# Die Bestimmung der Lotkrümmung in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden

Autor(en): **Koch, K.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 10

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-220014

# Die Bestimmung der Lotkrümmung in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden

*Von K. R. Koch, Bonn*

*Zusammenfassung*

Die Lotkrümmung wird nach denjenigen Teilen getrennt bestimmt, die sich hypothesenfrei und die sich nur unter Annahme von Hypothesen ermitteln lassen. Benutzt wird die Hypothese der Isostasie. Wie eine Beispielsrechnung zeigt, kann in nahezu ebenem Gelände der Anteil an der Lotkrümmung, der sich aus der Isostasiehypothese ergibt, vernachlässigt werden.

*Résumé*

Pour déterminer la courbure de la verticale, nous séparons les éléments qui se laissent calculer sans hypothèses des éléments dont le calcul exige l'introduction des suppositions hypothétiques. On se sert de l'hypothèse de l'isostasie. Un exemple montre qu'on peut négliger dans un terrain presque horizontal l'élément de la courbure de la verticale, qui résulte de l'hypothèse de l'isostasie.

---

Bezeichnet $x$ die Nord- und $y$ die Ostrichtung, so ergeben sich für einen Punkt $P$ an der Erdoberfläche die Komponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ der Lotkrümmung zu (vgl. [3], S. 9):

$$\tau_x = -\frac{\varrho''}{g_m}\int_0^{H_P}\frac{dg_Q}{dx}\,dh,\quad \tau_y = -\frac{\varrho''}{g_m}\int_0^{H_P}\frac{dg_Q}{dy}\,dh \tag{1}$$

$\varrho''$ 206 265

$g_m$ Mittelwert der Schwere ($\approx$ 979,8 Gal)

$g_Q$ Schwere in einem Punkt $Q$ auf der Lotlinie von $P$

$H_P$ Höhe des Punktes $P$ über dem Geoid

$dh$ Streckenelement der Lotlinie durch $P$; $dh \perp dx$, $dh \perp dy$ in $P$

Zweckmäßig bestimmt man die Lotkrümmung nach denjenigen Teilen getrennt, die sich hypothesenfrei und die sich nur unter Annahme von Hypothesen ermitteln lassen. Dies ist besonders in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden günstig, wo man annehmen kann, daß sich der aus Schweremessungen an der Erdoberfläche hypothesenfrei zu bestimmende Horizontalgradient $dg_P/dx$ beziehungsweise $dg_P/dy$ in $P$ nur wenig vom Horizontalgradienten $dg_Q/dx$ beziehungsweise $dg_Q/dy$ unterscheidet, der nur auf Grund von Hypothesen zu ermitteln ist.

In (1) soll zunächst der Anteil der Normalschwere an der Lotkrümmung eliminiert werden. Bekanntlich gilt mit $a = -h$ an der Erdoberfläche die Randbedingung:

$$\Delta g_F = \frac{dT}{da} - \frac{2\,T}{R} \tag{2}$$

$\Delta g_F$ Freiluftanomalie
$T$ Störpotential
$R$ Mittlerer Erdradius

Mit $T = \gamma N$ folgt aus (2):

$$g_P = \gamma_P + \frac{dT}{da} \text{ mit } \gamma_P = \gamma - \frac{2\,\gamma}{R} N \tag{3}$$

$N$ Geoidundulation
$\gamma_P$ Normalschwere in $P$ (berechnet mit der Höhe $H_P + N$)
$\gamma$ Normalschwere im zugeordneten Punkt am Telluroid (berechnet mit der Höhe $H_P$)

Für den Punkt $Q$ kann eine der Gleichung (3) entsprechende Formel aufgestellt werden; man erhält dann anstelle von (1):

$$\tau_x = -\frac{\varrho''}{g_m}\int\limits_0^{H_P}\left(\frac{d\gamma_Q}{dx} + \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_Q}{dx}\right)dh \tag{4}$$

und $\tau_y$ entsprechend.

Bekanntlich gilt für die Lotkrümmung im normalen Schwerefeld:

$$\frac{\varrho''}{g_m}\int\limits_0^{H_P}\frac{d\gamma_Q}{dx}\,dh = 0{,}171''\,H_P \sin 2\,B, \int\limits_0^{H_P}\frac{d\gamma_Q}{dy}\,dh = 0\,, \tag{5}$$

wobei $H_P$ die Dimension km besitzt und $B$ die geographische Breite bedeutet.

Zur Berechnung des zweiten Gliedes rechter Hand von (4) benötigt man die Ableitungen des Störpotentials $T$ zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid. Diese können nur aus Hypothesen über den Aufbau der Erdrinde gewonnen werden. Im folgenden wird daher die Hypothese der Isostasie benutzt, wobei man annimmt, daß $T$ allein durch die topographischen, das heißt die über dem Geoid liegenden Massen und ihre isostatischen Kompensationsmassen verursacht wird.

Mit Hilfe von (3) sind aus den Schweremessungen an der Erdoberfläche die Ableitungen $d\left(\frac{\overline{dT}}{da}\right)_P/dx$ und $d\left(\frac{\overline{dT}}{da}\right)_P/dy$ in $P$ hypothesenfrei zu bestimmen, was durch die Querstriche angedeutet werden soll. Diese Werte werden dazu benutzt, die auf Grund der Isostasiehypothese berechneten $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dx$ und $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dy$ zu korrigieren. Man erhält in $Q$ den korrigierten Wert:

$$\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{QK}}{dx} = \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{Q}}{dx} - \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{P}}{dx} + \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{P}}{dx} \tag{6}$$

Aus (3) ergibt sich:

$$\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{P}}{dx} = \frac{d\,(\Delta g_F)}{dx} + \frac{2\,\gamma}{R}\,\frac{dN}{dx} \tag{7}$$

und die Ableitung nach $y$ entsprechend.

Der Einfluß des zweiten Gliedes rechter Hand von (7) auf die Lotkrümmung beträgt auch für extreme Verhältnisse ($\varrho'' dN/dx = 10''$, $H_P = 3$ km) weniger als $0{,}01''$. Die Geoidundulationen $N$ brauchen also für die Lotkrümmungsbestimmung nicht bekannt zu sein.

Mit (5) und (6) erhält man dann in (4):

$$\tau_x = -\,0{,}171''\,H_P \sin 2\,B - \varrho''\,\frac{H_P}{g_m}\,\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{P}}{dx} + G_x \tag{8}$$

mit

$$G_x = \frac{\varrho''}{g_m}\left(H_P\,\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{P}}{dx} - \int\limits_0^{H_P} \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{Q}}{dx}\,dh\right)$$

und $\tau_y$ entsprechend.

Verzichtet man auf die getrennte Bestimmung der normalen Lotkrümmung und denkt sich die Änderung von $dg_Q/dx$ und $dg_Q/dy$ im Verlauf der Lotlinie allein durch die topographischen Massen verursacht, ergeben sich anstelle von (8) die Glieder $A$ und $B$ der Lotkrümmungsberechnung nach *Arnold* (vgl. [3], S. 10).

Zur Ermittelung des Gliedes $G$ in (8) wird, wie bereits erwähnt, angenommen, daß $T$ allein durch die topographischen und ihre Kompensationsmassen hervorgerufen wird. $G$ wird durch Zerlegung der Massen in rechtwinkelig begrenzte Körper gewonnen, da für die numerischen Rechnungen ein Elektronenrechner zur Verfügung steht.

Bei einer Zerlegung der topographischen Massen in Quader ergibt sich der Einfluß $G_{x0}$ eines Quaders an $G_x$, wenn $P$ der Ursprung eines rechtwinkeligen $xyz$-Koordinatensystems ist (vgl. Abb. 1), zu:

$$G_{x0} = \frac{3\,\varrho''\,f\,\sigma}{g_m}\left(H_P \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{h}^{H_P} \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}} - \int\limits_0^{H_P}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{H_Q-H}^{H_Q} \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}}\,dh\right)$$

$f$ Gravitationskonstante ($= 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ cm$^3$/gsec$^2$)

$\sigma$ Dichte

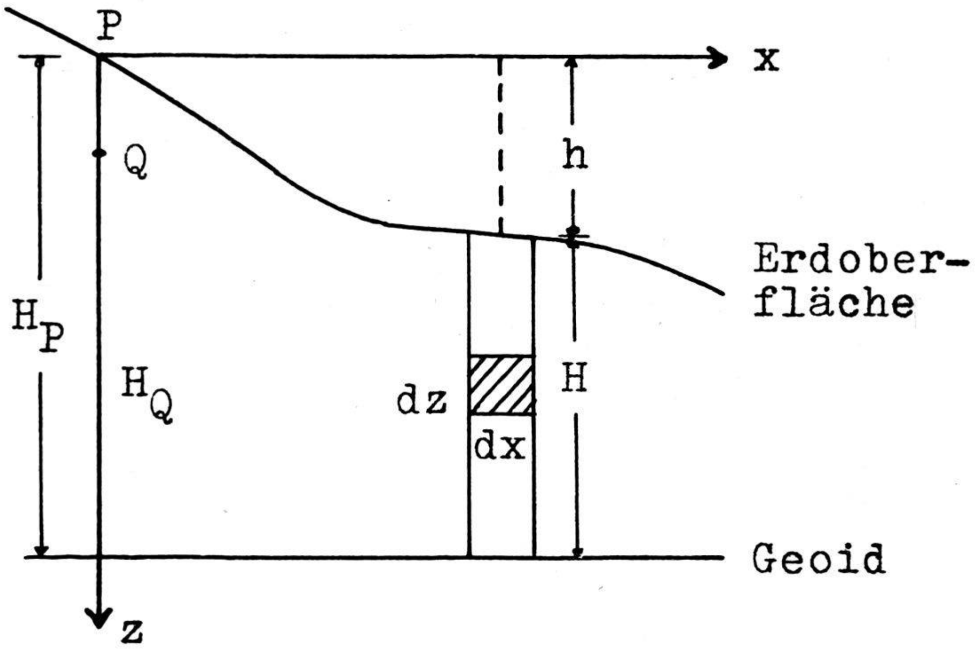


Abb. 1

$$G_{x0} = -\frac{\varrho'' f \sigma}{g_m}\Bigg[H \ln \left| \frac{y_2+\sqrt{x_1^2+y_2^2+H^2}}{y_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+H^2}} \cdot \frac{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+H^2}}{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+H^2}} \cdot \frac{y_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+h^2}}{y_2+\sqrt{x_1^2+y_2^2+h^2}} \cdot \frac{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+h^2}}{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+h^2}} \right|$$

$$+ y_2 \ln \left| \frac{h+\sqrt{x_1^2+y_2^2+h^2}}{h+\sqrt{x_2^2+y_2^2+h^2}} \cdot \frac{H+\sqrt{x_1^2+y_2^2+H^2}}{H+\sqrt{x_2^2+y_2^2+H^2}} \cdot \frac{H_P+\sqrt{x_2^2+y_2^2+H_P^2}}{H_P+\sqrt{x_1^2+y_2^2+H_P^2}} \cdot \frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_1^2+y_2^2}} \right|$$

$$+ y_1 \ln \left| \frac{h+\sqrt{x_2^2+y_1^2+h^2}}{h+\sqrt{x_1^2+y_1^2+h^2}} \cdot \frac{H+\sqrt{x_2^2+y_1^2+H^2}}{H+\sqrt{x_1^2+y_1^2+H^2}} \cdot \frac{H_P+\sqrt{x_1^2+y_1^2+H_P^2}}{H_P+\sqrt{x_2^2+y_1^2+H_P^2}} \cdot \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_1^2}} \right|$$

$$+ x_1 \Bigg( \arctan \frac{H y_1}{x_1\sqrt{x_1^2+y_1^2+H^2}} - \arctan \frac{H y_2}{x_1\sqrt{x_1^2+y_2^2+H^2}} + \arctan \frac{h y_1}{x_1\sqrt{x_1^2+y_1^2+h^2}}$$

$$- \arctan \frac{h y_2}{x_1\sqrt{x_1^2+y_2^2+h^2}} + \arctan \frac{H_P y_2}{x_1\sqrt{x_1^2+y_2^2+H_P^2}} - \arctan \frac{H_P y_1}{x_1\sqrt{x_1^2+y_1^2+H_P^2}} \Bigg)$$

$$+ x_2 \Bigg( \arctan \frac{H y_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+H^2}} - \arctan \frac{H y_1}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+H^2}} + \arctan \frac{h y_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+h^2}}$$

$$- \arctan \frac{h y_1}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+h^2}} + \arctan \frac{H_P y_1}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+H_P^2}} - \arctan \frac{H_P y_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+H_P^2}} \Bigg) \Bigg]$$

$G_{y0}$ ergibt sich entsprechend. (9)

Den Anteil der isostatischen Kompensationsmassen an $G$ erhält man, wenn in (9) die entsprechenden Werte für die Dichte und die Höhen eingesetzt werden.

*Beispielsberechnung:* Für einen Punkt $P$, der auf einer oberen Rheinterrasse in der Nähe Bonns gelegen ist, wurde das Glied $G$ nach (9) berechnet. Die Höhe $H_P$ beträgt 175 m. $P$ liegt auf einer Schrägebene mit einer Neigung von etwa 0,4%. Erst in einer Entfernung von etwa 2 km von $P$ treten größere Höhenunterschiede auf. Es ergab sich im isostatischen System nach Airy-Heiskanen mit einer Erdkrustendicke von 30 km

$$G_x = -0{,}024'' - 0{,}003'' = -0{,}027'',$$

$$G_y = -0{,}011'' \pm 0 = -0{,}011'',$$

wobei jeweils der erste Summand den Einfluß der topographischen Massen und der zweite Summand den Einfluß der isostatischen Kompensationsmassen angibt. Addiert man zum Beispiel zur Aufpunkthöhe $H_P$ und zu den Geländehöhen $H$ jeweils 0,8 km, erhält man:

$$G_x = -0{,}117'' - 0{,}015'' = -0{,}132''$$

$$G_y = -0{,}043'' + 0{,}015'' = -0{,}028''$$

Die für $G_x$ und $G_y$ ermittelten Beträge sind so gering, daß es sich für Gebiete mit geringen Höhenunterschieden empfiehlt, zur Lotkrümmungsbestimmung lediglich die hypothesenfrei zu ermittelnden Größen zu verwenden, und zwar den Horizontalgradienten an der Erdoberfläche und die Lotkrümmung im normalen Schwerefeld.

Die numerischen Rechnungen besorgte die IBM 7090 des Institutes für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn. Die Rechnungen wurden bis zu einer Entfernung von etwa 15 km vom Aufpunkt ausgedehnt; die weiter entfernt liegenden Massen konnten vernachlässigt werden. Die Quadergrundfläche beträgt in unmittelbarer Nähe des Aufpunktes $0{,}01 \times 0{,}01$ km²; sie wächst bis zu einer Entfernung von etwa 500 m vom Aufpunkt kontinuierlich auf $0{,}2 \times 0{,}2$ km² an und beträgt bei einer Entfernung von mehr als 2,3 km $1{,}0 \times 1{,}0$ km².

### *Literaturverzeichnis*


[1] *Embacher, W.:* Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg. Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 53. Jg., S. 1, Wien 1965.

[2] *Müller, P.:* Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerefeldes in der Erdkruste. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 62. Jg., S. 33, Winterthur 1964.

[3] *Schoeps, D.:* Die Bestimmung der Lotkrümmung. Veröff. Geod. Institut Potsdam, Nr. 22, Berlin 1963.

[4] *Kobold, F.; Hunziker, E.:* Communication sur la courbure de la verticale. Bulletin Géodésique, Nr. 65, S. 265, Paris 1962.