Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Autor(en): **Nádenik, Z.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **66 (1968)**

Heft 6

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-222304

DK 513.645:513.51/.55

Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Z. Nádeník, Prag

Zusammenfassung

Kurze Herleitung der Konstruktion des hyperoskulierenden Kegelschnittes der Klothoide und Kriterium, wann dieser eine Ellipse beziehungsweise Parabel oder Hyperbel ist. Der hyperoskulierende Kegelschnitt läßt den Ansatz rasch konvergierender Näherungsformeln für Absteckungen von Sehnen und Tangenten der Klothoide zu.

Im folgenden werden für die Klothoide K mit dem Parameter A die Bezeichnungen nach Abbildung 1 verwendet. (Wenn B zwischen B_0 und dem Wendepunkt W liegt, so ist $\sigma < 0$.)

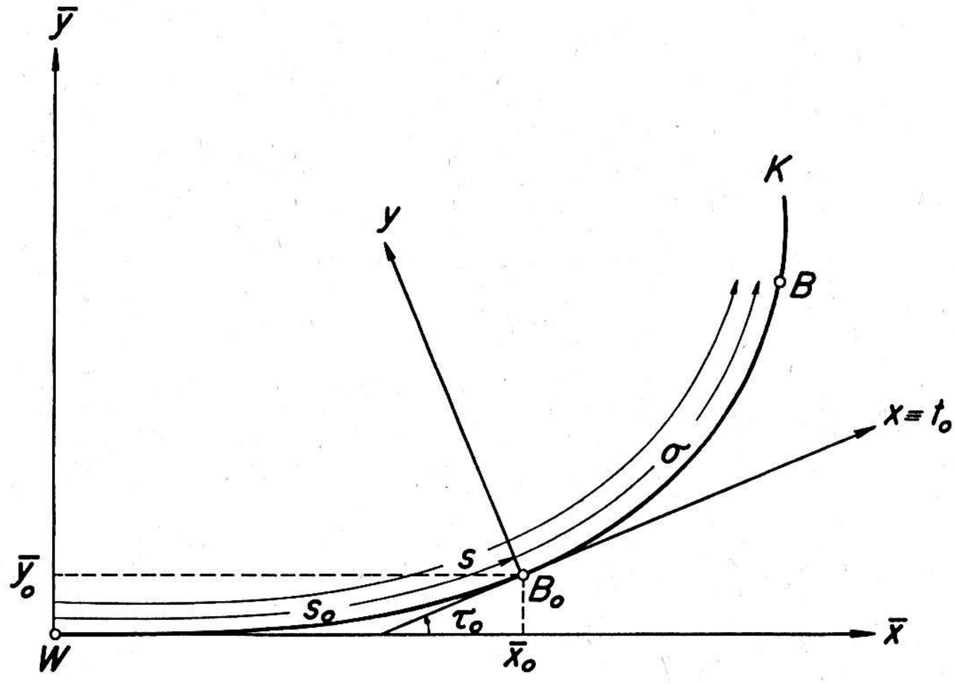


Abb. 1

Die Transformationsgleichungen für die Koordinaten x, y und $\bar{x}$, $\bar{y}$ des Punktes B sind

$$\begin{aligned} x &= (\bar{x} - \bar{x}_0) \cos\tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \sin\tau_0 \\ y &= -(\bar{x} - \bar{x}_0) \sin\tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \cos\tau_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Die fundamentale Parameterdarstellung von K ist:

$$\bar{x} = \int_0^s \cos \frac{l^2}{2\,A^2}\, dl\,,\ \bar{y} = \int_0^s \sin \frac{l^2}{A^2}\, dl \tag{2}$$

Folglich gilt

$$\bar{x}_0 = \int_0^{s_0} \cos \frac{l^2}{2\,A^2}\, dl\,,\ \bar{y} = \int_0^{s_0} \sin \frac{l^2}{2\,A^2}\, dl \tag{3}$$

mit τ_0 im Bogenmaß

$$\tau_0 = s_0{}^2/2\,A^2 \tag{4}$$

Nach dem Einsetzen von (2) bis (4) in (1) erhält man

$$x = \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2}{2\,A^2}\, dl \cdot \cos \frac{s_0{}^2}{2\,A^2} + \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2}{2\,A^2}\, dl \cdot \sin \frac{s_0{}^2}{2\,A^2}$$

$$= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2 - s_0{}^2}{2\,A^2}\, dl \tag{5}$$

$$y = \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2 - s_0{}^2}{2\,A^2}\, dl\,.$$

Durch die Substitution $l = \lambda - s_0$ kann man die Integrale rechts in (5) wie folgt umformen:

$$x = \int_0^\sigma \cos \frac{\lambda\, s_0 + \frac{1}{2}\lambda^2}{A^2}\, d\lambda\,,\ y = \int_0^\sigma \sin \frac{\lambda\, s_0 + \frac{1}{2}\lambda^2}{A^2}\, d\lambda\,; \tag{6}$$

denn bei $l = s_0$ beziehungsweise $l = s$ gilt offensichtlich $\lambda = 0$ beziehungsweise $\lambda = s - s_0 = \sigma$.

Entwickelt man die Integranden in (6) nach den bekannten Formeln in Potenzreihen und integriert dann, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \sigma - \frac{s_0{}^2}{3!\,A^4}\,\sigma^3 + [4]\,, \\ y &= \frac{s_0}{2!\,A^2}\,\sigma^2 + \frac{1}{3!\,A^2}\,\sigma^3 - \frac{s_0{}^3}{4!\,A^6}\,\sigma^4 + [5] \end{aligned} \tag{7}$$

Der nicht ausgeartete Kegelschnitt, welcher im Punkt B_0 mit der Klothoide K eine gemeinsame Tangente hat, besitzt die Gleichung

$$a\,x^2 + 2\,b \times y + c\,y^2 + 2\,y \neq 0 \tag{8}$$

wo $a, b, c =$ konst., $a = 0$.

Das formale Einsetzen aus (7) in (8) gibt nach ganz einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned}&\sigma^2 \left\{ a + \frac{s_0}{A^2} \right\} + \sigma^3 \left\{ b\,\frac{s_0}{A^2} + \frac{1}{3\,A^2} \right\} + \\ &\quad + \sigma^4 \left\{ -\,a\,\frac{s_0{}^2}{3\,A^4} + b\,\frac{1}{3\,A^2} + c\,\frac{s_0{}^2}{4\,A^4} - \frac{s_0{}^3}{12\,A^6} \right\} + [4]\end{aligned} \tag{9}$$

Folglich hat der Kegelschnitt (8) mit der Klothoide K im Punkt B_0 eine Berührung 4. Ordnung (das heißt «fünfpunktige» Berührung) dann, und nur dann, wenn

$$a = -\,\frac{s_0}{A^2}\,,\quad b = -\,\frac{1}{3\,s_0}\,,\quad c = \frac{4\,A^4 - 9\,s_0{}^4}{9\,A^2\,s_0{}^3} \tag{10}$$

Die eingehendere Untersuchung zeigt, daß eine höhere Berührung unmöglich ist. Der Kegelschnitt (8) mit den nach (10) bestimmten Koeffizienten – das heißt der sogenannte *hyperoskulierende Kegelschnitt* – ersetzt die Klothoide in einer Umgebung ihres vom Wendepunkt verschiedenen Punktes B_0 am besten*.

Der Kegelschnitt (8) ist eine Ellipse beziehungsweise eine Parabel beziehungsweise eine Hyperbel, je nachdem $b^2 - ac < 0$ beziehungsweise $= 0$ beziehungsweise > 0. Dementsprechend ist nach (10) für

$$A \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{9}} < s_0 \text{ beziehungsweise } = s_0 \text{ beziehungsweise } > s_0$$

der hyperoskulierende Kegelschnitt $\varkappa_0$ von K im Punkt B_0 eine Ellipse beziehungsweise Parabel beziehungsweise Hyperbel.

Nach dem Einsetzen aus (10) in (8) kann man die Gleichung des hyperoskulierenden Kegelschnittes $\varkappa_0$ folgendermaßen umformen:

$$y\,(y - 3\,\gamma_0\,x) - 9\,\tau_0{}^2\,(x^2 + y^2 - 2\,R_0\,y) = 0 \tag{11}$$

wo

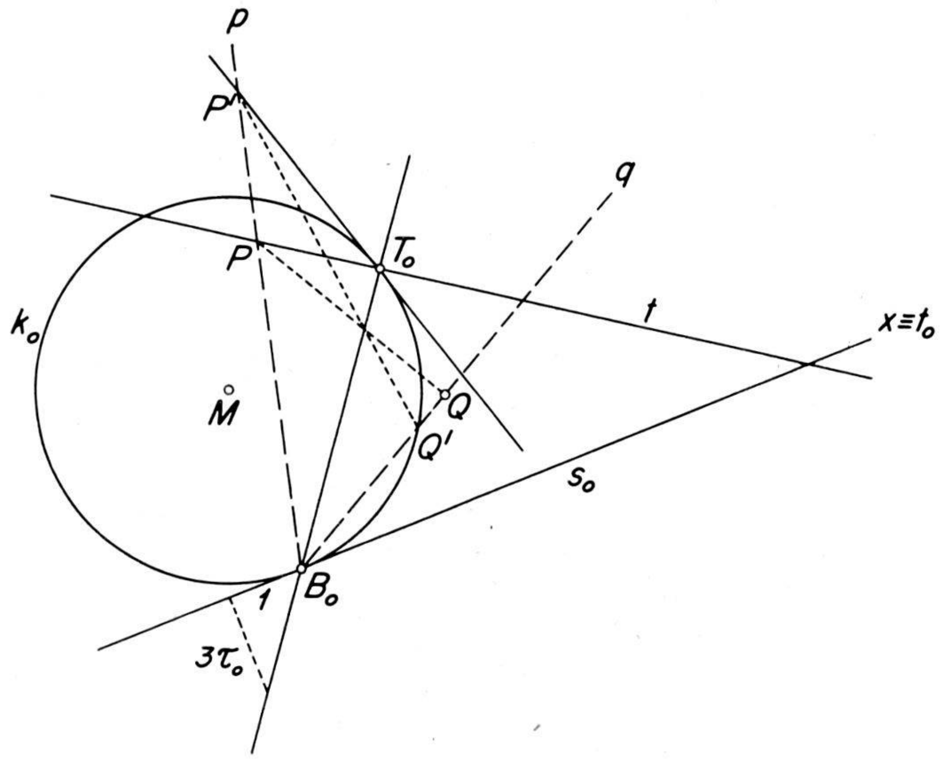
$$R_0 = \frac{A^2}{s_0} \tag{12}$$

---

* Literaturhinweis: 4. Abschnitt des Aufsatzes «Über Formeln zur Absteckung von Klothoidenpunkten durch rechtwinkelige Koordinaten ...». Von *Z. Nádeník* in Práce ČVUT, IV/2, Praha 1964.

der Krümmungsradius von K im Punkt B_0 ist und τ_0 den durch (4) gegebenen Winkel der Wendetangente mit der Tangente t_0 von K im Punkt B_0 bezeichnet.

Die Gerade $y = 3\,\tau_0\,x$ schneidet den in B_0 konstruierten Krümmungskreis k_0 von K außer in B_0 noch im Punkt T_0, welcher nach (11) ein Punkt des hyperoskulierenden Kegelschnittes $\varkappa_0$ ist. Die Tangente t von $\varkappa_0$ in T_0 hat nach (11) die Gleichung $x + (\cdot)\,y - 2\,R_0\,\tau_0 = 0$. Die Tangenten t und t_0 schneiden sich deshalb nach (12) und (4) im Punkt mit der Abszisse s_0. Aus diesen Angaben kann man schon den Punkt T_0 und die Tangente t leicht konstruieren (s. Abb. 2).



Die projektive Geometrie der Kegelschnitte bietet nun für den durch den Punkt T_0 mit der Tangente t und durch den Punkt B_0 mit dem Krümmungskreis k_0 eindeutig bestimmten hyperoskulierenden Kegelschnitt $\varkappa_0$ folgende einfache Konstruktion seiner weiteren Punkte (s. Abb. 2): Es sei p eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von der Verbindungslinie $B_0\,T_0$ verschieden ist. Es seien P und P' die Schnittpunkte der Geraden p mit den Tangenten des Kegelschnittes $\varkappa_0$ und des Kreises k_0 im Punkt T_0. Es sei ferner q eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von den Geraden t_0, p verschieden ist; ihre von B_0 verschiedenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt $\varkappa_0$ und dem Kreis k_0 bezeichnen wir mit Q und Q'. Den gesuchten Punkt Q von $\varkappa_0$ konstruieren wir unmittelbar aus der Bedingung, daß der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P'Q'$ und PQ auf der Verbindungslinie $B_0\,T_0$ liegen muß.