Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 66 (1968)

Heft: 8

Artikel: Zur Reduktion von Fluggravimeteressungen

Autor: Groten, Erwin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-222310

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 8 · LXVI. Jahrgang **Erscheint monatlich** **15. August 1968**

DK 528.026.3.061.3(203)

Zur Reduktion von Fluggravimetermessungen

Erwin Groten[1]

Zur Bestimmung der Schwereanomalien an der Erdoberfläche aus Fluggravimetermessungen berechnet man gewöhnlich die Schwereanomalien $\Delta g\,(H)$ in der Flughöhe H und ermittelt aus ihnen die entsprechenden Schwereanomalien $\Delta g\,(\sigma)$ auf der Erdoberfläche σ. Da im Außenraum von σ die Funktion Δg analytisch ist, ist diese Fortsetzung nach unten im Prinzip nicht problematisch. Einige Verfahren [5, 2] zur analytischen Fortsetzung eignen sich – zumindest theoretisch (und meistens auch praktisch) – sowohl im Flachland wie im Gebirge; man könnte – theoretisch – im Gebirge natürlich auch unmittelbar die Formeln von Molodensky für den ebenen Fall (siehe zum Beispiel [4], S. 303) unter Verwendung von Flächenbelegungen φ oder ψ auf der Erdoberfläche dafür benützen; aus $\Delta g\,(H)$ ließe sich etwa ψ ermitteln gemäß

$$\Delta g\,(H) = \iint_{\Sigma} \psi \, \frac{H - h}{\bar{r}^3} \, d\Sigma \,, \tag{1}$$

wobei (1) als eine (lineare) Fredholmsche Integralgleichung 1. Art anzusehen ist. In einem Punkte P auf der Erdoberfläche ergibt sich dann $\Delta g\,(P)$ durch Integration

$$\Delta g\,(P) = 2\,\pi\,\psi\,(P) - \iint_{\Sigma} \psi \, \frac{h - h\,(P)}{l^3} \, d\Sigma \,. \tag{2}$$

Die letzte Gleichung ist lediglich eine Näherung der bekannten Beziehung

$$\Delta g\,(P) = 2\,\pi\,\varphi\,(P)\,\cos\alpha\,(P) - \iint_{\sigma} \varphi \, \frac{h - h\,(P)}{r^3} \, d\sigma \tag{3}$$

[1] Veröffentlichung Nr. 52 des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie der Technischen Hochschule München.

mit $\psi = \varphi/\cos\alpha$ und für den Fall $\cos\alpha \doteq 1$. Da dieser Lösungsweg[2] umständlich ist, sollen die Formeln (1) bis (3) gar nicht näher erläutert werden, zumal sie auf den Seiten 301–303 in [4] ausführlich – wenn auch in etwas anderem Zusammenhang – erklärt werden.

In einigen Fällen, wie etwa im Gebirge, bringt die praktische Anwendung der Formeln zur Fortsetzung der Schwereanomalien $\Delta g\,(H)$ auf die Erdoberfläche σ zuweilen Schwierigkeiten mit sich. Dann kann es wesentlich günstiger sein, aus $\Delta g\,(H)$ unmittelbar die Schwereanomalien auf dem Geoid Σ zu berechnen, wobei allerdings Δg durch die Massen hindurch analytisch fortzusetzen ist, falls man auf die Verlagerung der zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid liegenden Massen von vornherein verzichtet. Damit treten im wesentlichen dieselben Probleme auf, die mit der Schwerereduktion nach Bjerhammar verbunden sind. Die entsprechenden theoretischen Schwierigkeiten sind bekannt und wurden mehrfach diskutiert[3]; die Modelluntersuchungen Bjerhammars und seiner Mitarbeiter zeigen aber, daß seine Methode in der Praxis auch dann zu brauchbaren Ergebnissen führen kann, wenn extreme Massenverteilungen vorliegen, das heißt, wenn die Massen M zwischen Geoid und Erdoberfläche so verteilt sind, daß es keine entsprechende Massenanordnung *innerhalb* des Geoides geben kann, die dasselbe Schwerefeld im *Außenraum* der Erdoberfläche σ erzeugt wie die Massen M. Allerdings ist das in [1] u.a. verwendete Massenmodell Nr. 2 (siehe [1], S. 37) nicht ganz so günstig wie andere Modelle, da sich Massenverteilungen *innerhalb* des Geoides angeben lassen, die ähnliche Schwereanomalienfelder erzeugen wie die Massenlinie dieses Modells.

Ganz analoge Probleme treten bei der Frage nach der Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials an der Erdoberfläche auf [3]. Als Ergänzung zu [3] sind die folgenden Ableitungen angebracht; der Einfachheit halber werden dabei «zweidimensionale» Massen verwendet, die in x-Richtung (siehe Abb. 1) von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt sind. Mit etwas größerem Rechenaufwand ließe sich *dasselbe Resultat auch für dreidimensionale Massenanordnungen* finden.

In Abbildung 1 bedeutet σ die Erdoberfläche, Σ' eine ebene horizontale Fläche oberhalb von σ; Σ sei das lokale Geoid, das mit der x–y-Ebene zusammenfällt; es wird hier als ebene Fläche betrachtet (man kann zeigen, daß man bei größerem Rechenaufwand für eine allgemeinere Fläche zu denselben Ergebnissen kommt). Die Schweremessungen vom Flugzeug aus seien in der (horizontalen) Ebene $z = H$ durchgeführt worden. Für die Ebene Σ' gelte $z = H'$; für Σ'' ist also $z = H$.

Nun ersetzen wir die das Schwereanomalienfeld Δg erzeugende Massenverteilung durch eine äquivalente Flächenbelegung $\Delta\varrho$, das heißt eine ideelle störende Schicht, auf der Fläche Σ'. Falls sich die Dichte $\Delta\varrho$ auf dieser Fläche periodisch (mit der Periode $2\,L$) verhält, gilt

---

[2] Für eine ebene Fläche σ ist dieser Weg identisch mit dem in [2], S. 29; auf numerische Fragen soll hier nicht eingegangen werden.

[3] Siehe zum Beispiel [3].

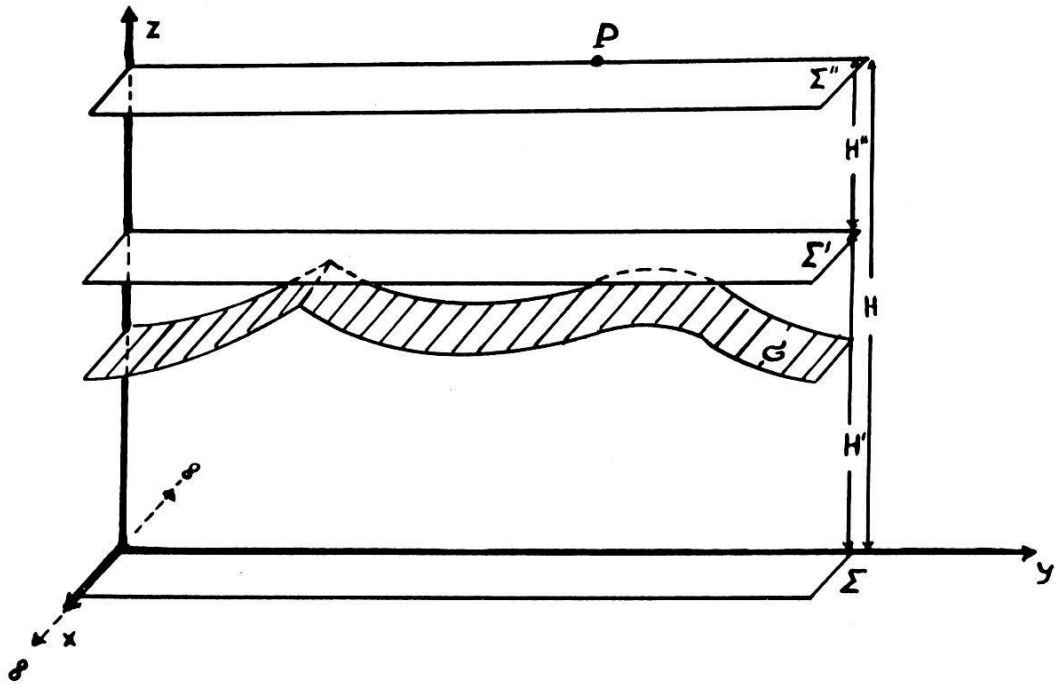

Abb. 1

$$\Delta\varrho\,(y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\,\pi\,y}{L} + B_n \sin\frac{n\,\pi\,y}{L}\right) \tag{4}$$

und für Δg in einem Punkte P der Σ''-Ebene

$$\Delta g = 2\,k^2\,H'' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\varrho\,(y)\,dy}{(y - y_P)^2 + H''^2}, \tag{5}$$

wobei k^2 die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Setzt man (4) in (5) ein und integriert, so folgt[4]

$$\Delta g = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\,\pi\,y_P}{L} + \beta_n \sin\frac{n\,\pi\,y_P}{L}\right), \tag{6}$$

wobei

$$\alpha_n = 2\,\pi\,k^2\,A_n \exp\left\{-\,n\,\pi\,H''/L\right\} \tag{7}$$

$$\beta_n = 2\,\pi\,k^2\,B_n \exp\left\{-\,n\,\pi\,H''/L\right\}. \tag{8}$$

---

[4] Die Integration kann man sich im Prinzip sparen, wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß sich ganz allgemein eine «Störmasse» durch eine *über* ihr liegende *ebene* Flächenbelegung ersetzen läßt, deren Flächendichte proportional der auf der Oberseite der Ebene herrschenden Schwere ist. $\Delta g\,(\Sigma') = 2\,\pi\,k^2\,\Delta\varrho\,(\Sigma')$; ferner gilt bekanntlich für $\Delta g\,(\Sigma'') = \sum_n a_n''\,e^{iny}$ und $\Delta g\,(\Sigma') = \sum_n a_n'\,e^{iny}$ die Beziehung $a_n'' = a_n'\,e^{-nH''}$, wobei wir die trigonometrischen Funktionen hier der Kürze halber durch exponentielle Ausdrücke ersetzten.

Wir haben in (6) das Glied für $n = 0$ wegfallen lassen, da es hier ohne Belang ist. α_n und β_n könnte man aus den Schwerebeobachtungen auch unmittelbar durch Fourieranalyse ableiten gemäß

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \Delta g\,(y) \cos \frac{n \pi y}{L}\, dy \tag{9}$$

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \Delta g\,(y) \sin \frac{n \pi y}{L}\, dy\,. \tag{10}$$

Man kann andere Dichteverteilungen $\Delta\varrho'$ (mit den Fourierkoeffizienten a_n, b_n) auf anderen Flächen $z =$ const. angeben, die alle genau *dasselbe* Δg-Feld außerhalb von σ erzeugen; beispielsweise erzeugt – wie sich leicht zeigen läßt – eine Dichteverteilung $\Delta\varrho'$ (auf der Fläche Σ) mit den Reihenkoeffizienten

$$a_n = A_n \exp\left\{\frac{n \pi}{L}\,(H - H'')\right\} \tag{11}$$

$$b_n = B_n \exp\left\{\frac{n \pi}{L}\,(H - H'')\right\} \tag{12}$$

im *gesamten* Außenraum von Σ' genau dasselbe Δg-Feld wie die Belegung $\Delta\varrho$ auf Σ'.

Man beachte, daß in (11) und (12) a_n und b_n mit wachsendem n sehr schnell gegen unendlich wachsen können, falls $H > H''$. Da – wie zuvor festgestellt wurde – die Schwereanomalien Δg auf einer Ebene proportional der äquivalenten Massenverteilung (auf dieser Ebene) sind, kann folglich die Fourierreihe für Δg auf Σ auch divergieren. Dies trifft zu, falls

$$\exp\left\{\frac{n \pi}{L}\,(H - H'')\right\}$$

mit wachsendem n schneller zunimmt, als die Koeffizienten A_n und B_n mit wachsendem n abnehmen. [In (4) wurde vorausgesetzt, daß die Reihe konvergiert.]

Das bringt gewisse Schwierigkeiten für die entsprechenden *unendlichen* Reihenentwicklungen mit sich; für die endlichen Approximationen[5] (Teilsummen der unendlichen Reihen) niederen Grades ist es jedoch meistens

[5] Im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate; wegen der bei Schweremessungen stets vorhandenen Beobachtungsfehler ist die Verwendung einer Partialsumme anstelle der unendlichen Reihensumme für $\Delta g\,(\Sigma'')$ sowieso immer gerechtfertigt.

belanglos. Denn die in der praktischen Anwendung verwendeten (endlichen) Näherungen können trotz der Divergenz der entsprechenden unendlichen Reihen brauchbare Resultate ergeben, wie unter anderem die Überlegungen in [3] zeigen; mathematische Einzelheiten dazu werden beispielsweise in [7] behandelt.

Man könnte – theoretisch – die Fourierentwicklung von Δg dazu verwenden, um festzustellen, bis in welche Tiefe die Fortsetzung der Schwereanomalien nach unten möglich ist; sobald die Reihe divergiert, ist diese Tiefe erreicht. Für die praktische Anwendung ist dieses Verfahren aber oft ungeeignet. Andererseits wird klar, daß die Tiefe, bis zu der die Fortsetzung in Δg möglich ist, eigentlich nur von der entsprechenden Flächenbelegung abhängt; die Massenverteilung ist dabei im Grunde irrelevant.

(11) und (12) zeigen ferner, daß man beliebig viele Belegungen auf Flächen z = const. angeben kann, die alle Schwerefelder liefern, welche im Außenraum von σ dasselbe Schwereanomalienfeld hervorrufen. Da für geodätische Zwecke die *tatsächliche* Dichteverteilung ohne Belang ist, lassen sich also unendlich viele Massenanordnungen *innerhalb* des Geoides angeben, die alle mit den gemessenen Schwerewerten verträglich sind. Die analytische Fortsetzung von Δg auf das Geoid Σ ist also unproblematisch für die meisten praktischen Fälle[6]. Man sollte dabei insgesamt beachten, daß im Hinblick auf die *praktische Anwendung* bei unendlichen Reihen wie etwa in (6) das Gleichheitszeichen lediglich symbolisch[7] zu verstehen ist. Damit erklärt sich der zuvor aufgezeigte Unterschied zwischen Theorie und praktischer Rechnung bei der analytischen Fortsetzung in die Massen hinein sogleich von selbst.

Man könnte noch einen Schritt weitergehen und die Massen durch Multipole ersetzen; dieser Schritt wurde in [3] für die Kugelfunktionsentwicklung des Erdschwerepotentials getan, er ist hier aber weniger von Interesse. Die Beziehungen zwischen Multipol-Potentialen (in der Ebene) und Fourierreihenentwicklungen wurden beispielsweise in [6] sehr anschaulich diskutiert. Was die unendlichen Reihenentwicklungen in diesem Zusammenhang betrifft, so dürfte auch hier der Heaviside nachgesagte Ausspruch angebracht sein [8]: «Was, die Reihe ist divergent? Na, dann können wir aus ihr ja Zahlen gewinnen!»

Summary

The problem of continuation of airborne gravity observations down to the surface of the geoid across terrestrial masses is discussed. Rigorously, this continuation is not possible in general; however, it is shown, using Fourier series, that in practical applications difficulties should seldom arise from this fact for downward continuation of gravity in geodetic problems.

---

[6] In Extremfällen können örtliche Geländekorrektionen nützlich sein.

[7] Im Sinne von Lanczos [9].

Literatur

[1] *Bjerhammar, A.:* On the theory of a new geoid USAEGIMRADA. Alexandra, Virginia, 1967.
[2] *Groten, E.:* Bestimmung der Schwere an der Erdoberfläche aus Fluggravimetermessungen. DGK C94, München 1966.
[3] *Groten, E.:* On the spherical harmonics series development of the geopotential at the earth's surface. Bulletin Géodésique 1968 (in press).
[4] *Magnitzki, W. A.; Browar, W. W.; Schimbirew, B. P.:* Theorie der Figur der Erde. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
[5] *Moritz, H.:* Methods for downward continuation of gravity. DGK A50, München 1966.
[6] *Schlegelmilch, W.:* Die Differentialoperationen der Vektoranalysis, VEB Verlag Technik, Berlin 1954.
[7] *Spiegel, M. R.:* Advanced Calculus, Schaum Publ. Co., New York 1961.
[8] *Bellman, R.:* Methoden der Störungsrechnung in Mathematik, Physik und Technik. Oldenbourg, München-Wien 1967.
[9] *Lanczos, C.:* Applied analysis. Prentice Hall, Englewood Cliff, New York 1956.

DK 528.44(084.3)

Grundbuchpläne 1:5000 und 1:10 000

H. Griesel

Zusammenfassung

In Berggebieten ist die Vermessung der ausgedehnten Alp- und Waldparzellen von Bedeutung. Es wird die Durchführung der Feld- und Büroarbeiten besprochen.

Resumé

Dans les zones montagneuses, la mensuration parcellaire des alpes et des forêts est très importante. Les procédés de campagne et de bureau sont discutés.

Einleitung

Obwohl in den Gebirgskantonen große Gebiete in den Maßstäben 1:5000 und 1:10000 zu kartieren sind – im Kanton Graubünden sind es rund drei Viertel der Gesamtfläche –, fehlen in den Instruktionen der Grundbuchvermessung Vorschriften, die uns Auskunft über Verfahren und Toleranzen geben würden. Einzig in den Erläuterungen über die Erstellung der Übersichtspläne vom 1. November 1946 finden wir folgendes:

«Über Berggebiete mit Grundstücken großer Ausdehnung, wo der Grundbuchplan im Maßstab 1:5000 oder 1:10000 erstellt wird, dient der Originalübersichtsplan als Grundlage für die Erstellung des Originalgrundbuchplanes. Der Übersichtsplan wird photomechanisch als Blaudruck auf beidseitig mit Zeichenpapier überzogene Aluminiumtafeln übertragen und dort nach den für den Grundbuchplan geltenden Zeichnungsvorlagen ausgezogen. Die Eigentumsgrenzen und ihre Grenzpunkte sind somit im Originalübersichtsplan nur soweit darzustellen, als dies für ihre Aufnahme notwendig ist. Die Grenzpunkte werden ja vermittelst