Über Gegenvertikalschnitte und geodätische Linie

Autor(en): **Nádeník, Zbynk**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 12

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-220021

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 · LXIII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Dezember 1965

Über Gegenvertikalschnitte und geodätische Linie

Von Zbyněk Nádeník, Prag

Zusammenfassung

Unter Benützung der Vektorrechnung werden lokal die geodätische Linie und die Gegennormalschnitte in der Umgebung ihres gemeinsamen Punktes untersucht, und man gelangt zu strengen Ergebnissen.

Résumé

On étudie localement la ligne géodésique et les sections normales réciproques dans le voisinage de leur point commun. On se sert du calcul vectoriel et on formule exactement les résultats.

Die Bedeutung des gegenseitigen Verlaufes der Gegenvertikalschnitte und der geodätischen Linie für die Probleme der höheren Geodäsie ist wohlbekannt. Im Zusammenhang mit dem hervorragenden ausgezeichneten Werke von *C. F. Baeschlin* [1], insbesondere mit § 23, in dem die Differenz des Azimutes des Vertikalschnittes und der geodätischen Linie behandelt wird, hat der Verfasser des vorliegenden Artikels einen Aufsatz [4] geschrieben, in dem er – absichtlich ohne Benutzung irgendwelches speziellen Apparates – den lokalen Verlauf der Gegenvertikalschnitte und der geodätischen Kurve in der Umgebung ihres gemeinsamen Punktes eingehend untersucht hat.

Im vorliegenden Artikel wollen wir einen wesentlichen Teil von [4] in einer verschiedenen, kurzen und übersichtlichen Form von breiterem Geltungsbereich ableiten. Wir gewinnen dabei auch die in der höheren Geodäsie außerordentlich wichtigen *Weingarten*schen Gleichungen der geodätischen Kurve.

Wegen seiner Einfachheit und Raschheit bildet das aufgeführte Verfahren ein kleines Beispiel dafür, daß eine engere Verbindung mit den neueren Methoden der Differentialgeometrie für die höhere Geodäsie von großem Nutzen ist.

Wir werden im folgenden die Vektorrechnung benutzen und nicht mit den partiellen Ableitungen, sondern mit den totalen Differentialen und mit den *Pfaff*schen Formen, das heißt mit den linearen Formen in den Differentialen der Veränderlichen, arbeiten. Es sei hervorgehoben, daß gerade *C. F. Baeschlin* für die Anwendung der Vektorrechnung in der höheren Geodäsie durch seine Bücher [1, 2] eine bahnbrechende Tat geleistet hat.

Wir denken uns eine genügend differenzierbare kreispunktfreie Fläche F mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ und ordnen jedem Punkte von F das orthogonale Dreibein $\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{N}$ aus den Einheitsvektoren der Hauptkrümmungsrichtungen und der Flächennormale zu. Dann ist

$$d\mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{t}_1 + \omega_2 \mathbf{t}_2 \,, \tag{1}$$

und wenn man die Vektoren $d\mathbf{t}_1$, $d\mathbf{t}_2$ und $d\mathbf{N}$ als die Linearkombinationen von $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ und $\mathbf{N}$ ausdrückt, so erhält man wegen $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$, $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{N} = 0$ die folgenden Grundformeln der Flächentheorie:

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}_1 &= \phantom{-\omega_{12}\mathbf{t}_1} \quad \omega_{12}\mathbf{t}_2 + \omega_{13}\mathbf{N}, \\ d\mathbf{t}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{t}_1 \phantom{-\omega_{23}\mathbf{t}_2} + \omega_{23}\mathbf{N}, \\ d\mathbf{N} &= -\omega_{13}\mathbf{t}_1 - \omega_{23}\mathbf{t}_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Alle ω bedeuten gewisse *Pfaff*sche Formen in u, v, und weil $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 0$ die Differentialgleichungen der Hauptkrümmungskurven sind, so folgt nach den Gleichungen von *Rodrigues* aus der dritten Gleichung von (2) und aus (1), daß

$$\omega_{13} = \frac{1}{R_1}\,\omega_1 \,, \; \omega_{23} = \frac{1}{R_2}\,\omega_2, \tag{3}$$

wo R_1 bzw. R_2 die Hauptkrümmung in der durch $\mathbf{t}_1$ bzw. $\mathbf{t}_2$ bestimmten Richtung bezeichnet.

In der Richtung des Vektors

$$\mathbf{t}_1 \cos A + \mathbf{t}_2 \sin A \tag{4}$$

ist gemäß (1)

$$\omega_1 = \omega \cos A, \; \omega_2 = \omega \sin A; \; \omega > 0; \tag{5}$$

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \omega; \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}_1 \cos A + \mathbf{t}_2 \sin A. \tag{7}$$

Weiter ergibt sich aus (7) mittels (2), (3), (5) und (6), daß

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\omega_{12} + dA}{\omega}\left(-\mathbf{t}_1 \sin A + \mathbf{t}_2 \cos A\right) + \frac{1}{R}\mathbf{N}, \tag{8}$$

wo $1/R$ die Normalkrümmung von F in der Richtung (4) ist; wir haben dabei freilich die Gleichung von *Euler* benutzt.

Soll die in der Richtung (4) ausgehende Kurve eine Geodätische sein, so müssen die Vektoren (7), (8) und $\mathbf{N}$ komplanar sein, und daraus ergibt sich

$$\omega_{12} + dA = 0 \tag{9}$$

als die Differentialgleichung der geodätischen Linie in der Richtung (4).

Bei (9) folgt aus (8) nach dritter Gleichung (2) und (3), (5) und (6), daß

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = -\frac{\cos A}{RR_1}\mathbf{t}_1 - \frac{\sin A}{RR_2}\mathbf{t}_2 - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\mathbf{N}. \tag{10}$$

Die Parameterdarstellung – in bezug auf das Dreibein $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{N}$ – der Geodätischen in Richtung (4) ist deshalb gemäß (7), (8) mit (9) und (10)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s) &= s\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right]_{s=0} + \frac{s^2}{2!}\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]_{s=0} + \frac{s^3}{3!}\left[\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right]_{s=0} + (4) = \\ &= \left\{s\cos A - \frac{s^3}{6}\frac{\cos A}{RR_1} + (4)\right\}\mathbf{t}_1 + \left\{s\sin A - \frac{s^3}{6}\frac{\sin A}{RR_2} + (4)\right\}\mathbf{t}_2 + \\ &+ \left\{\frac{s^2}{2}\frac{1}{R} - \frac{s^3}{6}\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds} + (4)\right\}\mathbf{N};\end{aligned} \tag{11}$$

R, R_1, R_2, dR/ds und A beziehen sich auf den Scheitel P_0 des Dreibeines $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{N}$ in Richtung (4). Die Koeffizienten von $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{N}$ sind gerade die *Weingartenschen* Entwicklungen für die geodätische Kurve (s. zum Beispiel [3], S. 47).

Die Normalebene von F im Punkte P_0, welche durch den Punkt P_s mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(s)$ aus (11) geht, schneidet nach (11) die im Punkte P_0 durch $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ bestimmte Tangentenebene τ_0 in der Trägergerade des Vektors

$$\left\{s\cos A - \frac{s^3}{6}\frac{\cos A}{RR_1} + (4)\right\}\mathbf{t}_1 + \left\{s\sin A - \frac{s^3}{6}\frac{\sin A}{RR_2} + (4)\right\}\mathbf{t}_2. \tag{12}$$

Die Hauptnormale der geodätischen Linie (11) im Punkte P_s – also zugleich auch die Flächennormale in P_s – hat die Parameterdarstellung

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(s) + t\,\frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2}. \tag{13}$$

Nach (11) schneidet diese Normale die Tangentenebene τ_0 für

$$t = -\frac{\frac{s^2}{2}\frac{1}{R} - \frac{s^3}{6}\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds} + (4)}{\frac{1}{R} - s\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds} + (2)} = -\frac{s^2}{2} + (3), \tag{14}$$

und zwar im Punkte, dessen Verbindungslinie mit dem Punkte P_0 – gemäß (13), (11) und (14) – den Vektor

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\left(-\frac{s^2}{2} + (3)\right) = &\left\{s\cos A + \frac{s^3}{3}\frac{\cos A}{RR_1} + (4)\right\}\mathbf{t}_1 + \\ &+ \left\{s\sin A + \frac{s^3}{3}\frac{\sin A}{RR_2} + (4)\right\}\mathbf{t}_2\end{aligned} \tag{15}$$

trägt und welche offensichtlich die Schnittlinie der Tangentenebene τ_0 mit der durch P_0 gehenden Normalebene von F im Punkte P_s ist.

Für den Winkel $\nu \,\varepsilon\, (0, \pi)$ der Vektoren (4) und (12) ergibt sich bei genügend kleinem $|s|$

$$\operatorname{tg}\nu = \left|\frac{s^2}{6}\frac{\cos A \sin A}{R}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (3)\right| \tag{16}$$

und für den Winkel $\nu^* \,\varepsilon\, (0, \pi)$ der Vektoren (4) und (15) ähnlich

$$\operatorname{tg}\nu^* = \left|\frac{s^2}{3}\frac{\cos A \sin A}{R}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (3)\right|. \tag{17}$$

Nach unserer Voraussetzung ist $R_1 \neq R_2$, und weil bei $s \to 0$ auch $\nu \to 0$, $\nu^* \to 0$ und weiter

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu} = 1,$$

so folgt bei

$$\cos A \sin A \neq 0 \tag{18}$$

aus (16) und (17), daß

$$\lim_{s\to 0}\frac{\nu}{\nu^*} = \lim_{s\to 0}\frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\cdot\frac{\operatorname{tg}\nu^*}{\nu^*}\cdot\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\nu^*} = \lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\nu^*} = \frac{1}{2},$$

also

$$\lim_{s\to 0}\frac{\nu}{\nu^*} = \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Die Voraussetzung (18) ist bei unserem Grenzübergang ganz wesentlich. Die Relation (19) stimmt mit (3.15) in [4]. Sie drückt in einer exakten Form die sonst nicht ganz strenge Aussage aus, daß die Geodätische den Winkel zwischen den Gegennormalschnitten drittelt.

Verläuft dagegen die geodätische Linie im Punkte P_0 in einer Hauptkrümmungsrichtung (das heißt, ist $\cos A \ \sin A = 0$), so muß man die Rechnungen fortsetzen, und wieder gewinnt man unter gewissen Voraussetzungen die Relation

$$\lim_{s \to 0} \frac{\nu}{\nu^*} = \frac{1}{5};$$

s. [4], Abschn. 4–6, besonders (6.6).

Literatur

[1] *C. F. Baeschlin:* Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.

[2] *C. F. Baeschlin:* Einführung in die Kurven- und Flächentheorie auf vektorieller Grundlage. Zürich 1947.

[3] *F. Hopfner:* Grundlagen der höheren Geodäsie. Wien 1949.

[4] *Z. Nádeník:* O úhlech mezi geodetickou čarou a protějšími normálními řezy. Geod. a kart. sborník *9,* 81–75, Praha 1963 (tschechisch; russische und deutsche Zusammenfassung).

Sur la détermination de l'axe de longs tunnels

par A. Ansermet

Résumé

Divers projets de tunnels sont à l'étude; certains, dits de base, seraient longs. Toutefois la géodésie moderne dispose de moyens nouveaux pour la mensuration de tels ouvrages. L'électrotélémétrie serait appliquée à l'intérieur et à l'extérieur du tunnel; cela complique un peu les calculs, inconvénient mineur. Il ne sera plus nécessaire, comme autrefois, de déterminer les déviations de la verticale en fonction de l'attraction des masses montagneuses visibles. En général tous les calculs et la compensation seront basés sur un système nouveau, régional, de coordonnées dont l'axe neutre pourrait coïncider avec l'axe du tunnel. Quant à l'altimétrie, elle ne doit donner lieu à aucune difficulté spéciale. Les praticiens évitent les visées réciproques et simultanées à cause des frais; dans le cas de longs tunnels cet argument perd de sa valeur.

La question de savoir si la compensation peut être fractionnée et comment ne peut être tranchée qu'en présence d'un cas concret.

Zusammenfassung

Verschiedene Projekte für Tunnels sind im Studium, von denen einige, die sogenannten Basistunnels, besonders lang sein werden. Die moderne Geodäsie verfügt über neue Mittel zur Absteckung derartiger Werke. Die elektronische Distanzmessung wird innerhalb und außerhalb des Tunnels verwendet. Die Berechnungen werden dadurch etwas komplizierter, was kaum einen großen Nachteil bedeutet. Es wird nicht mehr notwendig sein, wie früher die Lotabweichungen auf Grund der sichtbaren Massen