Graphentheorie : ein Hilfsmittel im Vermessungswesen

Autor(en): **Vetterli, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **64 (1966)**

Heft 10

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-220782

Graphentheorie, ein Hilfsmittel im Vermessungswesen

Dipl.-Ing. Paul Vetterli, M.Sc.Ph.E. (ITC)

Zusammenfassung

Seit dem Aufkommen der programmierten Rechentechnik in den verschiedensten Gebieten von Wissenschaft und Technik hat die Graphentheorie zahlreiche Anwendungen gefunden. Am Beispiel der bedingten Ausgleichung hybrider Polygonnetze wird gezeigt, daß die Graphentheorie auch im Vermessungswesen vermehrte Beachtung verdiente.

Résumé

Depuis l'avènement du calcul programmé dans les branches les plus différentes de la science et de la technique, la théorie des graphes a trouvé de nombreuses applications. A l'aide d'un exemple emprunté à la compensation des réseaux de polygones, l'auteur démontre l'utilité de cette théorie dans le domaine de la mensuration.

Einleitung

Verkehrsnetze, Molekülstrukturen, elektrische Schaltungen, Stammbäume, militärische Operationspläne usw. sind Graphen. Der Graph ist das abstrakte Bild, das den genannten und noch unzähligen anderen Darstellungen des täglichen Lebens zugrunde liegt. Dabei werden die verschiedensten Objekte durch Punkte bezeichnet und mittels gerichteter oder ungerichteter Linien miteinander verbunden. Diese Linien sollen eine bestimmte Beziehung oder Zuordnung ausdrücken.

Es bedarf wohl keiner schärferen Umschreibung des Graphen, um feststellen zu können, daß Triangulationen, Trilaterationen, Polygonierungen und photogrammetrische Netze Graphen sind. Da nun die Graphentheorie ein mathematisches Modell errichtet, das auch für weite Gebiete der Vermessung gilt, so ist zu erwarten, daß für die Vermessung interessante Ergebnisse abfallen könnten. Besondere Beachtung verdient dabei die anschauliche Terminologie, die den Vermessungsmann sozusagen direkt anspricht.

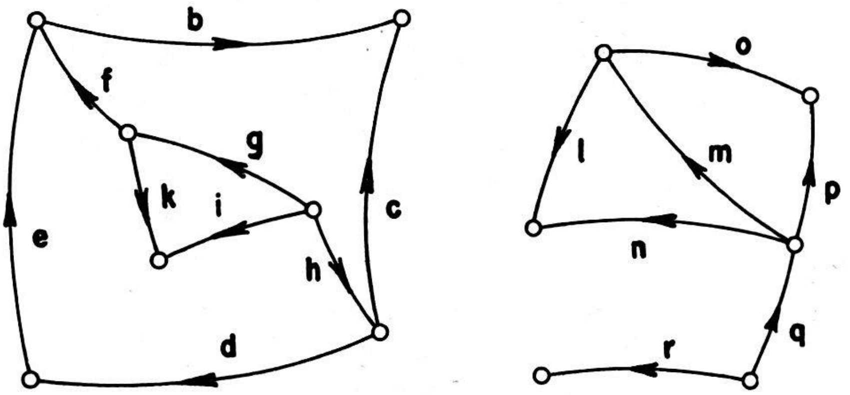
Bei der Aufstellung von Berechnungsplänen spielt das «erfahrene Auge» des Ingenieurs heute noch meist eine unersetzliche Rolle. Soll nun aber die Erstellung solcher Pläne dem Rechenautomaten überbunden werden, so stellt sich die Aufgabe, dem Computer dieses «erfahrene Auge» zu verschaffen. Daß bei diesem Vorhaben die Graphentheorie wirkungsvolle Hilfe bringen kann, soll das nachfolgende Beispiel zeigen.

Wir wollen ein sicheres Rezept aufstellen für die Bestimmung von Art und Anzahl der Bedingungen bei der bedingten Ausgleichung eines hybriden Polygonnetzes. Unter einem hybriden Polygonnetz verstehen wir ein «klassisches» Polygonnetz, in welchem zwischen beliebigen Polygonpunkten zusätzlich Distanzen oder Richtungen gemessen worden sind. Bevor wir an die Lösung der gestellten Aufgabe gehen können, müssen wir jedoch eine Exkursion in die Graphentheorie unternehmen.

Fundamentalsystem oder Basis unabhängiger Zyklen

In einem Graphen nennt man ungerichtete Verbindungslinien Kanten. Ein Kantenzug, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, heißt Zyklus des Graphen.

Um abstrakte Formulierungen zu vermeiden, wollen wir an einem Beispiel eine wichtige Eigenschaft der Zyklen eines Graphen vorführen. Der Graph des Beispiels (siehe Figur) umfaßt $a_0 = 2$ Komponenten oder isolierte Teilgraphen, $a_1 = 16$ Kanten und $a_2 = 13$ Punkte. Er weist zyklische und nichtzyklische Formen (Bäume) auf. Die Kanten sind mit b, c, ..., r bezeichnet; jede besitzt einen willkürlichen Durchlaufsinn, der mit einem Pfeil markiert ist. Unter der Unzahl von Zyklen der Figur beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Elementarzyklen, das heißt auf diejenigen, die einen Punkt höchstens einmal durchlaufen. Diese Zyklen sind in der zur Figur gehörenden Tabelle in der Kolonne «Zyklen» durch sukzessive Aufzählung der durchlaufenen Kanten notiert. Durch diese Aufzählung erhält jeder angeführte Zyklus einen (willkürlichen) Durchlaufsinn. Jedem Zyklus wird nun in den Kolonnen «Kanten» eine Zahlenfolge wie folgt zugeordnet: Wird beim Durchlaufen des betreffenden Zyklus eine bestimmte Kante im Sinne ihres Pfeils durchlaufen, so wird in der entsprechenden Kolonne der Wert $+1$ und im gegenteiligen Falle der Wert -1 notiert. Nicht durchlaufene Kanten des Graphen erhalten den Wert 0. Demnach lautet zum Beispiel die dem Zyklus Nr. 2 (*bchgf*) zugeordnete Zahlenfolge $(1, -1, 0, 0, +1, +1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, da die Kanten b, f und g im Sinne der Kantenpfeile und die Kanten c und h entgegen den Kantenpfeilen durchlaufen werden. Diese jedem Zyklus zugeteilte, geordnete Zahlenfolge heißt Zyklusvektor. Seine Dimension entspricht der Anzahl der Kanten des Graphen.



Man sagt, daß eine Anzahl Zyklen unabhängig sind, wenn die zugehörigen Zyklusvektoren linear unabhängig sind. In unserem vereinfachten Beispiel bedeutet dies, daß keiner der Vektoren der betrachteten Zyklen durch vektorielle Addition oder Subtraktion aus den übrigen hergeleitet werden kann. Zyklen 2, 3 und 6 sind zum Beispiel nicht unabhängig, da Zyklusvektor 6 durch Subtraktion des Vektors 2 vom Vektor 3 entsteht. Hingegen sind die Zyklen 2, 5, 6, 8 und 9 oder 1, 2, 6, 7 und 9 unabhängig.

Ein Graph besitzt nun immer eine ganz bestimmte maximale Anzahl unabhängiger Zyklen. Diese Anzahl ist typisch für den Graphen; sie ist eine topologische Konstante und heißt *zyklomatische Zahl* (ν). Ihr Wert beträgt $\nu = a_0 + a_1 - a_2$, wobei a_0 die Anzahl der Komponenten, a_1 die Anzahl der Kanten und a_2 die Anzahl Punkte des Graphen darstellen. Die zyklomatische Zahl des Beispiels beträgt somit $\nu = 2 + 16 - 13 = 5$. ν unabhängige Zyklen eines Graphen nennt man *Fundamentalsystem* oder *Basis unabhängiger Zyklen* oder Zyklenbasis. Ein beliebiger Zyklus eines Graphen läßt sich stets aus den Zyklen eines seiner Fundamentalsysteme aufbauen.

Nr.	Zyklen	Kanten															
		b	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*
		Zyklusvektoren															
1	*bcde*	+1	−1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	*bchgf*	+1	−1	0	0	+1	+1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	*bchikf*	+1	−1	0	0	+1	0	−1	+1	−1	0	0	0	0	0	0	0
4	*fghde*	0	0	+1	+1	−1	−1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	*fkihde*	0	0	+1	+1	−1	0	+1	−1	+1	0	0	0	0	0	0	0
6	*gik*	0	0	0	0	0	−1	0	+1	−1	0	0	0	0	0	0	0
7	*lnpo*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	−1	−1	+1	0	0
8	*lnm*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	−1	0	0	0	0
9	*mpo*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	−1	+1	0	0

Ein hübsches Beispiel für die zyklomatische Zahl bietet der Katasterplan: Die Anzahl Parzellen auf einem Blatt ist $\nu = 1 + a_1 - a_2$, wenn das Blatt a_1 Grenzlinien und a_2 Grenzpunkte aufweist.

Bestimmung der Art und Anzahl von Bedingungsgleichungen bei der Ausgleichung hybrider Polygonnetze

Um die folgende Demonstration möglichst kurz und einfach zu gestalten, unterwerfen wir das Polygonnetz zwei Einschränkungen:

1. Das Netz sei zusammenhängend; das heißt, zwei beliebige Netzpunkte können stets durch einen Polygonzug verbunden werden.
2. Die Richtungen der einem Punkt anliegenden Polygonseiten bilden stets einen Satz.

Hybride Meßelemente seien vorläufig noch ausgeschlossen.

Einem derart vereinfachten Polygonnetz, das immerhin beliebig viele Knotenpunkte in freier Anordnung aufweisen darf, können wir sozusagen direkt ein Graph unterschieben. Diese Substitution gelingt ohne nennenswerte Phantasie, indem die Polygonseite (Distanz und Azimut) durch die Graphenkante und der Polygonpunkt durch den Graphenpunkt ersetzt wird. Die derart aufgebaute Analogie Graph–Polygonnetz befriedigt jedoch noch nicht. Ein Graph ist ein in sich geschlossenes, widerspruchloses mathematisches Wesen, was vom Polygonnetz vorderhand noch nicht gesagt werden kann, da im letzteren Klaffen oder Abschlußtherme die vermutete Analogie stören, das heißt zerstören. Diese Schwierigkeit rührt natürlich vom verschwommenen Begriff «Polygonnetz» her. Unter Polygonnetz versteht man landläufig, je nach Bedarf, den Netzplan, das numerische oder graphische Meßnetz oder das ausgeglichene Netz. Wir eliminieren die die Analogie störenden Abschlußtherme im Meßnetz, indem wir den Messungen vorläufig noch unbekannte Verbesserungen anfügen. Das Netz der Feldmessungen wird dadurch zum Netz der ausgeglichenen Messungen.

Rückschließend vom Graph auf das Polygonnetz, konstatieren wir nun die Existenz einer Familie von Fundamentalsystemen unabhängiger Zyklen im Polygonnetz.

Die Messungen sind offenbar mit Berücksichtigung des kleinstquadratischen Prinzips so zu verbessern, daß alle zyklischen Strukturen des Polygonnetzes «schließen». Da nun ein ganz beliebiger Zyklus des Polygonnetzes aus den Zyklen eines seiner Fundamentalsysteme zusammengesetzt werden kann, genügt es, dafür zu sorgen, daß die Elemente irgendeiner Zyklusbasis schließen. Es besteht dann auch die volle Gewähr, daß das mit Hilfe der Basiszyklen aufgestellte System der Bedingungsgleichungen wirklich unabhängig ist. Es sei bemerkt, daß die Verbesserungen an den aus den Richtungsmessungen abgeleiteten Azimuten der Polygonseiten und nicht an den Polygonwinkeln angebracht werden sollten. Werden nämlich die Winkel verbessert, so muß für jede Station noch dafür gesorgt werden, daß die Summe der der Station zugeordneten Polygonwinkel den Wert 2π hat.

Jeder Polygonzyklus des Fundamentalsystems gibt Anlaß zu zwei Bedingungsgleichungen, von denen sich die eine auf die Identität des Beginn- und des Endpunktes (Distanz null), die andere auf die Azimute des ringförmigen Polygons beziehen. Die erste der genannten Arten von Bedingungsgleichungen nennen wir A-Gleichungen, die zweite Art B-Gleichungen. Das Netz weist demnach ν A-Gleichungen und ν B-Gleichungen auf.

Wir bereichern nun die Netzstruktur, indem wir hybride Messungen, das heißt zusätzliche Richtungs- und Distanzmessungen zwischen beliebigen Polygonpunkten, zulassen.

Die durch derartige Messungen verbundenen Netzpunkte können stets durch einen Polygonzug verbunden werden. Jede hybride Messung gibt somit Anlaß zu einem Zyklus neuer Art. Er gehört sicher zur Zyklusbasis des angereicherten Netzes, da er ein Element (Richtung oder Distanz) enthält, das in keinem andern Zyklus auftritt. Er ist daher unabhängig. Die durch eine zusätzliche Richtungsmessung verursachte Bedingungsgleichung sei als C-Gleichung, und die durch eine zusätzliche Distanzmessung hervorgerufene Bedingungsgleichung als D-Gleichung typisiert.

Wir müssen uns noch kurz mit den Netzzwängen beschäftigen, die durch Einführung von Festpunkten ins Polygonnetz entstehen.

Es ist zum vornherein klar, daß das im Polygonnetz enthaltene, dem gegebenen Festpunktnetz entsprechende Partialnetz diesem Festpunktnetz kongruent sein muß; das heißt, das beschriebene Partialnetz und das Festpunktnetz müssen zur Deckung gebracht werden können. Diese Kongruenz kann durch Einführung von Distanzbedingungen erzwungen werden.

Zwei beliebige im Polygonnetz enthaltene Festpunkte können wie gewöhnliche Netzpunkte stets durch einen Polygonzug verbunden werden. Daneben sind sie natürlich durch ihre aus den Festkoordinaten ableitbare Distanz verbunden. Man stößt sichtlich auch hier wieder auf eine Zyklusstruktur. Ohne weiter auf Einzelheiten einzutreten, möchten wir nur als Ergebnis vermelden, daß bei n Festpunkten, die zugleich auch Polygonpunkte sind, genau $(2n - 3)$ unabhängige Distanzbedingungen einzuführen sind. Die entsprechenden Bedingungsgleichungen sind vom Typ der bereits angetroffenen A-Gleichung.

Weiterhin führt jede Anschlußrichtung zu einem Zwang, dem mit Hilfe einer Zyklusstruktur, die der Bedingungsgleichung vom Typ C entspricht, Rechnung getragen werden kann.

Abschließend betrachten wir nun ein Polygonnetz in dem durch Abzählen folgende Elemente festgestellt sind:

Anzahl der Polygonseiten	a_1
Anzahl der Polygonpunkte (inklusive polygonare Festpunkte)	a_2
Anzahl der Festpunkte, die in a_2 enthalten sind	a_3
Anzahl der Anschlußazimute	a_4
Anzahl der zusätzlichen Richtungen (hybride Messung)	a_5
Anzahl der zusätzlichen Distanzen (hybride Messung)	a_6

Wir sind gegenwärtig imstande, in einem derart charakterisierten Netz Art und Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen genau anzugeben.

Art	*Anzahl*
A-Gleichungen	$a_1 - a_2 + 2a_3 - 2$
B-Gleichungen	$a_1 - a_2 + 1$
C-Gleichungen	$a_4 + a_5$
D-Gleichungen	a_6

Die zyklomatische Zahl beträgt: $\nu = a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - 2.$

Schlußbemerkungen

Wie bereits angedeutet, ist es nicht Ziel der vorgehenden Ausführungen, die bedingte Ausgleichung von Polygonnetzen anzupreisen, sondern die Nützlichkeit der Graphentheorie in der Vermessung zu betonen.

Im vermessungstechnischen Programmrechnen herrscht ohne Zweifel die Tendenz, immer allgemeinere und größere Meßnetze immer automatischer und kleinstquadratischer mit immer komplizierteren Programmen zu bearbeiten. Der mit solchen Problemen geplagte Fachmann, der nach Hilfsmitteln Ausschau hält, wird in der Graphentheorie eine wertvolle Stütze und eine Fundgrube prächtiger Ideen entdecken. Die Graphentheorie wird ihm in vielen Belangen erlauben, zielbewußter und systematischer vorzugehen. Sicher wird er einverstanden sein mit König, der treffend sagte: «... Diese graphentheoretische Terminologie hat einen großen heuristischen Wert: sie liefert 'natürliche' Probleme und verbindet recht abstrakte Dinge mit klaren Vorstellungen, wodurch oft neue Zusammenhänge zwischen voneinander scheinbar entfernt liegenden Begriffen und Problemen zutage treten ...»

Literatur und Quellen:

Claude Berge: Théorie des Graphes et ses Applications. Dunod, Paris 1963.
Denès König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936; Chelsea Publishing Co., New York, N.Y.
Paul Vetterli: Une Théorie des Réseaux de Polygones. 1965 (unveröffentlicht).
Paul Vetterli: Traverse Networks. ITC Publications 1964, Delft.

Die Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (UGGI) in der Schweiz im Jahre 1967

Von F. Kobold

(Schluß)

Als anläßlich der letzten Generalversammlung der UGGI, die im Herbst 1963 in Berkeley, Kalifornien, stattfand, kein Land eine Einladung für die nächste Generalversammlung vorlegte, wurden die Schweizer Delegierten von mehreren Stellen angefragt, ob nicht unser Land die Veranstaltung durchführen könnte. Für die Delegierten war es selbstverständlich unmöglich, zuzusagen, da viele Fragen vorher im eigenen Land abgeklärt sein mußten. Zu diesen Fragen gehörte in erster Linie die finanzielle Unterstützung durch den einladenden Staat; ist es doch Tradition, daß das Gastland wegen des halbstaatlichen Charakters der wissenschaftlichen Unionen an die Kosten von derartigen Kongressen namhafte Beiträge leistet.

Im Frühjahr 1964 richtete der derzeitige Präsident der UGGI, Prof. Kaplan, Dozent für Physik an der kalifornischen Universität von Los Angeles, ein offizielles Schreiben an das Eidgenössische Politische Departement, in dem er die Frage stellte, ob die Schweiz die nächste Generalversammlung übernehmen könnte. Das Departement ersuchte die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft um Stellungnahme, und diese überwies die Anfrage zur näheren Abklärung an das Schweizerische Landeskomitee für die UGGI. Ihm fiel die Aufgabe zu, zu prüfen, in welcher Stadt oder in welchen Städten und in welchem Zeitpunkt der Kongreß durchgeführt werden könnte, und es hatte zudem den ersten Finanzplan aufzustellen. Es konnte sich dabei auf die Erfahrungen der beiden früheren Generalversammlungen von Berkeley und von Helsinki stützen. Erste Schätzungen führten zum Schluß, daß mit etwa 2500 Teilnehmern gerechnet werden müsse und daß die Gesamtkosten mindestens Fr. 400000.– betragen würden, wobei damals vorausgesetzt werden durfte, daß ein großer Teil der administrativen Arbeiten von amtlichen Stellen kostenlos übernommen würde.