

Sur le choix d'un système de coordonnées géodésique conformes

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **65 (1967)**

Heft 11

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-221540>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 11 · LXV. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. November 1967

Sur le choix d'un système de coordonnées géodésiques conformes

Par A. Ansermet

Zusammenfassung

Das hier behandelte Problem ist keineswegs neu; doch sind gewisse darüber erschienene Publikationen nicht sehr bekannt, namentlich dann, wenn sie nicht von Geodäten, sondern von Mathematikern stammen. Es schien daher nützlich, gewisse Ergebnisse mit ihren Anwendungen für einen bestimmten Fall gegenüberzustellen. Die Verwendung konformer Polarkoordinaten und die Berechnung der Wendepunkte der in die Ebene transformierten Seiten dürften ebenfalls von Interesse sein.

Résumé

Le problème traité ici n'est nullement nouveau; certaines des publications ayant paru sur ce sujet ne sont cependant pas très connues, notamment quand elles émanent non de géodésiens mais de mathématiciens. Il a paru dès lors utile de mettre en parallèle certains résultats ainsi que leurs applications à un cas précis. L'emploi de coordonnées polaires conformes et le calcul de points d'inflexion de transformées planes ont paru aussi présenter de l'intérêt.

Parmi les publications peu connues portant sur le choix d'un système de coordonnées géodésiques conformes il faut citer celles de l'éminent mathématicien G. Darboux. En Suisse, depuis peu, on possède la magistrale étude de l'Institut géodésique de l'Ecole Polytechnique fédérale, rédigée avec la collaboration d'un mathématicien. De son côté, M. le professeur W.K. Bachmann traite ce problème de façon remarquable dans l'album de jubilé du professeur Dolezal.

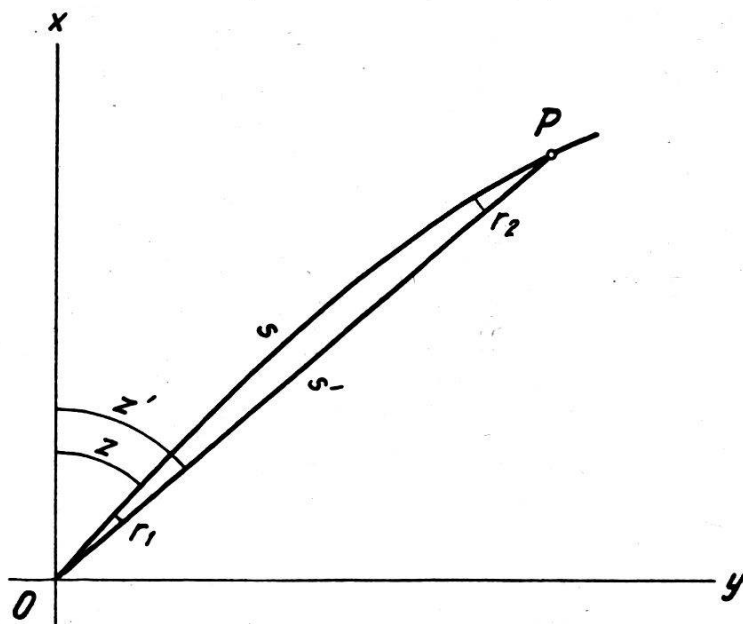
Avant de poursuivre, énumérons les notations utilisées:

m	Coefficient de déformation linéaire ou rapport de similitude
φ	Latitude d'un point ($\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 0$ à l'origine O)
λ	Longitude d'un point ($\lambda = 0$ est le méridien central)
x, y, s', z'	Sont respectivement les coordonnées planes rectangulaires et polaires
s	Est l'arc de transformée donc la corde est s' (voir figure)
R	Rayon de la sphère de référence
r_1, r_2	Réductions à la corde pour un côté du réseau

Rappel de notions usuelles

L'hypothèse suivante est formulée: dans un champ limité autour de l'origine O , notamment pour le calcul des altérations linéaires et des réductions à la corde, en se contentera dans les développements en séries des termes dits principaux; les termes suivants de la série ne sont pas principaux. Les formules essentielles appliquées ci-après sont en général extraites de l'ouvrage standard «Lehrbuch der Geodäsie» (voir [1]); l'auteur a montré que l'altération linéaire des transformées planes était de 2^e ordre:

$$(1) \quad m - 1 = f(x^2, xy, y^2) + \dots$$



les variables ne sont pas dissociées et il y a deux paramètres: l'un de forme n et l'autre d'orientation; pour mieux interpréter ces éléments, considérons le cas où les variables sont dissociées, qui est classique:

$$(2) \quad m - 1 = \frac{1}{4 R^2} \left\{ (1 + n) x^2 + (1 - n) y^2 \right\} + \dots$$

$$\text{ou } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{1 + n}{1 - n} = \frac{b^2}{a^2} \quad n = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad \begin{array}{l} 0 \leq |n| \leq 1 \\ a \geq b \end{array}$$

Rappelons en outre les formules donnant la corrélation entre la sphère et le plan :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{R} = \Delta \varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + (T_3) + \dots \\ \frac{y}{R} = \lambda \cos \varphi_0 - \lambda, \Delta \varphi \sin \varphi_0 + (T_3') + \dots \end{array} \right. \quad (\Delta \varphi, \lambda \text{ en radians})$$

Les termes de 3^e ordre $(T_3)_1 (T_3')$ contiennent n en vue de réaliser la conformité.

Choix du système conforme

Il y aura dans ce problème, au point de vue analytique, à considérer deux faisceaux linéaires ou ponctuels de coniques.

En effet si $x^2 = y^2$ le paramètre n est éliminé; si on fait varier n , pour un coefficient m donné, on obtient un premier faisceau circonscrit à un carré ($x^2 = y^2$). Il y a une autre manière d'opérer: au lieu des coordonnées x, y on considère un autre système x', y' , dont les axes sont les bissectrices du système précédent; de suite on trouve:

$$(4) \quad m - 1 = \frac{1}{4 R^2} (x'^2 + y'^2 \pm 2 n x' y') + \dots$$

si $x' = 0$ ou $y' = 0$ le paramètre n est sans influence ce qui confirme la constatation déjà faite; ces considérations sont valables dans un champ limité.

La définition du 2^e faisceau est moins simple; pour la Suisse il y a quatre points saillants à la périphérie (Chancy, Bâle, Fribourg, Grenchen). Le lieu des centres des coniques circonscrites à ce quadrilatère est une conique. Il faut chercher, dans ce faisceau, l'ellipse circonscrite au plus petit carré. Les praticiens ne procèdent jamais par voie analytique mais graphiquement; on trouve:

$$n \cong 0,44 \quad m \leq 1,00012 \quad \frac{b}{a} \cong 1,6$$

Le centre est dans le voisinage de Hasleberg; cette ellipse est dite isomètre. Théoriquement G. Darboux a traité magistralement ce problème en rendant aussi petite que possible la valeur moyenne du carré du gradient de Log. m pour le territoire mesuré. Ce critère sera discuté plus à fond ci-après.

Il y a une infinité d'isomètres; le méridien $\lambda = 0$ n'est pas, ici, un axe de symétrie. On préfère renoncer à un système dont l'axe des x concide avec le méridien central à cause du gain réalisé quant à la valeur de m .

Pour un côté $P_1 P_2$ d'un réseau géodésique on a, formule connue:

$$(5) \quad m_{\text{moy}} = \frac{1}{6} (m_1 + 4 m_0 + m_2) \quad (m_0 \text{ au milieu de } P_1 P_2)$$

Altérations de courbure. Pour étudier plus à fond le problème assez complexe posé il faut faire intervenir à la fois les altérations, non seulement linéaires mais aussi de courbure géodésique. Cela nous conduira à énoncer deux critères, le premier déjà mentionné, pouvant être appelé de G. Darboux.

La formule initiale connue pour la courbure C est:

$$(6) \quad C = (dz : ds) = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta m}{\delta x} \sin z - \frac{\delta m}{\delta y} \cos z \right) \cong \frac{1}{2 R^2} \times \\ \times \left\{ (1 + n) x \sin z - (1 - n) y \cos z \right\}$$

z étant l'azimut de la transformée plane, z' étant l'azimut de la corde; pour une géodésique issue de l'origine O il n'est en général pas nécessaire de faire la discrimination entre z et z' ou entre s et $s' = OP$ (voir figure).

$$(7) \quad \int_0^P dz = |r_1| + |r_2| = \frac{s'^2}{4 R^2} n \sin 2z' + \dots$$

$$\text{en radians} \quad x = OP \cos z' \quad y = OP \sin z'$$

A l'origine il y a un point d'inflexion, pour la géodésique OP .

Considérons un contour fermé $OP_1 P_2 O$; l'altération totale de courbure géodésique, en projection conforme, est indépendante du paramètre n (Théorème de Gauss-Bonnet); il en est de même pour le contour non fermé $P_1 OP_2$ si on a:

$$(8) \quad s'^2 \sin 2z' = \text{constante} \quad (xy = \text{constante})$$

qui est l'équation d'une hyperbole équilatère dont $P_1 P_2$ est alors une corde; pour celle-ci, même si $P_1 P_2 = ds$, le paramètre n ne joue pas de rôle.

De plus, dans la formule (6), remplaçons z par $z \pm 90^\circ$ d'où une valeur C' ; on obtient

$$(9) \quad C^2 + C'^2 = C_m^2 = \left(\frac{1}{2 R^2} \right)^2 \left\{ (1 + n)^2 x^2 + (1 - n)^2 y^2 \right\} \text{ (maximum)}$$

On sait en effet que, numériquement, C varie comme les cordes d'un cercle en un point donné (indicateur de l'altération de courbure (voir [3]).

Enfin, des formules (2) et (6) on déduit facilement:

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1+n}{1-n} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{pour la tangente à l'isomètre (C maximum)}$$

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-n}{1+n} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{pour la normale à l'isomètre (C = 0)}$$

La tangente peut coïncider avec la direction de courbure indépendante de n . On possède maintenant tous les éléments pour définir les critères

Premier critère (G. Darboux)

Second critère

Ellipse périphérique $m < 1,00012$

Ellipse périphérique $C_m^2 = \text{constante}$

$$n = 0,44; \quad \frac{1+n}{1-n} = 1,6^2$$

$$n = 0,23; \quad \frac{1+n}{1-n} = 1,6 \quad m < 1,00016$$

La seconde solution procure un avantage pour C_m (gain 13%).

La valeur moyenne du carré du gradient de $\text{Log. } m$ est donc l'élément choisi par G. Darboux; il aurait obtenu le même résultat avec la moyenne de C_m^2 .

Une valeur particulièrement intéressante est $n = 0$ à appliquer quand on a une calotte à projeter; le plan des x, y est sécant par rapport à la calotte. La projection est dite par rayons vecteurs réciproques, solution très connue.

Points d'inflexion. Quand $n = 0$ ou $n = 1$ le calcul est simple; admettons la valeur intermédiaire $n = 0,5$ voisine de celle appliquée ci-dessus ($n = 0,44$)

<i>Nœuds</i>	x	y	
P_1	+ 32,7 km	+ 76,6 km	($C = 0$ en P_0)
P_0	+ 50,0 km	+ 86,6 km	La transformée est normale en P_0
P_2	+ 67,3 km	+ 96,6 km	à l'isomètre $m = \text{constante}$

Altération de courbure géodésique ($n = 0,5$)

Contour OP_1P_0O

Contour OP_2P_0O

Côté OP_1 — 3"17

Côté OP_2 — 5"49

Côté P_1P_0 + 0"22

Côté P_2P_0 — 0"22

Côté P_0O + 5"49

Côté P_0O + 8"25

+ 2"54

+ 2"54

Il est fait application du théorème de Gauss-Bonnet et de la formule (7)

Ce cas est simple; un autre, plus général, fut traité récemment (voir [5]).

Influence du paramètre n . Les formules (6) à (9) montrent cette influence sur l'altération de courbure géodésique; qu'en est-il pour l'altération linéaire. Convertissons en coordonnées polaires la formule (2):

$$(12) \quad m - 1 = \frac{s'^2}{4 R^2} \left\{ (1 + n) \cos^2 z' + (1 - n) \sin^2 z' \right\} = \frac{s'^2}{4 R^2} (1 + n \cos 2 z')$$

Calculons le m_{moy} d'après la formule (5); pour une géodésique OP on a:

$$(13) \quad m_{\text{moy}} = \frac{1}{6} \left(1 + 4 \left(1 + \frac{m_P - 1}{4} \right) + m_P \right) = \frac{1}{3} (2 + m_P) \quad m_P \text{ en } P$$

$$(14) \quad \begin{aligned} s' \cdot m_{\text{moy}} &= \frac{1}{3} \left(2 + 1 + \frac{s'^2}{4 R^2} (1 + n \cos 2 z') \right) = \\ &= s' + \frac{s'^3}{12 R^2} (1 + n \cos 2 z') + \dots \end{aligned}$$

ce qu'on pouvait aussi trouver en intégrant à partir de la formule (12); on vérifie que sur les bissectrices des axes de coordonnées ($x^2 = y^2$ ou $2 z' = 90^\circ$ ou 270°) n est sans influence; la formule (4) le prouve aussi.

Toujours pour cette géodésique (voir figure) on a:

$$r_1 = \frac{s'^2}{12 R^2} n \sin 2 z' + \dots \quad r_2 = \frac{s'^2}{6 R^2} n \sin 2 z' + \dots$$

(valeurs absolues en radians)

Considérons le point initial P_0' pour $n = 0$; quand n varie on a deux appoints: le longitudinal de direction OP_0' égal à

$\frac{s'^3}{12 R^2} n \cos 2 z'$ et le transversal par rapport à OP_0' égal, linéairement à

$$r_1 s^1 = \frac{s'^3}{12 R^2} n \sin 2 z'; \text{ la résultante de ces composantes est}$$

$$\frac{s'^3}{12 R^2} n \sqrt{\sin^2 2 z' + \cos^2 2 z'} = n s'^3 / 12 R^2.$$

On voit comment varie l'azimut de ce vecteur issu de P_0' , ainsi que le rôle joué par le paramètre n .

Littérature

- [1] *Baeschlin, F.*: Lehrbuch der Geodäsie (Orell Füssli, Zürich).
- [2] *Darboux, G.*: Construction des cartes (Bulletin sc. mathématiques 1911).
- [3] *Laborde, J.*: Traité des projections (Paris 1932).
- [4] *Ansermet, A.*: Les bases géodésiques de la Suisse (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1937, N° 7).
- [5] *Ansermet, A.*: Application en géodésie du théorème de *Gauss-Bonnet* (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1958, N° 4).