Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 66 (1968)

Heft: 3

Artikel: Zur Frage der erforderlichen Beobachtungsanzahl einer Messungsreihe

Autor: Siemes, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-222289

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DK 528.13

Zur Frage der erforderlichen Beobachtungsanzahl einer Messungsreihe

Von G. Siemes

Bei Untersuchungen geodätischer Instrumente werden häufig Messungsreihen beobachtet, um Genauigkeitsangaben zum Beispiel der Zieleinstellung oder der Ableseeinrichtung vornehmen zu können. Die Aussagekraft eines aus einer Messungsreihe ermittelten Genauigkeitswertes (zum Beispiel mittleren Fehlers) hängt wesentlich von der *richtig gewählten Anzahl* der Beobachtungen je Messungsreihe ab. Während man früher den Auswerteaufwand möglichst niedrig halten wollte und sich daher mit Messungsreihen geringen Umfangs zufriedengab (10 oder 20 Beobachtungen/Reihe, vgl. [5]), geht heute, da bei elektronischer Datenverarbeitung auch ein großes Beobachtungsmaterial keine Schwierigkeit bereitet, die Tendenz dahin, den Gesetzen der mathematischen Statistik entsprechend, umfangreiche Beobachtungsreihen zu fordern. So kommt zum Beispiel Klappstein [4] zum Teil auf 200 Messungen/Reihe. Der Verfasser hat rund 500 Messungsreihen ausgewertet, die von 25 Beobachtern zu verschiedenen Genauigkeitsuntersuchungen gemessen worden sind. Im folgenden soll zunächst kurz die Frage der richtigen Anzahl der Beobachtungen je Messungsreihe nach statistischen Gesichtspunkten behandelt werden. Anschließend wird das Problem von der praktischen Seite unter Berücksichtigung von Anpassungs- und Ermüdungserscheinungen des Beobachters erörtert.

Mit Hilfe der mathematischen Statistik kann man für die aus einer Messungsreihe zu bestimmenden Größen, zum Beispiel für den mittleren Fehler, Konfidenzintervalle angeben. Der Betrag eines solchen Invervalls hängt von der gewählten statistischen Sicherheit (zum Beispiel 95 %) und wesentlich von der Anzahl der Beobachtungen der Reihe ab. Umgekehrt läßt sich bei vorgegebenem Vertrauensintervall sowie bei vorgegebener statistischer Sicherheit die erforderliche Anzahl der Beobachtungen je Messungsreihe festlegen. Die Formel für das Konfidenzintervall eines mittleren Fehlers einer normalverteilten Reihe lautet:

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^{2\,n-1};\,P\%}} \leqq \sigma \leqq \sqrt{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^{2\,n-1};\,Q\%}}\right) \quad [3] \qquad (1)$$

σ = unbekannter mittlerer Fehler der Grundgesamtheit

S = nach der Formel $\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$ geschätzter mittlerer Fehler der Grundgesamtheit

$\chi^{2\,n-1};\,P\%$ = $P\%$ Fraktile –

$\chi^{2\,n-1};\,Q\%$ = $Q\%$ Fraktile der χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden

Eine ältere, leichter zu rechnende Formel zur Festlegung des Vertrauensintervalls eines mittleren Fehlers ist:

$$m_m = \pm \sqrt{\frac{S}{2\,(n-1)}} \text{ n. [2]} \qquad (2)$$

Dies ist die Formel für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers. Die Bezeichnungen sind entsprechend Formel (1) gewählt. In Tabelle 1 sind für $\sigma = 1$ die Vertrauensintervalle für verschiedene Beobachtungsanzahlen n sowie für verschiedene statistische Sicherheiten jeweils nach Formel (1) und nach Formel (2) berechnet. Man sieht, nach Formel (2) wird ein Konfidenzintervall mit einer statistischen Sicherheit von rund 85 % angegeben. Die χ^2-Werte, die zur Berechnung der Tabelle 1 benötigt worden sind, sind dem Tafelwerk zur Statistik von D. B. Owen entnommen[6].

Tabelle 1

$(P-Q)$ % statistischer Sicherheit	Anzahl der Beob./R.	Konfidenzintervall			
		nach Formel (1)			nach Formel (2) zur Vereinfachung nur ≦
		≦	σ	≦	
99	25	0,73	1	1,49	1,14
95	25	0,78	1	1,32	
90	25	0,81	1	1,24	
80	25	0,85	1	1,12	
99	50	0,79	1	1,30	1,10
95	50	0,84	1	1,20	
90	50	0,86	1	1,15	
80	50	0,89	1	1,08	
99	100	0,84	1	1,20	1,07
95	100	0,88	1	1,13	
90	100	0,90	1	1,10	
80	100	0,92	1	1,05	
99	200	0,88	1	1,13	1,05
95	200	0,91	1	1,09	
90	200	0,92	1	1,07	
80	200	0,94	1	1,03	

Mit Hilfe des Fisher-Testes kann man mit vorgegebener statistischer Sicherheit die Frage beantworten, ob zwei mittlere Fehler S_1 und S_2 sich signifikant unterscheiden. Die Umkehrung der Fragestellung läßt sich ebenfalls mit der Statistik beantworten, und zwar die Frage: Wie viele Beobachtungen sind erforderlich, um mit vorgegebener statistischer Si-

cherheit sagen zu können: zwei mittlere Fehler, die um P % differieren, stammen aus zwei verschiedenen Grundgesamtheiten. Für die Berechnung bildet man den Fisher-Quotienten:

$$F_{m-1,\, n-1} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{3}$$

S_i — = geschätzter mittlerer Fehler der Grundgesamtheit

m, n = Anzahl der Beobachtungen in den beiden zu vergleichenden Messungsreihen

$F_{m-1,\, n-1}$ = aus einer statistischen Tabelle mit den Eingängen — $m - 1$ und $n - 1$ (= Freiheitsgrad) sowie statistische Sicherheit – zu entnehmende Fisher-Größe

Nur wenn der Quotient nach Formel (3) den entsprechenden Tabellenwert übersteigt, unterscheiden sich S_1 und S_2 signifikant. Die folgende Tabelle gibt für einige Beobachtungsanzahlen n (die Beobachtungsanzahlen in den beiden zu vergleichenden Reihen sollen gleich sein; das heißt $m = n$) die Fisher-Größen für verschiedene statistische Sicherheiten an:

Tabelle 2

Beobachtungsanzahl	Statistische Sicherheit				
$n = m$	75%	90%	95%	97,5%	99%
25	1,31	1,69	1,96	2,24	2,62
50	1,21	1,44	1,60	1,76	1,96
100	1,14	1,28	1,38	1,46	1,58
200			1,26	1,32	1,39
500			1,16	1,19	1,23

Die statistischen Werte der Tabelle 2 sind für $n = 25$ bis $n = 100$ dem Tafelwerk von Owen [6] und für $n = 200$ sowie $n = 500$ der unter [1] verzeichneten Literatur entnommen. Will man beispielsweise mit zwei mittleren Fehlern, die sich um 20 % dem Betrag nach unterscheiden, statistisch zu 95 % gesicherte Aussagen vornehmen, so müssen nach Tabelle 2 die Messungsreihen aus mehr als 200 Beobachtungen bestehen.

Ebensoviel Gewicht wie auf die statistische Seite des Problems der erforderlichen Beobachtungsanzahl je Messungsreihe sollte man auf die physische und physiologische Seite des Problems legen.

Der Beobachter wird im allgemeinen im Verlauf einer umfangreichen Messungsreihe durch ein Sicheinstellen auf eine bestimmte Beobachtungstechnik anfänglich in der Meßgenauigkeit stärker variieren, was mit Anpassungserscheinung bezeichnet werden soll. Ferner nimmt manchmal die Beobachtungsgüte schon früh infolge nachlassender Konzentration nach und nach ab, was mit Ermüdungserscheinung bezeichnet werden soll. Am günstigsten bricht man danach eine Messungsreihe ab, wenn die anfänglich stärker wirksamen Anpassungserscheinungen sich kaum mehr auf die aus der Messungsreihe zu bestimmenden Werte (zum Beispiel Mittelwert und mittlerer Fehler) auswirken und andererseits die Ermüdungserscheinungen noch weniger ins Gewicht fallen. In Abbildung 1 sind aus Messungsreihen zu je 100 Beobachtungen, die von verschiedenen Beobachtern bei gleichen äußeren Bedingungen gemessen worden sind, die nachstehenden Werte aufgetragen:

1. Der fortlaufende Mittelwert, beginnend mit dem Mittelwert aus 10 Beobachtungen, dann aus 12 Beobachtungen usw. (punktiert dargestellt, vgl. Abb. 1).
2. Der fortlaufende mittlere Fehler in gleicher Folge wie 1 (ausgezogene Kurve).
3. Eine noch zu definierende Anpassungsgröße (gestrichelter Linienzug).

Zur Definition der Anpassungsgröße (abgekürzt = AP):

Wenn im Verlauf einer Messungsreihe der nach 1 gebildete Mittelwert näherungsweise konstant bleibt, der mittlere Fehler dagegen in etwa stetig zu- oder abnimmt, ist dies auf die stetig schlechtere oder verbesserte Einstellung des Beobachters zurückzuführen. Eine dem Betrag nach gleiche Änderung des Mittelwertes und des mittleren Fehlers ist hingegen als Folge systematischen Einwirkens eines Parameters zu deuten.

$$AP = \frac{mF_{i+k} - mF_i}{M_{i+k} - M_i} \tag{4}$$

Um die fortlaufend zu berechnenden AP-Werte ihrer Größe nach in Bezug bringen zu können, muß in Formel (4) sich die Größe n (= Anzahl der Beobachtungen/Reihe) kürzen. Daher ist:

$$mF_i = \frac{[VV]}{i}$$

$$M_i = \frac{[l]}{i}$$

Es bedeuten:

l = beobachteter Wert
V = Abweichung des beobachteten Wertes vom Mittelwert

Damit folgt nun für AP:

$$\mathrm{AP} = \frac{[VV]_{i+k} - [VV]_i}{[l]_{i+k} - [l]_i} \tag{5}$$

Die Indexgröße k in der Formel (5) muß so groß gewählt werden, daß zufällig größere Beobachtungsstreuungen einzelner Teile der Messungsreihe den Trend von AP nicht überdecken. Für die in Abbildung 1 gezeigten Beispiele ist die fortlaufende Berechnung des AP-Wertes wie folgt durchgeführt worden:

AP_1 ist gerechnet für die Indexwerte $i = 10$ und $i + k = 16$.
AP_2 bei $i = 16$ und $i + k = 22$ ...

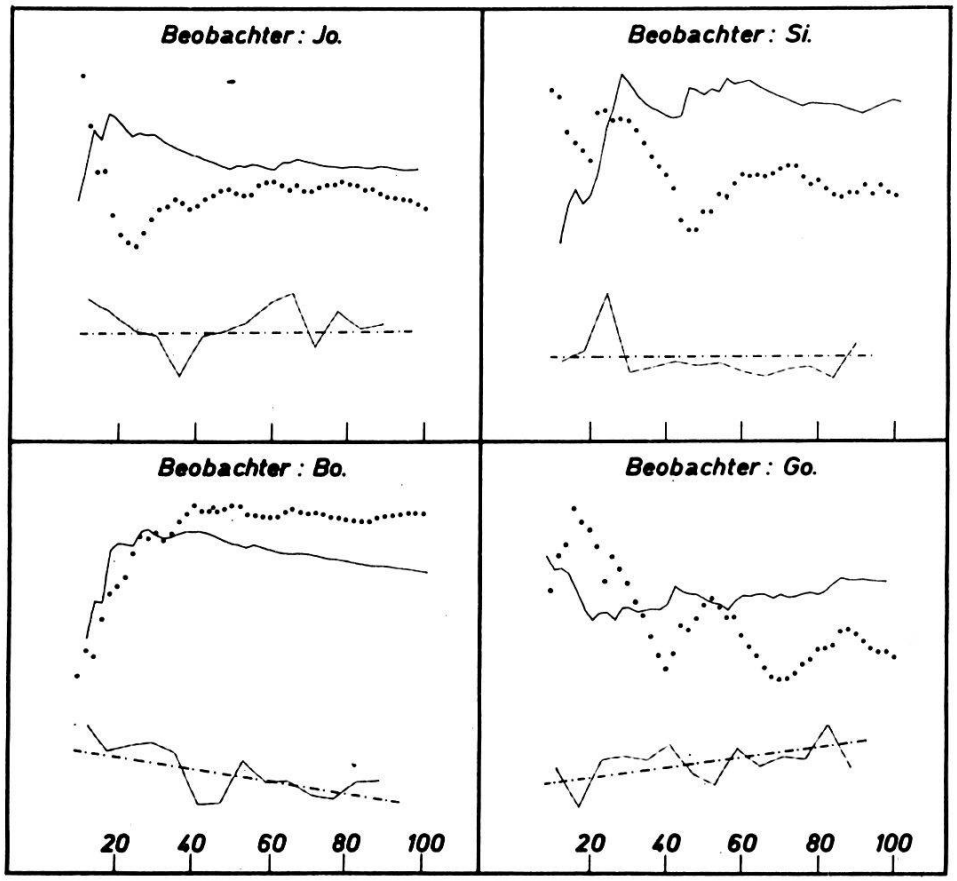

Abb. 1

Da nur der Trend der in Abbildung 1 dargestellten Kurven von Interesse ist, sind alle Teilbilder ungeachtet der jeweils verschiedenen Beträge ihrer Mittelwerte, ihrer mittleren Fehler sowie ihrer AP-Größen auf die gleiche Dimension gebracht worden. Die beiden Messungsreihen der Beobachter Si und Jo sind charakteristisch für den überwiegenden Teil der wie oben analysierten Messungsreihen. Mit Hilfe der AP-Größen sind keine stetigen Anpassungs- oder Ermüdungserscheinungen nachzuweisen.

Ab ungefähr der 40. Beobachtung ändern sich fortlaufender Mittelwert und fortlaufender mittlerer Fehler im Verhältnis zu ihrer Gesamtänderung nur geringfügig. Danach hätten auch 50 Beobachtungen ausgereicht, um zu den gleichen Mittelwerten und mittleren Fehlern wie bei deren Berechnung aus 100 Beobachtungen zu gelangen. Der Trend der dargestellten Kurven läßt die Extrapolation zu, daß bei einer größeren Anzahl als 100 Beobachtungen Mittelwert und mittlerer Fehler kaum anders als bei 50 Messungen ausfallen werden.

Beim Beobachter Bo ist im Verlauf der Reihe eine Anpassungserscheinung festzustellen. Der fortlaufende Mittelwert ist zwar ab ungefähr der 40. Beobachtung konstant; hingegen reichen zur sicheren Berechnung eines mittleren Fehlers hier auch 100 Beobachtungen nicht.

Das letzte Beispiel zeigt bei der Reihe des Beobachters Go eine Ermüdungserscheinung. 100 Messungen sind für diesen Beobachter schon zu anstrengend.

Zusammenfassend soll festgestellt werden, daß, wie die obigen Beispiele gezeigt haben, für die Bestimmung des Mittelwertes sowie des mittleren Fehlers aus einer normalverteilten Messungsreihe 50 Beobachtungen meistens ausreichen. Man sollte bei umfangreicheren Untersuchungen stichprobenartig einige Messungsreihen wie vorhin beschrieben auswerten. Eventuell dadurch festgestellte Anpassungs- oder Ermüdungserscheinungen können dann durch Änderung der Messungsanordnung oder durch Einschalten von Beobachtungspausen vermieden werden.

Literaturverzeichnis

[1] *Graf/Henning/Stange:* Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1966.

[2] *Helmert, F.R.:* Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Berlin 1907.

[3] *Heinold-Gaede:* Ingenieurstatistik. Oldenburg-Verlag, München 1964.

[4] *Klappstein, H.:* Beitrag zur Zielfehlerbestimmung bei Variation von Farbe und Form der Zielmarke. Diss. Dresden 1963.

[5] *Noetzli, A.:* Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernröhren. Diss. ETH Zürich 1915.

[6] *Owen, D.B.:* Handbook of Statistical Tables. London, Addison-Werley, 1962.