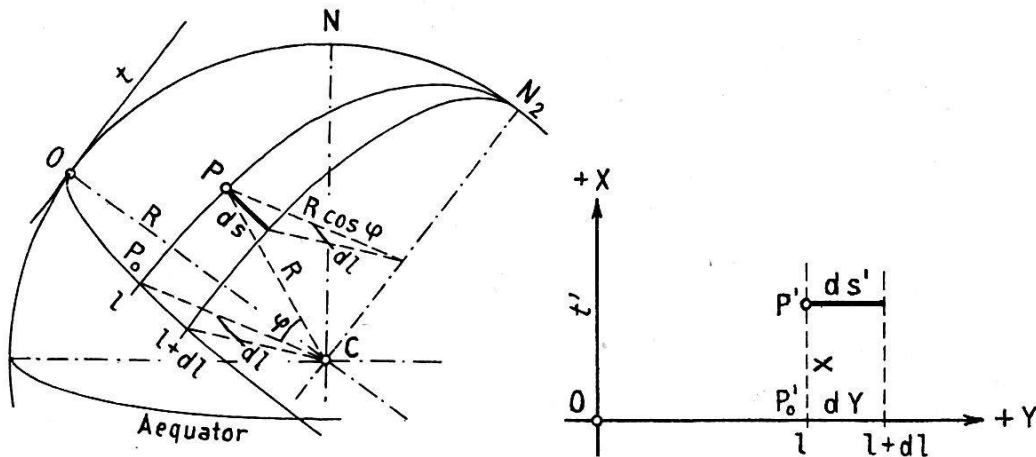


Fig. 1

Wir finden nun das Verzerrungsverhältnis m im Punkt P für das Breitenkreisbogenstück ds , dessen Länge, wie aus der Figur hervorgeht, $R \cdot \cos \varphi \cdot dl$ ist, zu dem entsprechenden Breitenkreisbogenstück $ds' = dY$ in der Projektionsebene, zu

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{dY}{R \cdot \cos \varphi \cdot dl} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{oder reziprok: } \frac{ds}{ds'} = \cos \varphi$$

Da φ stets klein ist, kann die Reihenentwicklung für $\cos \varphi$ mit Gliedern bis zur 4. Ordnung angewendet werden, so daß nun ist:

$$\frac{ds}{ds'} = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}$$

In dieser Gleichung wird $\varphi = F(X)$ nach den Projektionsformeln¹ ersetzt, somit ist

$$\frac{ds}{ds'} = 1 - \frac{1}{2 R^2} X^2 + \frac{5}{24 R^4} X^4$$

¹ Für die Merkatorprojektion ist: $\varphi = \frac{1}{R} X - \frac{1}{6 R^3} X^3 + \dots$

Zum Bestimmen der Flächenverzerrung wird diese Gleichung quadriert:

$$\frac{ds^2}{ds'^2} = \frac{df}{df'} = 1 - \frac{1}{R^2} X^2 + \frac{2}{3 R^4} X^4$$

Diese Gleichung wird mit df' multipliziert, und durch Differenzenbildung ergibt sich die

örtliche Flächenverzerrung $d\Delta f$

$$df' - df = d\Delta f = df' \left(\frac{1}{R^2} X^2 - \frac{2}{3 R^4} X^4 \right) \quad (1)$$

In dieser Gleichung wird für $df' = dY \cdot dX$ das Elementarkoordinatenquadrat eingesetzt, was die zur Integration vorbereitete folgende Gleichung ergibt:

$$d\Delta f = dY \left(\frac{1}{R^2} X^2 dX - \frac{2}{3 R^4} X^4 dX \right)$$

Für ein beliebig großes Koordinatenfeld F_c' , dessen Begrenzung durch Y_1, Y_2 und X_1, X_2 gegeben ist, gibt die Integration der obigen Gleichung in diesen Grenzen die

Flächenverzerrung ΔF_c

$$\Delta F_c = (Y_2 - Y_1) \left[\frac{1}{3 R^2} (X_2^3 - X_1^3) - \frac{2}{15 R^4} (X_2^5 - X_1^5) \right]$$

Wird die Koordinatenfeldfläche $F_c' = (Y_2 - Y_1) (X_2 - X_1)$ in diese Gleichung eingesetzt, so ist

$$\Delta F_c = F_c, \left(\frac{1}{3 R^2} \frac{X_2^3 - X_1^3}{X_2 - X_1} - \frac{2}{15 R^4} \frac{X_2^5 - X_1^5}{X_2 - X_1} \right)$$

Die Division durch $X_2 - X_1$ gibt mit der vereinfachten Schreibweise von $\frac{X_2 + X_1}{2} = X_c$, der Mittelkoordinate unseres Feldes,

$$(X_2^3 - X_1^3) : (X_2 - X_1) = 3 X_c^2 + \frac{1}{4} (X_2 - X_1)^2$$

$$(X_2^5 - X_1^5) : (X_2 - X_1) = 5 X_c^4 + \frac{5}{2} X_c^2 (X_2 - X_1)^2 + \frac{1}{16} (X_2 - X_1)^4$$

Danach ist nun

$$\begin{aligned} \Delta F_c = F_c, & \left[\frac{1}{R^2} X_c^2 + \frac{1}{12 R^2} (X_2 - X_1)^2 - \frac{2}{3 R^4} X_c^4 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3 R^4} X_c^2 (X_2 - X_1)^2 - \frac{1}{120 R^4} (X_2 - X_1)^4 \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Diese Schlußgleichung zeigt, daß für die Summen- und Differenzenbildung die Reihenfolge der Koordinaten belanglos ist, da sie nur in geraden Potenzen auftreten. Das erste und dritte Glied der Reihe mit der Mittelpunktskoordinate X_c entspricht der örtlichen Flächenverzerrung nach Gleichung (1).

Wegen der Konvergenz der Reihe ist der Beitrag der Glieder 4. Ordnung so klein, daß er gewöhnlich weggelassen werden kann. Das zweite Glied mit der Koordinatendifferenz gibt das Kriterium, wie groß eine beliebig geformte Restfläche am Rand der Koordinatenfelder sein darf, um mit der Mittelkoordinate bei der Größe von $X_2 - X_1$ mit dem ersten Glied allein mit genügender Genauigkeit rechnen zu können.

Mit Gleichung (2) ist der Weg gegeben zur genauen Verzerrungsbestimmung beliebig umgrenzter Flächen. Man zerlegt sie in möglichst große Koordinatenfelder F_c und kleine Restflächen f am Rand dieser Felder, die positiv oder negativ den Zuschlag zu der Verzerrung der Koordinatenfelder ergeben, wobei mit dem Rechenschieber gerechnet werden kann. Die Summe der Einzelverzerrungen ΔF_c und der Restflächen Δf gibt die Gesamtverzerrung der Fläche F in der Projektion.

Zum praktischen Rechnen setzen wir die konstanten Koeffizienten für $R = 6378,8159$ km, $\lg R = 3,804\ 7400\ 7$ in Gleichung (2) ein, wobei deren logarithmische Werte durch eckige Klammern bezeichnet sind, womit wir folgende Rechnungsformeln erhalten:

Flächenverzerrung ΔF_c von Koordinatenfeldern F_c

Koordinaten in km, F_c in km² gibt ΔF_c in m².

$$\begin{aligned} \Delta F_c = & [8,390\ 5199_{-10}] \cdot F_c \cdot X_c^2 + [7,311\ 3386_{-10}] \cdot F_c (X_2 - X_1)^2 \\ & - [0,60495_{-10}] F_c \cdot X_c^4 - [0,30392_{-10}] F_c \cdot X_c^2 (X_2 - X_1)^2 - \\ & - [8,70186_{-20}] F_c (X_2 - X_1)^4 \end{aligned} \quad (3a)$$

Zum Rechnen mit der Maschine in natürlichen Zahlen geben die ersten 2 Glieder:

$$\Delta F_c = 2,457\ 641 \cdot 10^{-2} \cdot F_c \cdot X_c^2 + 8,192\ 164 \cdot 10^{-3} \cdot F_c (X_2 - X_1)^2 \quad (3b)$$

Für die Rechenschieberrechnung der Restflächen f ist

$$\Delta f = 2,458 \cdot 10^{-2} \cdot f \cdot X_c^2 \quad (3c)$$

Oft ist es praktischer, die Flächenverzerrung in Promillen der Fläche F_c zu bestimmen. Das gibt:

Flächenverzerrung $\Delta F_c^{\text{‰}}$ in Promillen der Fläche F_c , Koordinaten in km

$$\begin{aligned} \Delta F_c^{\text{‰}} = & [5,390\ 5199_{-10}] \cdot X_c^2 + [4,311\ 3386_{-10}] (X_2 - X_1)^2 \\ & - [7,60495_{-20}] X_c^4 - [7,30392_{-20}] X_c^2 (X_2 - X_1)^2 - \\ & - [5,70186_{-20}] (X_2 - X_1)^4 \end{aligned} \quad (4a)$$

Zum Maschinenrechnen geben die ersten 2 Glieder:

$$\Delta F_c^0/00 = 2,457\ 641 \cdot 10^{-5} \cdot X_c^2 + 8,192\ 164 \cdot 10^{-6} (X_2 - X_1)^2 \quad (4b)$$

Für Rechenschieberrechnung der Restflächen f :

$$\Delta f^0/00 = 2,458 \cdot 10^{-5} X_c^2 \quad (4c)$$

2. Zahlenbeispiele zur Verzerrungsberechnung von Projektionsflächen

a) Projektionsverzerrung ΔF eines großen Koordinatenfeldes F_c

An einem ersten Beispiel soll der Rechengang nach Formel (3a) in logarithmischer Form gezeigt werden. Dabei beachte man die kleinen Verzerrungsbeträge, welche die Glieder III–V der 4. Ordnung ergeben. Als Koordinatenfeld F_c wurde Blatt 42, Oberwallis, der Landeskarte 1:100 000 gewählt, dessen Mittelkoordinate $X_c = -66$ km beträgt, was keine sehr große Verzerrung erwarten läßt.

Flächenverzerrung von Blatt 42, Oberwallis

Ausgangswerte		Schlußrechnung		m^2	
$X_2 -$	42 km	I	+359 705,5 m^2	III	-25,7
$X_1 -$	90 km	II	+ 15 854,8 m^2	IV	- 6,8
$X_2 - X_1$	48 km	I + II	+375 560,3 m^2	V	-80,1
$X_2 + X_1 -$	132 km	III - V	- 32,6 m^2	III + V	-32,6
$X_c -$	66 km	$\Delta F_c = +375\ 527,7\ m^2$ Flächen- verzerrung			

Logarithmische Rechnung, Konstante mit C_{1-5} bezeichnet:

C_1	8,390 5199	C_2	7,913 3986	C_3	0,60495 _n	C_4	0,90598 _n	C_5	9,90598 _n
X_c^2	3,639 0878	X_d^2	2,760 4224	X_c^4	7,27818	X_c^2	3,63909	X_d^4	5,52084
F_c	3,526 3393	F_c	5,526 3393	F_c	5,52634	X_d^2	2,76042	F_c	3,52634
I	5,555 9470	II	4,200 1603	III	1,40947 _n	F_c	5,52634	V	8,95316 _n
						IV	0,83183 _n		

Die Größe der Flächenverzerrung mit +37,5528 ha ist selbst im Kartenblatt mit 37,6 mm^2 feststellbar, wenn praktisch auch belanglos. Für die südlich anstoßenden Blätter 1 : 100 000 mit der Mittelkoordinate $X_c = -114$ km wächst die Flächenverzerrung^m auf 62,7 mm^2 .

b) Flächenverzerrung ΔF in der Projektion des Areal der Gemeinde Dinhard

Die mittelgroße Zürchergemeinde Dinhard hat nach der neuen Grundbuchvermessung, Angabe vom 1. Januar 1963, ein Areal von $F = 705\ 4030\ m^2$. Sie kann zur Verzerrungsbestimmung in zwei große Koordinatenfelder, I und II, wie Figur 2 es zeigt, eingeteilt werden, wobei am Rand dieser Felder 10 Restflächen, Nrn. 1–10, sich ergeben, deren größte mit $f = 31,6$ ha. Deren Verzerrung läßt sich mit dem Rechen-

schieber nach Formel (3c) bestimmen, während die Verzerrung der Koordinatenfelder F_c mit Formel (3a) berechnet wurde, wie im vorangehenden Beispiel. Es sind in der folgenden Zusammenstellung die Verzerrungsanteile der einzelnen Flächen gegeben, deren Summe die Gesamtverzerrung des Gemeindeareals in der Projektion ist.

Zusammenstellung der Flächenverzerrung des Grundbuchareals der Gemeinde Dinhard

f Nr.	f +km ²	X_c km	Δf +km ²	f Nr.	f -km ²	X_c km	Δf -m ²	Fläche Nr.	F_c km ²	f km	ΔF_c m ²
2	0,316	69,2	37,2	1	0,524	69,8	62,6	I	+6,000	68,5	+691,9
3	0,004	68,5	0,5	6	0,155	67,1	17,2	II	+2,000	68,0	+227,3
4	0,255	67,4	28,4	7	0,430	67,3	47,8	1-10	-0,945	—	-110,3
5	0,149	66,9	16,4	8	0,341	68,5	39,3				
10	0,016	70,0	1,9	9	0,235	69,3	27,8				
+ 0,740		+ 84,4		- 1,685		- 194,7		$F = +7,055$		$\Delta F = +808,9$	
								Grundbuchfläche		705 4030	
								Unverzerrte Fläche		705 3221,1 m ²	

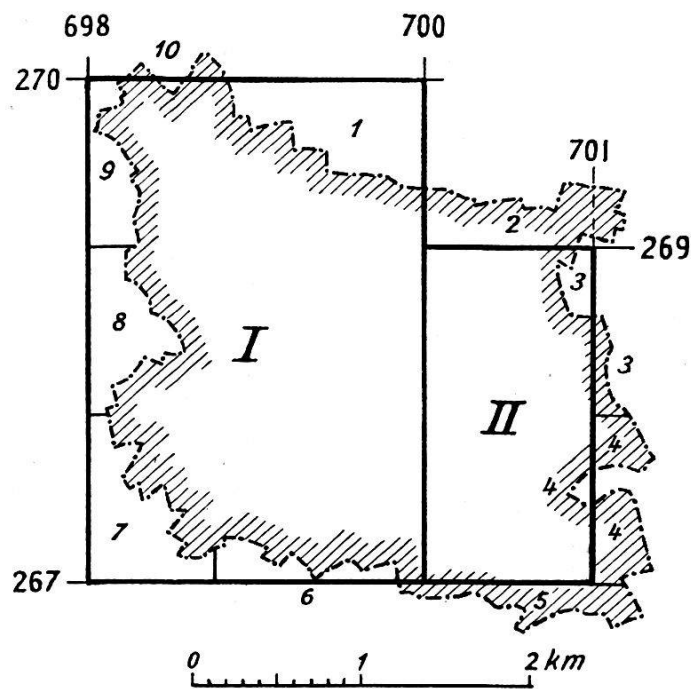


Fig. 2. Gemeinde Dinhard

Bei einem auf den Quadratmeter von der Grundbuchvermessung gegebenen Gemeindeareal ist sein Verzerrungsbetrag der Projektion von 809 m² keine Kleinigkeit. Doch die Verzerrung durch die Horizontreduktion, die Verlegung der Vermessungsfläche in den Meereshorizont, gibt eine noch größere Flächenverkleinerung, die später bestimmt werden soll. Aus dem Zusammenwirken der beiden Verzerrungen resultiert eine Flächenverkleinerung von 205 m², was immer noch keine Kleinigkeit bedeutet.

c) Verzerrung der Projektionsfläche des Kantons Zürich

Die Bestimmung der Flächenverzerrung durch die Projektion soll noch für eine größere Fläche gezeigt werden. Dafür soll der Kanton Zürich gewählt werden, welcher nach der Schweizerischen Arealstatistik einen Flächeninhalt von 1729,0828 km² hat. Nach der Karte 1:100000 wurde die Fläche in 3 große Koordinatenfelder, I-III, und 48 kleinere zerlegt, deren Verzerrung, wie oben gezeigt, bestimmt wurde. Am äußern Rand dieser Felder verblieben 140 Restflächen zur Verzerrungsbestimmung mit dem Rechenschieber. Hierfür wurde die Größe dieser Flächen und die Mittelpunktskoordinate X_c nach der Karte 1:25000 bestimmt. Im Innern der Figur 3 sind diese Einzelergebnisse angeführt. Das Ver-

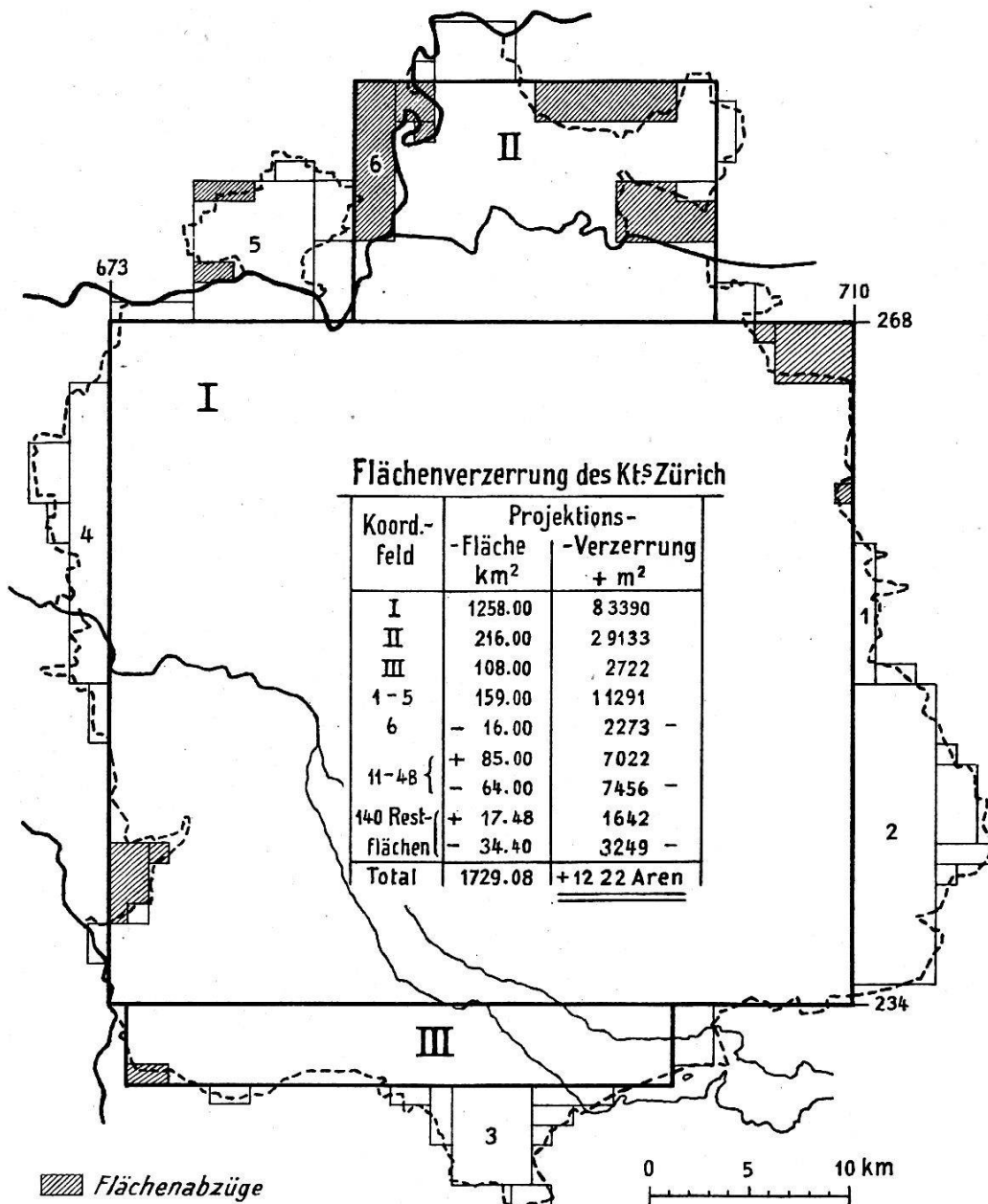


Fig. 3. Verzerrungsbestimmung Kanton Zürich

zerrungsergebnis von 1255 a geht weit über die auf Aren gegebene Angabe der Flächengröße nach der Arealstatistik hinaus, dem allerdings, wie bei der Gemeinde Dinhard angeführt, die Flächenverkleinerung durch die Horizontreduktion gegenübersteht, die wesentlich größer ist als die Projektionsverzerrung und zu einer Flächenverkleinerung führt. Wenn die der Vermessung entnommenen Flächenangaben der Arealstatistik und das vom Geometer bestimmte Gemeindeareal weiterhin ihre Bedeutung haben, so mögen die obigen Verzerrungsbestimmungen immerhin zeigen, wie groß die Abweichungen vom wirklichen Flächeninhalt sind.

Eine gleiche Bestimmung der Projektionsverzerrung wurde nach der Dufourkarte 1 : 100 000 für die ganze Schweiz durchgeführt, welche eine um 2,58 km² zu große Fläche ergibt.

3. Die Flächenverzerrung in der Kugelprojektion

Beim winkeltreuen Übertragen vom Ellipsoid auf die Kugel nach dem von C.F. Gauss entwickelten Verfahren treten nur kleine Flächenverzerrungen auf. Um über deren Größe sich Rechenschaft geben zu können, wurden Ableitungen zu Rechenformeln vorgenommen, deren Wiedergabe hier zu viel Platz beanspruchen würde. Es sei deshalb nur die für das praktische Rechnen der Flächenverzerrung nötige Rechenformel angeführt, die vom gleichen Grundsatz ausgeht wie bei der Zylinderprojektion: Eine beliebig begrenzte Fläche wird in Koordinatenfelder aufgeteilt und in kleine Restflächen, deren Verzerrung zu bestimmen ist.

Die Verzerrung auf der Projektionskugel sei mit $\Delta_\epsilon F_c$ für ein Koordinatenfeld F_c , und mit $\Delta_\epsilon f$ für die Restflächen f bezeichnet. Die Größe der Flächen F_c , f und die Koordinaten Y , X werden der Zylinderprojektionsebene entnommen. Die Rechnung erfolgt mit denselben Bezeichnungen wie bei der Zylinderprojektion: X_c für die Mitte des Koordinatenfeldes F_c und der Restflächen f , und Y_1 , Y_2 , X_1 , X_2 sind die Koordinaten für die Begrenzungslinien des Feldes F_c . Wir erhalten die folgende Rechenformel, wobei zum logarithmischen Rechnen die Logarithmen der Konstanten durch eckige Klammern angedeutet werden:

Flächenverzerrung $\Delta_\epsilon F_c$ von Koordinatenfeldern F_c

X , Y in km, F_c in km² gibt $\Delta_\epsilon F_c$ in m²

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon F_c = & - [2,23532_{-10}] F_c X_c^3 - [1,63326_{-10}] F_c X_c (X_2 - X_1)^2 \\ & + [7,6814_{-20}] (X_2^3 - X_1^3) (Y_2^3 - Y_1^3) - \\ & - [7,0912_{-20}] (X_2^5 - X_1^5) (Y_2 - Y_1) \end{aligned} \quad (1)$$

Für Rechenschieberbestimmung bei Restflächen f :

$$\Delta_\epsilon f = - 1,719 \cdot 10^{-8} \cdot f \cdot X_c^3 - 4,30 \cdot 10^{-9} \cdot f \cdot X_c \cdot (X_2 - X_1)^2 \quad (2)$$

Die Vorzeichen der beiden ersten Glieder werden von X_c bestimmt, die Verzerrung ist somit nördlich der Y -Achse negativ, eine Verkleinerung, und südlich positiv, eine Vergrößerung. Das erste Glied entspricht der Elementarverzerrung im Flächenmittelpunkt, das zweite bringt den Zuschlag für die endlich große Fläche. Es dient als Kriterium für die Verzerrungsbestimmung der Restflächen, wie groß diese sein dürfen bei gegebenem X_c , um mit dem 1. Glied mit genügender Genauigkeit rechnen zu können.

Führt man bei den beiden Gliedern 6. Ordnung in Gleichung (1) die Koordinatenflächen F_c ein, so entsteht damit eine um 5 Glieder vergrößerte Rechenformel, weshalb die obige Schreibweise vorzuziehen ist. Immerhin dient diese Einführung zur Abklärung der Vorzeichen. Alle 7 Glieder sind positiv und von der 4. Ordnung. Für die X_c , Y_c und die Koordinatendifferenzen kommen nur gerade Potenzen vor. Die Koordinatenreihenfolge und die Lage der Mittelkoordinaten hat also keinen Vorzeicheneinfluß, die Vorzeichen in Gleichung (1) gelten für die Glieder höherer Ordnung als absolut.

Zahlenbeispiele zur Verzerrungsberechnung in der Kugelprojektion

a) Flächenverzerrung von Blatt 42, Oberwallis, 1: 100 000, nach Gleichung (1)

Ausgangswerte		Logarithmische Rechnung	
$X_2 - 42 \text{ km}$	$X_2^3 - 74088 \text{ km}^3$	$C_1 \ 2,23532_n$	$C_3 \ 7,6841$
$X_1 - 90 \text{ km}$	$X_1^3 - 729000 \text{ km}^3$	$X_c^3 \ 5,45862_n$	$X_2^3 - X_1^3 \ 5,8169$
$X_2 - X_1 + 48 \text{ km}$	$X_2^3 - X_1^3 + 655912 \text{ km}^3$	$F_c \ 3,52634$	$Y_2^3 - Y_1^3 \ 5,8570$
$Y_2 + 90 \text{ km}$	$Y_2^3 + 729000 \text{ km}^3$	I $1,22028$	III $9,3562$
$Y_1 + 20 \text{ km}$	$Y_1^3 + 8000 \text{ km}^3$	$C_2 \ 1,63326_n$	$C_4 \ 7,0912$
$Y_2 - Y_1 + 70 \text{ km}$	$Y_2^3 - Y_1^3 + 721000 \text{ km}^3$	$X_c \ 1,81954_n$	$X_2^5 - X_1^5 \ 9,7689$
$X_2 + X_1 - 132 \text{ km}$	$F_c = (Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1)$	$(X_2 - X_1)^2 \ 3,36248$	$Y_2 - Y_1 \ 1,8451$
$X_c - 66 \text{ km}$	$F_c = 3360 \text{ km}^2$	$F_c \ 3,52634$	IV $8,7052$
$\lg X_2^5 \ 8,11625_n$	$X_2^5 - 1,307 \cdot 10^8$	II $0,34162$	I $+16,6 \text{ m}^2$
$\lg X_1^5 \ 9,77120_n$	$X_1^5 - 59,047 \cdot 10^8$		II $+ 2,2 \text{ m}^2$
	$X_2^5 - X_1^5 + 58,740 \cdot 10^8$		III $+ 0,2 \text{ m}^2$
			IV $+ 0,1 \text{ m}^2$
		Flächenverzerrung $\Delta_s F_c \ +19,1 \text{ m}^2$	

So klein auch die Verzerrung dieses Blattes ist, sind es immerhin $+19,1 \text{ m}^2$. Das südlicher gelegene Blatt 48, Sotto Ceneri, der Karte 1: 100000 zeigt bereits eine Verzerrung von $+44,5 \text{ m}^2$ in der Kugelprojektion.

b) Flächenverzerrung des Kantons Zürich in der Kugelprojektion

Während zum Bestimmen der Flächenverzerrung in der Zylinderprojektion die Fläche des Kantons Zürich in 44 Koordinatenfelder und 140 Restflächen aufgeteilt wurde, genügt zur Verzerrungsbestimmung in

der Kugelprojektion ein einziges Koordinatenfeld mit 6 Restflächen, wie es in Figur 4 dargestellt ist. Die Verzerrung dieses Feldes und der Restflächen wurde nach Formel (2) mit dem Rechenschieber bestimmt. Die einzelnen Resultate sind in Figur 4 eingetragen und zeigen in ihrer Summe von $-4,7 \text{ m}^2$, wie klein die Kugelverzerrung ist. Sie kann bei Angaben der Statistik, die mit Aren rechnet, ohne weiteres vernachlässigt werden.

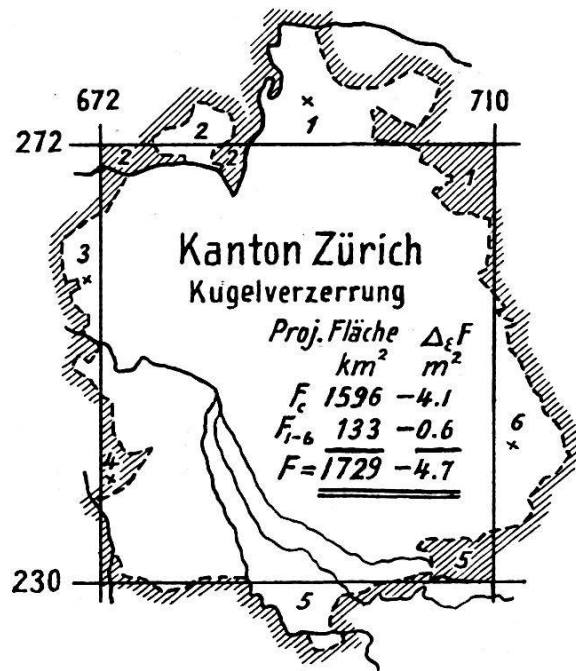


Fig. 4. Bestimmen der Flächenverzerrung bei der Kugelprojektion

Dies um so eher, als die aus Gemeindevermessungen hervorgehende Flächenbestimmung des Kantons einen viel größeren Fehler¹ aufweist. Für Gemeindeareale kommt die Verzerrung der Kugelprojektion nicht mehr zur Geltung.

(Fortsetzung und Schluß folgt.)

¹ Nach Prof. S. Bertschmann in Zeitschrift für Vermessungswesen, 1935.