Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 65 (1967)

Heft: 3

Artikel: Quelques aspects des compensations de réseaux électrotélémétriques

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-221522

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 3 · LXV. Jahrgang **Erscheint monatlich** **15. März 1967**

Quelques aspects des compensations de réseaux électrotélémétriques

Par A. Ansermet

Zusammenfassung

Die Ausgleichung von Netzen mit elektronisch gemessenen Distanzen ist recht komplex, namentlich dann, wenn sie im Raum durchgeführt werden muß. Die Anzahl der überschüssigen Elemente wird hoch, wenn zu den Streckenmessungen noch Winkelmessungen treten. Eine vollständige Rechnung sollte die Bestimmung der Fehlerellipsoide und wenn möglich der Gewichte a posteriori umfassen. Die folgenden Zeilen sind einigen besonderen Aspekten des Problems gewidmet. Die Beziehung zwischen Streckennetzen und Stabfachwerken ist offensichtlich. Die berechneten Ellipsoide heißen Deformationsellipsoide. Verwechslungen mit dem Standardellipsoid der mathematischen Statistik müssen vermieden werden.

Résumé

La compensation de réseaux électrotélémétriques est un calcul assez complexe surtout spatialement, lorsque le nombre des éléments surabondants est élevé et si des mesures angulaires viennent s'ajouter aux mesures linéaires. Un calcul complet devrait comprendre la détermination des ellipsoïdes d'erreur et si possible des poids à posteriori. Les lignes qui suivent sont consacrées à quelques aspects particuliers du problème; la corrélation entre les réseaux télémétriques et les systèmes articulés hyperstatiques est manifeste, mais les ellipsoïdes sont alors dits de déformation. Il ne faut pas confondre avec l'ellipsoïde standard de la statistique mathématique.

La compensation de réseaux trilatérés est un problème vaste ayant donné lieu à de nombreuses publications; la trilatération et la triangulation sont parfois combinées, mais il en est fait abstraction ici. En haute montagne

le réseau pourra être tridimensionnel. Avant de poursuivre il ne faut pas oublier l'analogie existant entre l'hyperstatique des systèmes articulés (Stabfachwerke) et les réseaux à mesures linéaires; une collaboration entre les staticiens et les géodésiens peut être profitable. Un cas concret traité ci-après chevauche, si on peut s'exprimer ainsi, sur la statique et la télémétrie. Le principe des moindres carrés est contenu implicitement dans la condition connue relative au travail de déformation; on aboutit, pour les nœuds libres, à des ellipses et ellipsoïdes de déformation et non plus d'erreur comme dans les réseaux. Les sommets de ceux-ci sont aussi appelés nœuds (voir [3]). La méthode aux variations de coordonnées des nœuds présente des avantages pour le calcul de ces courbes et surfaces; des exemples le prouveront.

Le choix d'un mode de calcul fait encore l'objet de controverses; une tendance est de choisir comme inconnues les variations de coordonnées. Les équations de condition, surtout spatialement, peuvent donner lieu à des calculs laborieux. Traitons maintenant des exemples numériques, les côtés ne dépassant pas 60 km comme longueur (réseau suisse).

Maille à deux diagonales. C'est un élément de base en général. Soient A, B, C, D les quatre nœuds, l_1, l_2 ... l_6 les six mesures; si les nœuds sont à peu près sur un même cercle, ce qui n'est pas difficile à réaliser en plaine, on aura (formule de Ptolémée): $AB \times CD + BC \times AD \cong AC \times BD$

$$(l_1 + v_1)(l_3 + v_3) + (l_2 + v_2)(l_4 + v_4) \cong (l_5 + v_5)(l_6 + v_6),$$

ce qui suffit en général pour déterminer les coefficients a_1, a_2 ... des v.

	Poids p_l		$p_l : P_l$
$l_1 = 14{,}14 = \quad a_3$	1,25	Les poids P_l à posteriori sont calculés par:	0,906
$l_2 = 13{,}27 = \quad a_4$	1		0,897
$l_3 = 15{,}87 = \quad a_1$	1,25	$\frac{1}{P_l} = \frac{1}{p_l} - \frac{\left(\frac{a_l}{p_l}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$,	0,882
$l_4 = 13{,}06 = \quad a_2$	1		0,899
$l_5 = 19{,}96 = -a_6$	0,8	d'où les six quotients $p_l : P_l$	0,708
$l_6 = 19{,}92 = -a_5$	0,8	L'unité de mesure est arbitraire	0,709

Sur les 8 coordonnées des nœuds, 3 sont arbitraires. $[p : P]_1^6 = 5{,}00$ (5 inconnues)

Théoriquement on pourrait poser la condition: les valeurs compensées $(l_i + v_i)$ sont telles que la formule de Ptolémée soit rigoureusement satisfaite; le calcul du terme absolu w serait aisé, mais cette hypothèse présente un caractère plus théorique que pratique.

Schéma d'une chaîne trilatérée. Les éléments de la chaîne sont des trapèzes isocèles. L'hypothèse suivante est formulée: le télémètre utilisé est à ondes lumineuses; en opérant, à la lumière diurne, la distance 1–4 ne fut pas mesurée directement mais fractionnée (fig. 1).

A partir d'un point quelconque 0 on mesurera, angulairement, les nœuds 1, 2, 3, 4, d'où la condition:

Le rapport anharmonique (1234) ou birapport des quatre nœuds est égal à 0 (1234), soit au birapport des rayons 0–1, 0–2, 0–3, 0–4; ce dernier est fonction de quatre sinus.

Cette propriété bien connue trouve son application ici. On pourrait envisager un cinquième nœud 5 et former des combinaisons:

(1234), (1235), (1245) ... (2345). Il y a bien des possibilités. Le calcul des nœuds 1′ et 2′ est aisé si le côté 1–2 est connu; c'est un double point.

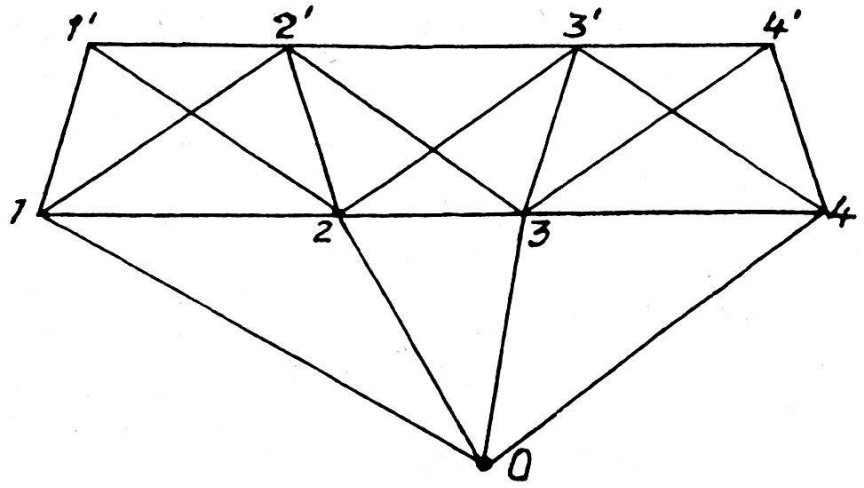

Fig. 1

Formons le tableau des coefficients directeurs:

Côtés	a_i	b_i	c_i	d_i	*Poids*	p/P
1 – 1′	+ 0,6	+ 0,8			1,1	0,89
2 – 1′	– 0,8	+ 0,6			1,1	0,80
1′ – 2′	+ 1	0	– 1	0	0,9	0,64
1 – 2′			+ 0,8	+ 0,6	1	0,79
2 – 2′			– 0,6	+ 0,8	1	0,88
						4,00 = $[p:P]$ (4 inconnues)

La formation des quotients des poids à priori p_i et à posteriori P_i est immédiate

Les matrices mutuellement réciproques des coefficients des équations normales et des coefficients de poids des inconnues sont:

$$\begin{bmatrix} 2{,}0 & 0 & -0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}9 & 0 & 1{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}63 & 0 & +0{,}295 & 0 \\ 0 & 0{,}91 & 0 & 0 \\ +0{,}295 & 0 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Les longueurs des axes principaux des ellipses d'erreur sont:

pour 1′ : $\sqrt{0{,}63} = 0{,}79$ $\qquad$ $\sqrt{0{,}91} = 0{,}95$

pour 2′ : $\sqrt{0{,}67} = 0{,}82$ $\qquad$ $\sqrt{1} = 1$

dans l'hypothèse où $m_0^2 \cong [pvv] : 1 = 1$ (numériquement).

Deux cas seront encore traités en trilatération spatiale (par exemple: haute montagne); le problème est un peu plus complexe.

Calcul d'un nœud spatial. Admettons six nœuds fixes, connus ([3], p. 719):

$i =$	Côtés	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i	
1	1–2	+ 0,142	+ 0,804	+ 0,577	1	2,2	$[p : P] = 3$ (3 inconnues)
2	1–3	+ 0,625	− 0,525	+ 0,577	1	2,2	
3	1–4	− 0,767	− 0,279	+ 0,577	1	2,2	Le calcul est immédiat et si simple qu'on renoncera aux matrices.
4	1–5	+ 0,740	+ 0,345	+ 0,577	1,2	2,2	L'ellipsoïde d'erreur est sphérique
5	1–6	− 0,071	− 0,813	+ 0,577	1,2	2,2	
6	1–7	− 0,669	+ 0,469	+ 0,577	1,2	2,2	

Télémétriquement le nœud 1 est à l'intersection de six sphères; statiquement c'est le sommet d'un pylône à six barres; mais l'ellipsoïde est alors de déformation.

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = {}^1/_{2,2} \text{ (coefficients de poids des inconnues)}$$

Cas général. Il fut traité en hyperstatique (voir [4]); il suffit de remplacer le mot «barres» par «côté». Dans la figure 2 tous les côtés ne sont pas tracés. Chaque nœud libre 1, 2, 3, 4, 5 est relié aux cinq nœuds fixes 6, 7 ... 10.

Tableau des coordonnées (unité de mesure arbitraire)

Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z
1	− 0,62	0	+ 1,3	6	− 2,00	0	0
2	− 0,19	+ 0,59	+ 1,3	7	− 0,62	+ 1,90	0
3	+ 0,50	+ 0,365	+ 1,3	8	+ 1,62	+ 1,18	0
4	+ 0,50	− 0,365	+ 1,3	9	+ 1,62	− 1,18	0
5	− 0,19	− 0,59	+ 1,3	10	− 0,62	− 1,90	0

Tableau des poids à priori (valeurs numériques)

Nœuds	$h=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g=1$		0,7				1,15	1	0,8	0,8	1
2			0,7			1	1,15	1	0,8	0,8
3				0,7		0,8	1	1,15	1	0,8
4					0,7	0,8	0,8	1	1,15	1
5	0,7					1	0,8	0,8	1	1,15

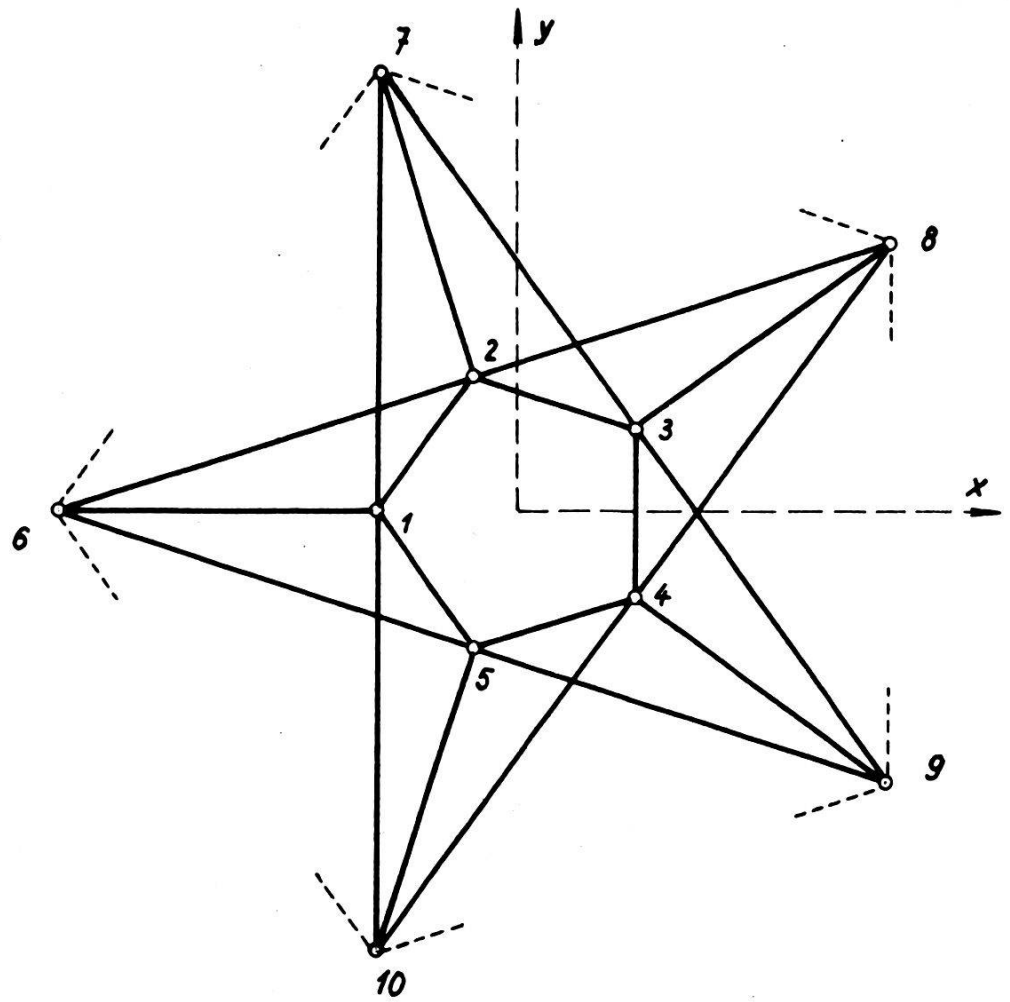

Fig. 2

Les dimensions ne sont pas les mêmes en télémétrie et statique. Il y a 30 côtés dont 15 surabondants et 15 variations de coordonnées inconnues; c'est un cas spécial qui évite certaines controverses lors du choix d'une solution; c'était voulu.

Voici un groupe de coefficients directeurs:

Côtés	a_i	b_i	c_i	p_i
1–6	+ 0,73	0	+ 0,684	1,15
1–7	0	− 0,824	+ 0,564	1
1–8	− 0,79	− 0,412	+ 0,457	0,8
1–9	− 0,79	+ 0,412	+ 0,457	0,8
1–10	0	+ 0,824	+ 0,564	1

La matrice aux coefficients des équations normales fut inversée par le *Centre de calcul électronique* de *l'EPUL* (voir [4]).

Pour le nœud 1 on a: $Q_{xx} = 0{,}51$ $Q_{yy} = 0{,}44$ $Q_{zz} = 0{,}66$. Si on pose $m_0^2 \cong [pvv]: 15 = 1$, on obtient les axes principaux de l'ellipsoïde d'erreur:

$$\sqrt{0{,}51} = 0{,}714 \qquad \sqrt{0{,}44} = 0{,}664 \qquad \sqrt{0{,}66} = 0{,}812$$

		$1/P_i =$		
Poids P_i	pour 5 côtés $p_i = 0{,}7$	$0{,}630 \times 5 \times 0{,}7$	= 2,21	p/P
à posteriori	pour 5 côtés $p_i = 1{,}15$	$0{,}581 \times 5 \times 1{,}15$	= 3,35	
	pour 10 côtés $p_i = 1$	$0{,}512 \times 10 \times 1$	= 5,12	
	pour 10 côtés $p_i = 0{,}8$	$0{,}533 \times 10 \times 0{,}8$	= 4,27	
Calcul fait à la règle d'où un petit écart.		$[p:P]$	= 14,95 (15 inconnues)	

Ici encore entre les réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques articulés l'analogie est frappante.

Transformations

Le cas se présente où un réseau est à rattacher à des points fixes connus; on sait que c'est un problème-fleuve qui suscita de multiples solutions. Des discordances sont constatées que l'on s'efforce d'éliminer au moins partiellement; une première solution, qui ne donne pas toujours entière satisfaction, est celle à 7 paramètres ou d'Helmert. Sur ce problème S. Finsterwalder s'est exprimé comme suit: «Wenn sich zwei Punkthaufen möglichst nahe liegen, bilden die kürzesten Abstände beider, als Kräfte aufgefaßt, ein Gleichgewichtssystem.» On a, sous forme implicite, les équations:

$$[v_x] = [v_y] = [v_z] = 0 \qquad [xv_y - yv_x] = [yv_z - zv_y] = [zv_x - xv_z] = 0$$

$$[xv_x + yv_y + zv_z] = 0 \qquad (v_x, v_y, v_z \text{ discordances à posteriori})$$

(3 translations, 3 rotations, 1 variation d'échelle).

Les x, y, z jouent le rôle de coefficients; des valeurs arrondies suffisent. Cette solution est trop connue pour donner lieu à d'autres commentaires.

Transformation affine. Elle est très en faveur bien que nécessitant davantage de paramètres; en outre elle n'est pas conforme comme la précédente. Les équations sont connues:

$$
\begin{aligned}
x_i' - x_i &= \overbrace{a_1 x_i + S_3 y_i + S_2 z_i}^{\textit{Déformation pure}} + \overbrace{(r_2 z_i - r_3 y_i)}^{\textit{Rotation}} - v_{xi} \\
y_i' - y_i &= S_3 x_i + a_2 y_i + S_1 z_i + (r_3 x_i - r_1 z_i) - v_{yi} \\
z_i' - z_i &= S_2 x_i + S_1 y_i + a_3 z_i + (r_1 y_i - r_2 x_i) - v_{zi}
\end{aligned}
$$

Par hypothèse les centres de gravité des deux groupes de points furent mis en coïncidence (translation). On applique le principe des moindres carrés à ces v_x, v_y, v_z.

Ces membres de gauche sont les discordances à priori:

$$Si\ a_1 = a_2 = a_3 \quad \text{et} \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0,$$

on retrouve la transformation d'Helmert.

Les discordances ne peuvent pas toujours être éliminées complètement.

Quant aux coordonnées planes, elles seront du type conforme, à axe neutre, comme c'est le cas en Suisse; la projection stéréographique présente cet avantage que, pour chaque côté, les deux réductions à la corde sont égales. En outre la définition est particulièrement simple: c'est une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Littérature

[1] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung (Springer-Verlag).

[2] *Wolf, H.:* Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg).

[3] *Jordan-Eggert-Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde VI (Stuttgart).

[4] *Ansermet, A.:* Déformations des systèmes articulés hyperstatiques (Publication EPUL N° 95) (bénéficie d'un subside du Fonds national de la recherche).