

Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Autor(en): **Nádenik, Z.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **66 (1968)**

Heft 6

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-222304>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Z. Nádeník, Prag

Zusammenfassung

Kurze Herleitung der Konstruktion des hyperoskulierenden Kegelschnittes der Klothoide und Kriterium, wann dieser eine Ellipse beziehungsweise Parabel oder Hyperbel ist. Der hyperoskulierende Kegelschnitt läßt den Ansatz rasch konvergierender Näherungsformeln für Absteckungen von Sehnen und Tangenten der Klothoide zu.

Im folgenden werden für die Klothoide K mit dem Parameter A die Bezeichnungen nach Abbildung 1 verwendet. (Wenn B zwischen B_0 und dem Wendepunkt W liegt, so ist $\sigma < 0$.)

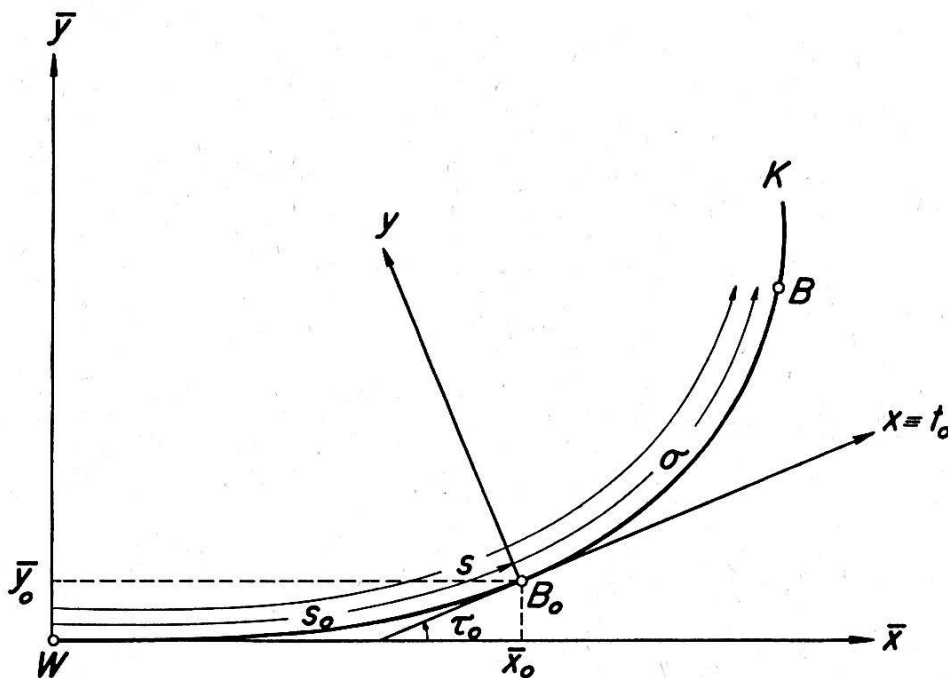


Abb. 1

Die Transformationsgleichungen für die Koordinaten x , y und \bar{x} , \bar{y} des Punktes B sind

$$\begin{aligned} x &= (\bar{x} - \bar{x}_0) \cos \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \sin \tau_0 \\ y &= -(\bar{x} - \bar{x}_0) \sin \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \cos \tau_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Die fundamentale Parameterdarstellung von K ist:

$$\bar{x} = \int_0^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^s \sin \frac{l^2}{A^2} dl \quad (2)$$

Folglich gilt

$$\bar{x}_0 = \int_0^{s_0} \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^{s_0} \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \quad (3)$$

mit τ_0 im Bogenmaß

$$\tau_0 = s_0^2 / 2 A^2 \quad (4)$$

Nach dem Einsetzen von (2) bis (4) in (1) erhält man

$$\begin{aligned} x &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \cos \frac{s_0^2}{2 A^2} + \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \sin \frac{s_0^2}{2 A^2} \\ &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl \\ y &= \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch die Substitution $l = \lambda - s_0$ kann man die Integrale rechts in (5) wie folgt umformen:

$$x = \int_0^\sigma \cos \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda, \quad y = \int_0^\sigma \sin \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda; \quad (6)$$

denn bei $l = s_0$ beziehungsweise $l = s$ gilt offensichtlich $\lambda = 0$ beziehungsweise $\lambda = s - s_0 = \sigma$.

Entwickelt man die Integranden in (6) nach den bekannten Formeln in Potenzreihen und integriert dann, so ergibt sich

$$x = \sigma - \frac{s_0^2}{3! A^4} \sigma^3 + [4], \quad (7)$$

$$y = \frac{s_0}{2! A^2} \sigma^2 + \frac{1}{3! A^2} \sigma^3 - \frac{s_0^3}{4! A^6} \sigma^4 + [5]$$

Der nicht ausgeartete Kegelschnitt, welcher im Punkt B_0 mit der Klothoide K eine gemeinsame Tangente hat, besitzt die Gleichung

$$a x^2 + 2 b \times y + c y^2 + 2 y = 0 \quad (8)$$

wo $a, b, c = \text{konst.}, a = 0$.

Das formale Einsetzen aus (7) in (8) gibt nach ganz einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left\{ a + \frac{s_0}{A^2} \right\} + \sigma^3 \left\{ b \frac{s_0}{A^2} + \frac{1}{3 A^2} \right\} + \\ & + \sigma^4 \left\{ -a \frac{s_0^2}{3 A^4} + b \frac{1}{3 A^2} + c \frac{s_0^2}{4 A^4} - \frac{s_0^3}{12 A^6} \right\} + [4] \end{aligned} \quad (9)$$

Folglich hat der Kegelschnitt (8) mit der Klothoide K im Punkt B_0 eine Berührung 4. Ordnung (das heißt «fünfpunktige» Berührung) dann, und nur dann, wenn

$$a = -\frac{s_0}{A^2}, \quad b = -\frac{1}{3 s_0}, \quad c = \frac{4 A^4 - 9 s_0^4}{9 A^2 s_0^3} \quad (10)$$

Die eingehendere Untersuchung zeigt, daß eine höhere Berührung unmöglich ist. Der Kegelschnitt (8) mit den nach (10) bestimmten Koeffizienten – das heißt der sogenannte *hyperoskulierende Kegelschnitt* – ersetzt die Klothoide in einer Umgebung ihres vom Wendepunkt verschiedenen Punktes B_0 am besten*.

Der Kegelschnitt (8) ist eine Ellipse beziehungsweise eine Parabel beziehungsweise eine Hyperbel, je nachdem $b^2 - ac < 0$ beziehungsweise $= 0$ beziehungsweise > 0 . Dementsprechend ist nach (10) für

$$A \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{9}} < s_0 \text{ beziehungsweise } = s_0 \text{ beziehungsweise } > s_0$$

der hyperoskulierende Kegelschnitt κ_0 von K im Punkt B_0 eine Ellipse beziehungsweise Parabel beziehungsweise Hyperbel.

Nach dem Einsetzen aus (10) in (8) kann man die Gleichung des hyperoskulierenden Kegelschnittes κ_0 folgendermaßen umformen:

$$y (y - 3 \gamma_0 x) - 9 \tau_0^2 (x^2 + y^2 - 2 R_0 y) = 0 \quad (11)$$

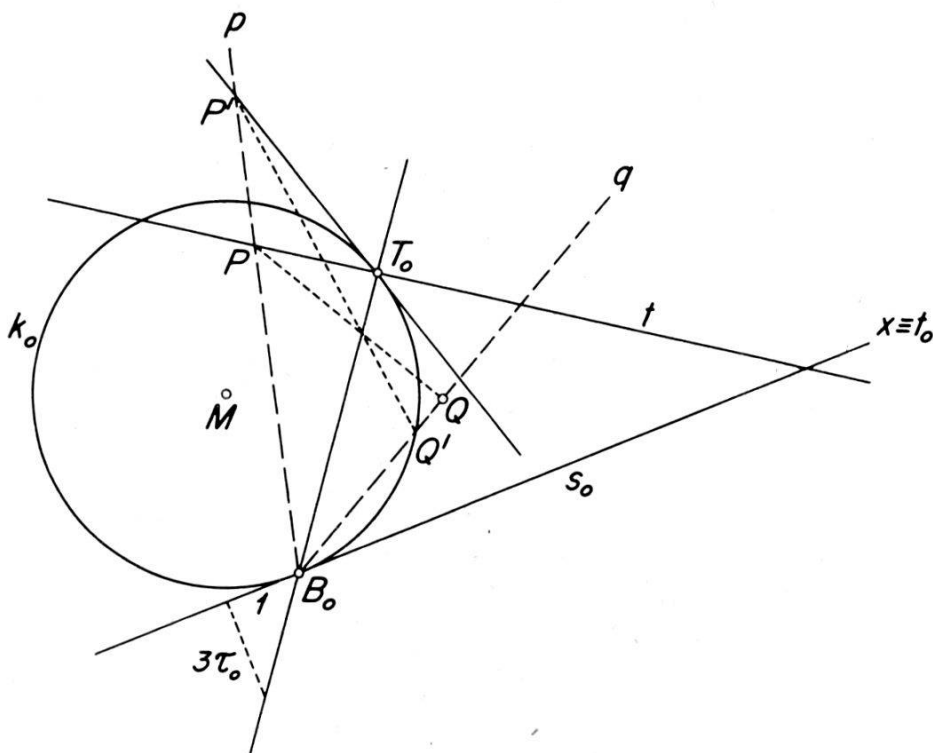
wo

$$R_0 = \frac{A^2}{s_0} \quad (12)$$

* Literaturhinweis: 4. Abschnitt des Aufsatzes «Über Formeln zur Absteckung von Klothoidenpunkten durch rechtwinkelige Koordinaten ...». Von Z. Nádeník in *Práce ČVUT, IV/2, Praha 1964*.

der Krümmungsradius von K im Punkt B_0 ist und τ_0 den durch (4) gegebenen Winkel der Wendetangente mit der Tangente t_0 von K im Punkt B_0 bezeichnet.

Die Gerade $y = 3 \tau_0 x$ schneidet den in B_0 konstruierten Krümmungskreis k_0 von K außer in B_0 noch im Punkt T_0 , welcher nach (11) ein Punkt des hyperoskulierenden Kegelschnittes κ_0 ist. Die Tangente t von κ_0 in T_0 hat nach (11) die Gleichung $x + (\cdot) y - 2 R_0 \tau_0 = 0$. Die Tangenten t und t_0 schneiden sich deshalb nach (12) und (4) im Punkt mit der Abszisse s_0 . Aus diesen Angaben kann man schon den Punkt T_0 und die Tangente t leicht konstruieren (s. Abb. 2).



Die projektive Geometrie der Kegelschnitte bietet nun für den durch den Punkt T_0 mit der Tangente t und durch den Punkt B_0 mit dem Krümmungskreis k_0 eindeutig bestimmten hyperoskulierenden Kegelschnitt κ_0 folgende einfache Konstruktion seiner weiteren Punkte (s. Abb. 2): Es sei p eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von der Verbindungslinie $B_0 T_0$ verschieden ist. Es seien P und P' die Schnittpunkte der Geraden p mit den Tangenten des Kegelschnittes κ_0 und des Kreises k_0 im Punkt T_0 . Es sei ferner q eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von den Geraden t_0 , p verschieden ist; ihre von B_0 verschiedenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt κ_0 und dem Kreis k_0 bezeichnen wir mit Q und Q' . Den gesuchten Punkt Q von κ_0 konstruieren wir unmittelbar aus der Bedingung, daß der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P'Q'$ und PQ auf der Verbindungslinie $B_0 T_0$ liegen muß.