Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 64 (1966)

Heft: 4

Artikel: A propos de l'extension à la statique de la méthode aux variations de coordonnées

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-220753

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

grammétrie à l'EPUL de 1915 à 1956. Le Conseil d'Etat le nomma ensuite professeur honoraire de l'Université de Lausanne.

En ce qui concerne les recherches, notre collègue est l'auteur de plus de cent publications ayant paru dans des périodiques de Suisse et de l'étranger, notamment dans cette Revue. Elles portent sur les matières enseignées au cours de 40 ans ainsi que sur des applications de la méthode des moindres carrés en dehors de la géodésie.

Le grand savoir et la compétence de notre éminent collègue portent son nom bien au-delà de nos frontières.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance à Monsieur le professeur Ansermet de nous avoir fait bénéficier pendant de longues années déjà de sa vaste culture et lui souhaitons la santé, le plus grand des biens de ce monde, pour lui permettre de poursuivre sa remarquable et fructueuse activité scientifique. *Ls H.*

A propos de l'extension à la statique de la méthode aux variations de coordonnées

par A. Ansermet

Résumé

La méthode aux variations de coordonnées, d'un emploi si courant pour le calcul des réseaux, notamment en télémétrie, fut peu appliquée en statique; l'analogie est pourtant manifeste en hyperstatique des systèmes articulés (Stabfachwerke). Dans un cas il y a des côtés et des sommets, dans l'autre des barres et des nœuds. Ces lignes portent sur quelques développements nouveaux[1].

Zusammenfassung

Die Methode der Koordinatenausgleichung, die bei der Berechnung geodätischer Netze, insbesonders im Falle von Entfernungsmessungen, allgemein üblich ist, wurde bisher in der Statik wenig angewandt. Die Analogie ist jedoch im Falle überbestimmter Systeme in der Statik (Stabfachwerke) offensichtlich. Im einen Fall handelt es sich um Seiten und Spitzen, im andern Fall um Stäbe und Knoten. Die vorliegenden Zeilen führen zu einigen neuen Entwicklungen.

Il ne sera question ici que de réseaux et systèmes spatiaux; le choix des axes de coordonnées joue un rôle. Six coordonnées sont arbitraires et leur choix n'est pas indifférent.

Dans les réseaux la marche à suivre est bien connue: une première étape des calculs porte sur une solution provisoire; à cet effet, on fait abstraction de certains côtés et il n'y a plus d'éléments surabondants. La

[1] Le Fonds national suisse de la recherche scientifique accorda un subside de publication (N° 3413).

question des poids à attribuer aux côtés mesurés est assez complexe et suscite des controverses. Sans cela le problème à résoudre est familier à tous.

Dans les systèmes hyperstatiques articulés il y a aussi une première étape mais un peu moins simple que dans les réseaux; au préalable, il convient d'énumérer les notations:

x_i, y_i, z_i	Coordonnées des sommets ou des nœuds ($i = 1, 2, 3 \ldots$)
l_i	Longueurs des côtés ou des barres
S_i	Efforts axiaux dans les barres (Stabkräfte)
E_i	Coefficients d'élasticité (t/cm² par exemple)
m_i	Modules des barres (Federungen, voir [6], p. 140)
p_i	Poids des côtés ou des barres (à priori)
P_i	Poids à posteriori
F_i	Sections transversales des barres
A	Travail de déformation ou énergie dépensée (Energieaufwand)

Dans les réseaux la première étape des calculs fournit les termes absolus des équations en v; en hyperstatique le système est rendu déterminé grâce à des coupures de barres surabondantes et leur remplacement par des forces. Cette étape incombe en général au staticien, ce qui dispense de s'étendre davantage ici; par hypothèse les termes absolus f_i sont connus, d'où l'équation aux déformations:

$$v_i = a_i\,(dx_g - dx_h) + b_i\,(dy_g - dy_h) + c_i\,(dz_g - dz_h) + f_i \qquad (1)$$

pour la barre gh ou d'indice i. $\quad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1)$ (poids p_i)

Les dx, dy, dz sont les variations de coordonnées; la suite des calculs sera confiée à des praticiens dans le domaine des compensations, car on a ([4], p. 278):

$$v_i = \frac{S_i\,l_i}{E_i\,F_i}$$

$$\text{et } 2\,A = \sum\left(\frac{S_i^2\,l_i}{E_i\,F_i}\right) = \sum\left\{\left(\frac{S_i\,l_i}{E_i\,F_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{E_i\,F_i}{l_i}\right)\right\} = [v^2\,p] = \text{minimum} \qquad (2)$$

$v_i = m_i\,S_i$, les p_i étant numériquement proportionnels aux inverses des m_i. Dans les réseaux la condition du minimum repose sur une hypothèse, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes articulés.

En outre les poids ont des valeurs bien définies ici ce qui n'est en général pas le cas en télémétrie; ils interviennent en valeurs relatives.

Avant de poursuivre considérons un cas concret, de caractère didactique, avec un seul nœud libre:

Sommet d'un pylône (7 nœuds fixes 2, 3 ... 8)

$i =$	*Barres*	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i
1	1–2	+0,211	+0,788	+0,577	1	2,2
2	1–3	+0,577	−0,577	+0,577	1	2,2
3	1–4	−0,788	−0,211	+0,577	1	2,2
4	1–5	+0,490	+0,653	+0,577	0,9	2,2
5	1–6	+0,653	−0,490	+0,577	0,9	2,2
6	1–7	−0,490	−0,653	+0,577	0,9	2,2
7	1–8	−0,653	+0,490	+0,577	0,9	2,2

Le staticien coupe 4 barres et les remplace par des forces d'où le système dit fondamental (Grundsystem); le calcul des f_i est de sa compétence. Ensuite la compensation porte sur les inconnues dx, dy, dz.

Les matrices symétriques aux coefficients des équations normales et aux coefficients de poids des inconnues sont mutuellement inverses:

$$\begin{bmatrix} 2{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} {}^1/_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^1/_{2,2} \end{bmatrix} \qquad m_0^2 \cong [pvv] : 4$$

$$^1/_{2,2} = 0{,}45$$

Au nœud libre 1, sommet du pylône on a une sphère de déformation.

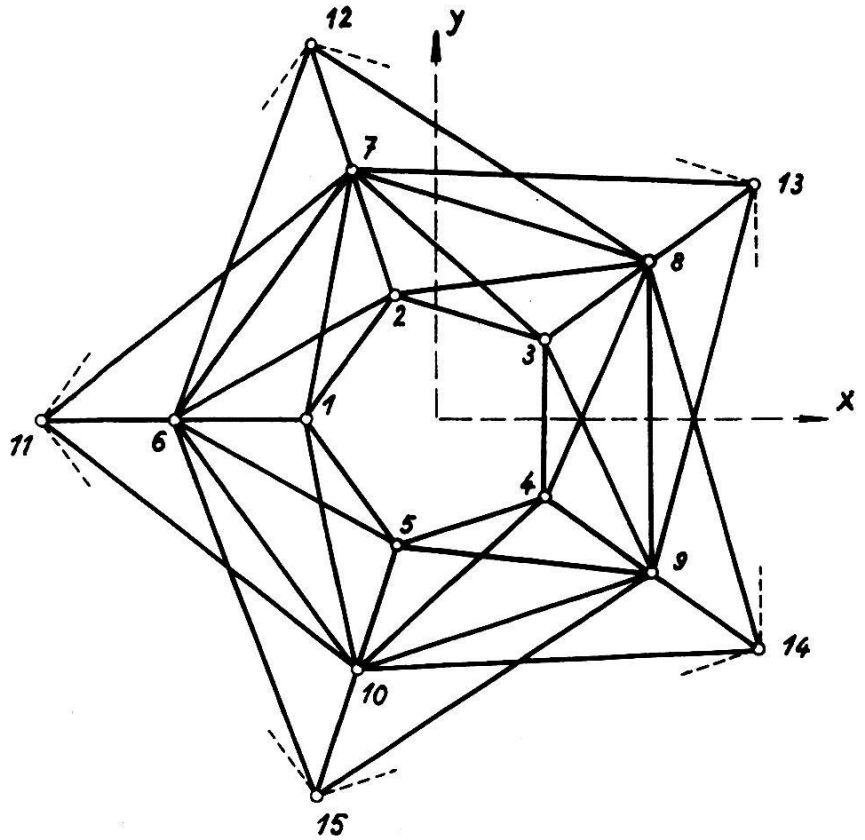
$$\textit{Contrôle:}\ [p : P] = 3 \times \frac{1}{2{,}2} + 4 \times \frac{0{,}9}{2{,}2} = \frac{6{,}6}{2{,}2} = 3 \text{ (3 inconnues)}$$

Ce cas est trop simple pour susciter d'autres commentaires.

m_0 est la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. Il n'est fait aucune hypothèse sur les forces extérieures.

Calcul d'une coupole

Ce calcul est une application intéressante dans le cas particulier. Récemment une publication portait sur la coupole du Reichstag (d'après Zimmermann) rendue hyperstatique par l'adjonction de barres surabondantes (voir [7]); la chaire de statique ETH a eu la grande amabilité de traduire ce texte.



La figure ci-dessous montre une coupole Schwedler rendue aussi hyperstatique; mettons en évidence le rôle que peut jouer l'ingénieur-géomètre.

Structure. 5 nœuds fixes 11, 12, ... 15; 10 nœuds libres 1–2–3 ... 10; 30 inconnues (variations coordonnées); 40 barres (40 équations).

Dans chaque maille 1–5–10–6 par exemple il y a une diagonale 1–10 et une contre-diagonale 5–6. En tout il y a 10 contre-diagonales.

Les staticiens couperont de préférence ces contre-diagonales pour réaliser le système fondamental; les forces de remplacement sont en général égales à 1 tonne mais c'est arbitraire.

Tableau des coordonnées

Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z	Nœuds fixes	x	y	z
1	−0,62	0	+1,84	6	−1,31	0	+0,92	11	−2,00	0	0
2	−0,19	+0,59	+1,84	7	−0,405	+1,245	+0,92	12	−0,62	+1,90	0
3	+0,50	+0,365	+1,84	8	+1,06	+0,772	+0,92	13	+1,62	+1,18	0
4	+0,50	−0,365	+1,84	9	+1,06	−0,772	+0,92	14	+1,62	−1,18	0
5	−0,19	−0,59	+1,84	10	−0,405	−1,245	+0,92	15	−0,62	−1,90	0

Le choix des axes de coordonnées peut jouer un certain rôle. L'unité de mesure pour les x, y, z est arbitraire (5^m, 6^m, ...); les coefficients a_i, b_i, c_i sont indépendants de cette unité.

Une fois que la première étape du calcul est terminée et que les termes absolus f_i sont connus, l'ingénieur-géomètre possède les éléments pour la suite des calculs; les poids sont déterminés facilement.

Poids à posteriori. Dans le cas de cette coupole on a:

$[p:P]_1^{40} = 30$, donc en moyenne: $p/P = 3/4 = 0{,}75$.

Ellipsoïdes de déformation. La corrélation avec les ellipsoïdes d'erreur est manifeste; c'est une notion nouvelle avec laquelle les staticiens se familiariseront. Ils éviteront, pour ces surfaces, des formes très défavorables. Si, pour un nœud, on a: $dx = 0$, ou $dy = 0$ ou encore $dz = 0$, la surface devient une ellipse; c'est ce qui se produit, par exemple, pour certains nœuds de la coupole du Reichstag (voir [7]).

Littérature

[1] *Friedrich, K.:* Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1943).

[2] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung (Springer-Verlag).

[3] Prof. *Li:* Matrix Analysis of Indeterminate Space Trusses (Mémoires de l'Association internationale des ponts et charpentes).

[4] *Stüssi, F.:* Baustatik I, II (Birkhäuser, Basel).

[5] *Wolf, H.:* Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg).

[6] *Zurmühl, R.:* Matrizen, 1965 (Springer-Verlag).

[7] *Ansermet, A.:* Neue Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln (Traduction par la chaire de statique ETH, 1965).