Convocation à la
62e Assemblée générale de la SSMAF

Samedi 8 mai 1965, à Zurich

Zunfthaus zur Zimmerleuten, Limmatquai 40

Programme

12.15 Apéritif offert par la section de Zurich/Schaffhouse, au Restaurant «Zunfthaus zur Zimmerleuten».

12.45 Lunch pour les membres qui se sont annoncés.

14.15 62e Assemblée générale de la SSMAF.
L'ordre du jour sera publié dans la revue du mois d'avril.

La section de Zurich/Schaffhouse se réjouit d'accueillir les collègues de la SSMAF à Zurich. Les membres qui désirent prendre part au lunch en commun sont priés de bien vouloir s'annoncer jusqu'au 5 mai 1965 au moyen de la carte incluse.

L'assemblée du Groupe patronal aura lieu le 8 mai 1965 à 10 h. 15 au même local.

Section de Zurich/Schaffhouse SSMAF

Application d'une méthode de Tchebicheff pour le calcul du géoïde

Par A. Ansermet

Résumé

La détermination du geoïde est un problème actuel; grâce aux publications sous chiffres [2] et [3] de grands progrès furent réalisés au cours de ces dernières années. Le géoïde est obtenu en fonction des déviations de la verticale; lors de nivellements trigonométriques, effectués surtout en montagne, ces déviations sont introduites comme nouvelles inconnues dans les équations aux erreurs. Aux altitudes plus basses (1000–1500 m), on peut envisager des cheminements à côtés suffisamment courts à cause de la réfraction et éventuellement des visées simultanées. Les praticiens sont parfois dans l'embarras; ils doivent choisir entre un calcul semi-graphique et une solution analytique (Bessel, etc.) assez laborieuse. La méthode de Tchebicheff constitue une solution intermédiaire souvent bienvenue; pour l'inconnue A_0 on calcule comme Bessel en formant une équation normale $[v] = 0$.

Zusammenfassung

Die Bestimmung des Geoides gehört zu den aktuellen Problemen. Dank den unter [2] und [3] aufgeführten Publikationen wurden in den letzten Jahren große Fortschritte erzielt. Man erhält das Geoid als Funktion der Lotabweichungen, indem hauptsächlich im Hochgebirge beim trigonometrischen Nivellement diese Abweichungen als Unbekannte in die Fehlergleichungen eingeführt werden. Bei geringeren Meereshöhen zwischen 1000 und 1500 m wird man wegen der Refraktion Polygonzüge mit kurzen Seiten und mit gleichzeitig und gegenseitig beobachteten Höhenwinkeln anwenden. Bei der praktischen Berechnung kann man sich fragen, ob man eine halbgraphische Lösung oder eine rechnerische Lösung nach Bessel, die jedoch viel Arbeit verursacht, anwenden will. Die Methode von Tschebischeff bildet eine oft willkommene Zwischenlösung. Für die Unbekannten A_0 rechnet man nach Bessel, indem man eine Normalgleichung $[v] = 0$ bildet.

Dans tous les domaines des sciences appliquées on doit déterminer des fonctions qui ne résultent pas de lois mathématiques rigoureuses. Planimétriquement ou spatialement on a des groupes de points devant se trouver sur une courbe ou une surface définies par une équation à deux ou trois variables; ce n'est pas exactement réalisable. Ce problème se présente lors de la détermination du géoïde; dans de récentes et magistrales publications il fut traité sous tous ses aspects (voir [2], [3]).

Le but de ces lignes est d'apporter une modeste contribution à la solution du problème en corrélation avec un article paru il y a quelques mois (voir [4]).

Les fluctuations du géoïde sont obtenues en fonction des déviations de la verticale; actuellement, surtout en haute montagne, on a recours à des nivellements trigonométriques précis, et les résultats réalisés sont réjouissants de façon générale. Le nombre d'inconnues, dans un réseau altimétrique, augmente alors fortement. Dans des régions accidentées, sans être vraiment montagneuses, les longueurs des visées seront plus courtes; la réciprocité et la simultanéité des visées sont parfois désirables. Des cheminements à peu près rectilignes et à côtés de longueurs presque égales constituent une bonne solution. Les composantes des déviations, normales au cheminement, n'interviennent en général pas d'où moins d'inconnues.

La surface de référence, pour le calcul du géoïde, est le sphéroïde terrestre donc une surface bien définie. Un cas simple, mais intéressant, est celui où le cheminement est contenu à peu près dans un plan méridien; un côté de longueur D, de distance zénithale z donne lieu, d'une extrémité du côté à l'autre, à une variation d'ordonnée exprimée par:

$$\frac{D}{2 \sin^2 z} (\xi + \xi'), \qquad ([3], \text{p.} 81) \tag{1}$$

ξ et ξ' étant les déviations de la verticale aux extrémités du côté (composantes dans le plan méridien exprimées en mesure circulaire). Si $\xi =$

$-\xi'$ donc $(\xi + \xi') = 0$, il y a parallélisme entre l'élément de géoïde de longueur D avec l'arc correspondant de la surface de référence.

Une solution semi-graphique peut donc être envisagée ([3], p. 95); les valeurs D et z seront en général arrondies. Les fluctuations ou ondulations du géoïde ont un ordre de grandeur d'une vingtaine de centimètres par cheminement.

Solutions analytiques. Il y a les formes algébrique et transcendante (voir [3]). Pour cette dernière, qui est surtout appliquée en pratique, on a le développement:

$$\begin{aligned} S(x) = y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

On peut concevoir plusieurs cheminements pour déterminer le géoïde dans un territoire donné; si $y \cong$ const., valeur commune pour l'ensemble des cheminements, c'est que le géoïde est presque parallèle à la surface de référence dans les limites du territoire. Le cheminement par le méridien du St-Gothard donna lieu à un calcul basé sur les séries (2) arrêtées aux termes en $4x$ (voir [2], [3]). Une solution provisoire fournit le système:

$$\begin{aligned} -f + v = dA_0 + dA_1 \cos x + dA_2 \cos 2x + \ldots \\ + dB_1 \sin x + dB_2 \sin 2x + \ldots \quad [pvv] = \text{minimum} \end{aligned} \tag{3}$$

les inconnues étant des corrections à faire subir à des valeurs provisoires, tandis que les f sont les termes absolus. Les calculs peuvent être laborieux. On admet en général l'égalité des poids; toutefois si certains cheminements donnent lieu à des visées simultanées, il en résulte une amélioration pour les poids. Si, pour les côtés, on a $D \cong$ const., la solution de Bessel est appliquée (voir [4]); les matrices des coefficients des équations normales sont diagonales ainsi que leurs inverses. Ainsi que Helmert l'a signalé (*Ausgleichungsrechnung*, p. 411): «Au point de vue strict, les équations ne fournissent pas les A et B eux-mêmes mais des agrégats de termes en nombre infini.»

Facteur de conversion k: Il permet de convertir les valeurs angulaires en linéaires et réciproquement; par exemple: $k = [D] : 2\pi$

Méthode de Tchebicheff: Elle constitue une solution intermédiaire entre le procédé semi-graphique et les formules de Bessel; on y aura recours si le système (2) comprend un nombre élevé d'équations. La période sera 2π; c'est un calcul approché (voir [4]). Il y aura 7 ou 9 inconnues selon qu'on s'arrête aux termes en $3x$ ou $4x$. Tchebicheff fractionne la période 2π en ν parties égales, ce ν étant un nombre entier qui est provisoirement arbitraire; auparavant il calcule le terme A_0, comme Bessel, en formant une moyenne arithmétique des y, car la première équation normale permet d'éliminer toutes les inconnues sauf A_0 (élimination d'après Gauss).

Le fractionnement en ν parties correspond à l'équidistance $(2\pi/\nu)$ et aux valeurs:

$$x_1,\ x_1 + (2\pi/\nu),\ x_1 + 2\cdot 2\pi/\nu \ldots x_1 + (\nu - 1)\, 2\pi/\nu \qquad \text{(voir [4], [5])}$$

Ici on aura $\nu \leq 3$ en s'en tenant aux termes en $3x$; il reste 6 inconnues à déterminer dans l'hypothèse où le système (2) comporte 24 équations:

	x	$\cos 3x$	$\sin 3x$		x	$\cos 3x$	$\sin 3x$
1	0	+1,00	0,00	13	180	−1,00	0,00
2	15°	+0,707	+0,707	14	195	−0,707	−0,707
3	30°	0,00	+1,00	15	210	0,00	−1,00
4	45	−0,707	+0,707	16	225	+0,707	−0,707
5	60	−1,00	0,00	17	240	+1,00	0,00
6	75	−0,707	−0,707	18	255	+0,707	+0,707
7	90	0,00	−1,00	19	270	0,00	+1,00
8	105	+0,707	−0,707	20	285	−0,707	+0,707
9	120	+1,00	0,00	21	300	−1,00	0,00
10	135	+0,707	+0,707	22	315	−0,707	−0,707
11	150	0,00	+1,00	23	330	0,00	−1,00
12	165	−0,707	+0,707	24	345	+0,707	−0,707

L'examen du tableau permet d'écrire:

$$\nu = 3 \begin{cases} y_0 - y_{60} + y_{120} - y_{180} + y_{240} - y_{300} \cong 6\, A_3 \\ y_{30} - y_{90} + y_{150} - y_{210} + y_{270} - y_{330} \cong 6\, B_3 \end{cases}$$

et de même (voir [4]):

$$\nu = 2 \begin{cases} y_0 - y_{90} + y_{180} - y_{270} \cong 4\, A_2 \\ y_{45} - y_{135} + y_{225} - y_{315} \cong 6\, B_2 \end{cases}$$

$$\nu = 1 \quad y_0 - y_{180} \cong 2\,(A_1 + A_3);\ y_{90} - y_{270} \cong 2\,(B_1 - B_3) \tag{5}$$

la forme générale étant:

$$A_\nu + A_{3\nu} + A_{5\nu} + A_{7\nu} + \ldots \cong \frac{1}{2\nu}\left[y(0) - y\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \right.$$
$$\left. + y\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{\nu}\right) + \ldots - y\left((2\nu - 1)\frac{\pi}{\nu}\right)\right]$$
$$B_\nu - B_{3\nu} + B_{5\nu} - B_{7\nu} + \ldots \cong \frac{1}{2\nu}\left[y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2\nu}\right) + \right.$$
$$\left. + y\left(\frac{5\pi}{2\nu}\right) \ldots - y\left((4\nu - 1)\frac{\pi}{2\nu}\right)\right] \tag{6}$$

Pour les A et les B il n'y a que des indices multiples impairs de ν. Si $\nu = 1$, on considère comme valables les indices ν et 3ν; si $\nu = 2$ ou 3, on fait abstraction des valeurs $3\nu = 6$, $3\nu = 9$, et ainsi de suite. La solution de Bessel est bien moins simple.

La méthode de Tchebicheff présente de l'intérêt pour les géodésiens qui hésitent entre les solutions semi-graphique et de Fourier ou Bessel.

Littérature:

[1] *J. E. Alberda,* Vertical Angles Deviations of the Vertical and Adjustment (Delft 1961).

[2] *F. Kobold* und *N. Wunderlin,* Die Bestimmung von Lotabweichungen und Meereshöhen ... (Commission géodésique suisse, 1963).

[3] *P. Gleinsvik,* Studien über die Ermittlung von Geoidform ... (Promotionsarbeit ETH, 1960).

[4] *A. Ansermet,* Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1963, N° 3).

[5] *Fréchet* et *Romann,* Représentation de lois empiriques (Eyrolles, Paris).

Zum Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate

Von Prof. Dr. techn. Paul Gleinsvik, Vollebekk (Norwegen)

Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit dem inneren Wesen der Methode der kleinsten Quadrate. Zwischen den ausgeglichenen Ergebnissen einerseits und den korrespondierenden unausgeglichenen Werten andererseits werden überraschend einfache Beziehungen nachgewiesen. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Ergebnisse einer strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate sowohl zahlenmäßig als auch genauigkeitsmäßig identisch sind mit den gewogenen Mitteln aller möglichen Partialwerte, die sich aus dem Beobachtungsmaterial ohne Ausgleichung ableiten lassen.

Résumé

Le présent article traite du caractère interne de la méthode des moindres carrés. Il est ici démontré une relation étonnamment simple entre les valeurs compensées d'une part et les résultats non compensés correspondants d'autre part. Il se trouve en effet que les résultats d'une compensation par la méthode des moindres carrés, aussi bien en ce qui concerne la grandeur qu'en ce qui concerne la précision, coïncident avec les moyennes arithmétiques générales de toutes les valeurs correpondantes possibles qu'on peut dériver des résultats d'observation sans compensation.

1. Die mittelbildende Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate

1.1. Die ausgeglichenen Werte für die Größen eines Größenkomplexes

Die Untersuchung gestaltet sich am einfachsten, wenn ihr die vermittelnde Ausgleichung zugrunde gelegt wird. Der Einfachheit halber begrenzen wir uns dabei auf $n = 3$ Fehlergleichungen und $u = 2$ Unbekannte:

$$\begin{array}{lc} & \text{Gewicht} \\ v_1 = a_1 x + b_1 y + f_1 & p_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + f_2 & p_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + f_3 & p_3 \end{array} \qquad (1)$$