A propos de la forme des ellipses et ellipsoïdes d'erreur

A propos de la forme des ellipses et ellipsoïdes d'erreur

par A. Ansermet

Résumé

Le problème traité ici a fait déjà l'objet de publications nombreuses pour les réseaux à deux dimensions; spatialement c'est moins le cas, mais les progrès réalisés en aérotrilatération notamment confèrent un caractère d'actualité à ces recherches. En outre une nouvelle théorie des déformations des systèmes articulés hyperstatiques donne lieu à des calculs analogues; c'est ce que certains ont exprimé outre-Rhin par le slogan: «Die Analogie zwischen den Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt.» De plus, en statique, les poids ont des valeurs bien définies en fonction de la nature des barres et de leurs dimensions; ce n'est pas toujours le cas dans les réseaux. L'application de la méthode des moindres carrés peut donc rendre de grands services surtout si le nombre de barres surabondantes est élevé. On voit que le calcul d'une paire de sphères d'erreur ou de déformation n'est pas difficile; au-delà c'est plus laborieux. Une remarque s'impose: pour les besoins de la pratique il n'est pas nécessaire que les formes circulaire, respectivement sphérique, soient rigoureusement réalisées. Dans tous ces calculs il faut choisir avec soin les axes de coordonnées. Il faut de plus constater que la solution dite provisoire est arbitraire; au point de vue théorique c'est essentiel. Il en est de même en statique pour l'état fondamental («Grundsystem»).

Zusammenfassung

Das hier behandelte Problem bildete schon Gegenstand zahlreicher Publikationen, soweit es sich um zweidimensionale Netze handelt, jedoch nicht für Raumnetze. Doch geben die in der Aerotriangulation realisierten Fortschritte derartigen Studien Aktualität. Außerdem gibt eine neue Theorie über die Verformungen von statisch unbestimmten Systemen Anlaß zu analogen Berechnungen, was jenseits des Rheins etwa im Slogan ausgedrückt wird «Die Analogie zwischen den Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt». In der Statik haben die Gewichte einwandfrei definierte Werte als Funktionen der Natur der Stäbe und ihrer Dimensionen, was in Netzen nicht immer der Fall ist. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate kann daher gute Dienste leisten, namentlich dann, wenn die Anzahl der überschüssigen Stäbe hoch ist. Man sieht, daß die Berechnung eines Paares von Fehlerkugeln oder von Deformationen nicht schwierig ist, doch erfordert sie mehr Aufwand. Eine Bemerkung drängt sich auf: für die Zwecke der Praxis ist es nicht nötig, daß Kreisformen, bzw. Kugelformen streng realisiert werden. In allen Berechnungen muß sorgfältig die Lage der Koordinatenachsen ausgewählt werden. Zudem muß festgestellt werden, daß die sogenannte provisorische Lösung willkürlich ist, was vom theoretischen Standpunkt aus wesentlich sein dürfte. Gleich verhält es sich in der Statik für das Grundsystem.

Lors du calcul de réseaux géodésiques les praticiens s'efforcent de réaliser une forme circulaire pour ces ellipses qu'il s'agisse de triangulation ou de trilatération; quand les points nouveaux constituent un groupe et sont mutuellement solidaires, le problème est assez complexe. Pour des points isolés ou des paires une solution est assez facile à trouver sur la base de nombreuses publications déjà existantes (voir [3]). Spatialement le problème devient actuel après avoir longtemps présenté un intérêt plutôt didactique cela pour deux raisons de nature fort différentes:

1° Le développement de la trilatération (radio-électrotélémétrie).

2° Les nouvelles théories des systèmes hyperstatiques articulés; au lieu d'erreurs on a des déformations et les nœuds jouent le même rôle que les sommets du réseau géodésique. La condition $[pvv]$ = minimum exprime qu'un travail de déformation est minimum; les poids p ne donnent pas lieu à des controverses comme en trilatération. Ils sont proportionnels à trois éléments: le module d'élasticité, la section transversale de la barre et l'inverse de la longueur de la barre. Si les deux premiers éléments sont constants, l'analogie avec la trilatération est plus frappante, et K. Friedrich (voir [2]) s'est exprimé comme suit: «Im n-dimensionalen Raum stimmen der einknotige, statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Bogenschnitt völlig überein.»

Avant de poursuivre une remarque essentielle s'impose: en géodésie et en statique on ne recherche pas des formes rigoureusement circulaires ou sphériques; on peut donc s'écarter un peu des valeurs numériques ci-après.

Les conditions à réaliser sont donc les suivantes:

Pour un point nouveau isolé la matrice des coefficients des équations normales et son inverse, celle aux coefficients de poids, seront diagonales; les éléments diagonaux seront égaux. On calcule par les variations des coordonnées et, spatialement, pour la trilatération, on a pour $i = 1, 2, 3 \ldots$:

$$-f_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz \quad (\text{poids } p_i;\ a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1) \qquad (1)$$

f_i étant le terme absolu. Pour une paire de points nouveaux, c'est moins simple car, dans les matrices, il y a au moins un élément non diagonal.

Théoriquement, en faisant varier les poids, il y a en général une infinité de solutions; voici un petit nombre de cas concrets:

Premier exemple; point nouveau triangulé.

$i=$	a_i	b_i	p_i	Z_i	D_i^{cm}	k_i		k_i	(variante)
1	+0,60	+0,80	1,1		ϱ	1	Coefficients directeurs:	1,25	$\frac{0{,}60}{1{,}25} = 0{,}48$
2	+0,80	−0,60	1,1		ϱ	1	$\varrho \cdot \frac{\sin Z}{D}; \frac{\varrho \cos Z}{D}$	1,25	$\frac{0{,}80}{1{,}25} = 0{,}64$
3	+0,174	+0,985	1	10°	ϱ	1		1	Les poids p_i
4	+0,766	−0,643	1	130°	ϱ	1	valeurs absolues	1	sont inchangés
5	−0,940	−0,342	1	250°	ϱ	1	$D_i^{cm} = k_i \cdot \varrho$	1	
6	+0,707	+0,707	0,9		ϱ	1		0,8	0,707/0,8 = 0,884
7	+0,707	−0,707	0,9		ϱ	1	$\varrho = 636620$	0,8	

Par hypothèse les visées 3, 4, 5 sont intérieures; les coefficients sont déjà réduits.

Pour les matrices mutuellement réciproques on obtient:

$$\begin{bmatrix} 3{,}50 & 0 \\ 0 & 3{,}50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}286 & 0 \\ 0 & 0{,}286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix};$$

Et pour la variante:

$$\begin{bmatrix} 3{,}61 & 0 \\ 0 & 3{,}61 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}277 & 0 \\ 0 & 0{,}277 \end{bmatrix}$$

On pourrait multiplier les exemples. Quant à l'erreur moyenne quadratique relative à l'unité de poids, elle s'obtient par: $m_0^2 \cong [pvv]:s$ (s mesures surabondantes). Provisoirement on peut poser $m_0^2 = 1$.

Second exemple. Paire de points A, B nouveaux (radiotélémétrie). Les équations initiales sont connues:

$$-f_i + v_i = a_i\, dx_A + b_i\, dy_A + c_i\, dx_B + d_i \cdot dy_B \quad (\text{poids } p_i) \qquad (2)$$

$i =$	a_i	b_i	c_i	d_i	p_i	$^1/P_i$	P_i poids a posteriori
1	+0,624	+0,781	0	0	1	0,82	Axe des x parallèle à AB
2	+0,624	−0,781	0	0	1	0,82	
(AB) 3	+1	0	−1	0	1	0,72	=0,82+0,82−2×0,46
4	0	0	−0,624	−0,781	1	0,82	$[p:P] = 4$ (4 inconnues)
5	0	0	−0,624	+0,781	1	0,82	Le poids de AB est le plus amplifié

Les matrices symétriques mutuellement réciproques sont:

$1{,}78\, Q_{11} - Q_{13} = 1$
$-Q_{11} + 1{,}78\, Q_{13} = 0$
(voir [1])
$1{,}22\, Q_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1{,}78 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1{,}22 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1{,}78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}22 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0{,}82 & 0 & +0{,}46 & 0 \\ 0 & 0{,}82 & 0 & 0 \\ +0{,}46 & 0 & 0{,}82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}82 \end{bmatrix} = \begin{matrix} Q_{11} = Q_{22} = \\ Q_{33} = Q_{44} \\ Q_{13} = +0{,}46 \end{matrix}$$

Par voie électronique l'inversion de matrices est particulièrement rapide surtout en cas de symétrie par rapport à la diagonale.

Réseaux trilatérés à trois dimensions. Dans le plan le cas le plus simple est celui où le point nouveau coïncide avec le centre de gravité d'un polygone régulier; les points fixes donnés sont les sommets du polygone et les poids sont égaux. Spatialement ces points fixes A, B, C ... déterminent la base d'une pyramide régulière dont le sommet S est le point nouveau; les arêtes SA, SB, SC ... sont mesurées. La forme sphérique de l'ellipsoïde dépend des valeurs $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$ puisque $p_i = 1$ [équation (1)]. La matrice des coefficients des équations normales sera diagonale et $[aa] = [bb] = [cc] = \Sigma$, par exemple:

$i =$	a_i	b_i	c_i	p_i
1	+0,816	0	+0,577	1
2	0	+0,816	+0,577	1
3	−0,816	0	+0,577	1
4	0	−0,816	+0,577	1

A priori on a: $\Sigma = {}^4/_3 = 1{,}33 = \frac{1}{0{,}75}$
Le rayon de la sphère est:
$m_0 \sqrt{0{,}75} = m_0 \cdot 0{,}87$

Considérons maintenant des cas moins simples basés toujours sur l'équation (1):

$i=$	a_i	b_i	c_i	p_i
1	+0,707	−0,408	+0,577	1
2	0	+0,816	+0,577	1
3	−0,707	−0,408	+0,577	1
4	−0,408	+0,707	+0,577	1,2
5	+0,816	0	+0,577	1,2
6	−0,408	−0,707	+0,577	1,2

Les matrices réciproques sont manifestement diagonales:

$$[paa] = [pbb] = [pcc] = 2{,}2 = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{Q_{33}}$$

Il faut choisir judicieusement les axes de coordonnées

L'exemple ci-après est aussi de caractère plutôt didactique:

$i=$	a_i	b_i	c_i	p_i	p_i/P_i
1	+0,490	+0,653	+0,577	0,75	0,340
2	+0,653	−0,490	+0,577	0,75	0,340
3	−0,490	−0,653	+0,577	0,75	0,340
4	−0,653	+0,490	+0,577	0,75	0,340
5	±1	0	0	1,2	0,545
6	0	±1	0	1,2	0,545
7	0	0	±1	1,2	0,545

Les matrices sont encore diagonales:

$[paa] = [pbb] = [pcc] = 2{,}2 = {}^1/_{0{,}455}$

$[p:P] = 3{,}00$ (3 inconnues)

$m_0^2 \cong [pvv]:4$

Il y a équivalence, pour le poids des inconnues, avec le cas précédent

Rayon sphère $= m_0 \sqrt{0{,}455} = m_0 \cdot 0{,}675$.

Ici encore on pourrait multiplier les exemples.

Le problème de la paire de points A et B

L'équation initiale est connue:

$$-f_i + v_i = a_i\,dx_A + b_i\,dy_A + c_i\,dz_A + a_i'\,dx_B + b_i'\,dy_B + c_i'\,dz_B \;(\text{poids } p_i) \quad (3)$$

La forme sphérique est moins facile à trouver; considérons un cas concret:

	$i=$	a_i	b_i	c_i	a_i'	b_i'	c_i'	p_i	$1:P_i$
	1	+0,5	+0,866	0				1	⅔
	2	+0,5	−0,866	0				1	⅔
	3	+0,5	0	+0,866				1	⅔
	4	+0,5	0	−0,866				1	⅔
(AB)	5	+1	0	0	−1	0	0	1	⅔
	6				−0,5	−0,866	0	1	⅔
	7				−0,5	+0,866	0	1	⅔
	8				−0,5	0	−0,866	1	⅔
	9				−0,5	0	+0,866	1	⅔

Axe des x paralléle à AB

$m_0^2 \cong [pvv]:3$

$= ⅔ + ⅔ - 2 \cdot ⅓$

$[p:P] = 6$

Matrices réciproques (symétriques):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 1{,}5 & 0 \\ & & & & & 1{,}5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2Q_{11} - Q_{14} = 1 \\ -Q_{11} + 2Q_{14} = 0 \\ \text{(voir [1])} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ⅔ & 0 & 0 & +⅓ & 0 & 0 \\ & ⅔ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & ⅔ & 0 & 0 & 0 \\ & & & ⅔ & 0 & 0 \\ & & & & ⅔ & 0 \\ & & & & & ⅔ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\cdots \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23}\cdots \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}\cdots \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43}\cdots \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53}\cdots \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63}\cdots \end{bmatrix}$$

Ce problème présente de l'intérêt en trilatération, aérotriangulation et en hyperstatique des systèmes articulés (sommets de pylônes par exemple).

Littérature

[1] *Baeschlin,* Ausgleichungsrechnung (Cours ETH).

[2] *K. Friedrich,* Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1943).

[3] *A. Ansermet,* Calcul d'une paire d'ellipses d'erreur (Festschrift C. F. Baeschlin, 1951).