

# Transformation de coordonnées rectangulaires spatiales x,y,z en coordonnées géographiques , , H pour les hauteurs inférieures à 10km

Autor(en): **Pavlov, Kiril**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **66 (1968)**

Heft 12

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-222321>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 12 · LXVI. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Dezember 1968

DK 528.236.5

## Transformation de coordonnées rectangulaires spaciales $X, Y, Z$ en coordonnées géographiques $\varphi, \lambda, H$ pour les hauteurs inférieures à 10 km

*Kiril Pavlov*

L'emploi des coordonnées rectangulaires spaciales en Géodésie a posé le problème de la transformation de ces dernières en un autre système de coordonnées universelles – les coordonnées géographiques.

Lors de l'utilisation d'un système de coordonnées rectangulaires, ayant le plan  $XOY$  identique au plan équatorial de l'ellipsoïde de référence ainsi que l'axe  $X$  passant par le méridien de Greenwich, l'axe  $Y$  à  $90^\circ$  à l'est de celui-ci et l'axe  $Z$  identique à l'axe polaire dudit ellipsoïde, on aura les relations suivantes entre  $X, Y, Z$  et  $\varphi, \lambda, H$ :

$$\begin{aligned}X &= (N + H) \cos \varphi \cos \lambda \\Y &= (N + H) \cos \varphi \sin \lambda \\Z &= (N + H - e^2 N) \sin \varphi\end{aligned}\tag{1}$$

où –  $N$  est le rayon de courbure du premier vertical, pour lequel on a:

$$N = \frac{a}{W}\tag{2}$$

où

$a$  – grand demi-axe de l'ellipse méridienne

$b$  – petit demi-axe de l'ellipse méridienne

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3)$$

et

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Des formules (1) on déduit tout de suite la longitude:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Y}{X} \quad (4)$$

Cependant la difficulté principale consiste à la détermination de la latitude  $\varphi$  que l'on déduit ordinairement à itérations consécutives. Nous allons résoudre le problème pour des points ayant une hauteur moindre de 10 km ( $H \leq 10$  km), c'est-à-dire le cas des points sur la surface terrestre.

Nous allons démontrer que dans ce cas nous pourrions simplifier considérablement les formules de Riener et de Boutkiévitch, en les présentant sous une forme très commode.

Nous remarquons, en plus, qu'il existe pour la hauteur  $H$  une formule très applicable en calcul:

$$H = \Delta a \cdot W \quad (5)$$

où

et

$$\Delta a = \bar{a} - a$$

$$\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + (1 + e'^2) Z^2} \quad (6)$$

laquelle pour  $H \leq 25$  km garantit une grande précision.

De la première et deuxième relation de (1) on a:

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos \varphi \quad (7)$$

De (7) et (1) on obtient la formule pour  $\operatorname{tg} \varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z - e^2 N \sin \varphi}{D} \quad (8)$$

donnée par Laping.

Si, de cette formule, nous tirons une valeur approximative pour  $\operatorname{tg} \varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = (1 + e'^2) \frac{Z}{D} \quad (9)$$

on obtient

$$\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{e'^2 H}{N + H} \operatorname{tg} \varphi \quad (10)$$

et par là:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1: \left( 1 + e'^2 \frac{H}{N + H} \right) \quad (11)$$

laquelle formule est donnée par Riener.

Si nous développons en série  $\operatorname{tg} \varphi$  pour la place  $\varphi_1$ , nous obtenons la différence  $\varphi - \varphi_1$ , en première approximation

$$d\varphi = \varphi - \varphi_1 = (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1) \cos^2 \varphi \quad (12)$$

laquelle conformément à (10) mène à la formule de Boutkiévitch pour

$$d\varphi = - \frac{e^2 H}{2(N + H)} \sin 2 \varphi \quad (13)$$

Commençons tout d'abord avec la formule de Boutkiévitch

$$d\varphi = \frac{e'^2 H}{2(N + H)} \sin 2 \varphi \quad (14)$$

dans laquelle nous substituons

$$H = \Delta a \cdot W \quad (15)$$

$$N = \frac{a}{W}$$

Nous obtenons

$$d\varphi = \frac{e'^2 \Delta a W}{2 \left( \frac{a}{W} + \Delta a W \right)} \sin 2 \varphi = \frac{e'^2 a}{2 \left( \frac{a}{W^2} + \Delta a \right)} \sin 2 \varphi \quad (16)$$

où

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\Delta a = \bar{a} - a \quad (17)$$

$$\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + (1 + e'^2) Z^2}$$

Nous pouvons présenter la formule (16) sous la forme:

$$d\varphi = \frac{\Delta a}{1 + \frac{\Delta a}{a/W^2}} \cdot \frac{e'^2 W^2}{2 a} \cdot \sin 2 \varphi \quad (18)$$

Etant donné que pour  $H \leq 10 \text{ km}$   $d\varphi_{\max} < 1''$  et  $\frac{\Delta a}{a/W^2} < \frac{1}{600}$

nous pouvons établir la relation (18) ainsi:

$$d\varphi = \Delta a \left( 1 - \frac{\Delta a}{6400} \right) \frac{e'^2 W^2}{2a} \sin 2\varphi \quad (19)$$

où nous avons développé

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta a}{a/W^2}} \quad (20)$$

suivant la série géométrique, tout en nous bornant au membre du premier ordre et en adoptant pour  $a/W^2$  le chiffre rond de 6400 km.

L'erreur provenant de ces simplifications ne dépassera pas  $1'' \times 10^{-5}$  en  $d\varphi$ .

Si dans les formules (19) nous posons:

$$\Delta \bar{a} = 10^{-4} \cdot \Delta a - 10^{-4} \cdot \frac{\Delta a^2}{6400} = 10^{-4} \cdot \Delta a - \delta \Delta a \quad (21)$$

$$K = \frac{10^4 \cdot \varrho'' \cdot e'^2 \cdot W^2}{2a} \sin 2\varphi$$

nous obtiendrons les formules suivantes destinées au calcul:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= (1 + e'^2) Z/D \\ d\varphi'' &= \Delta \bar{a} \cdot K \\ \varphi &= \varphi_1 + d\varphi \end{aligned} \quad (22)$$

Pour l'utilisation pratique de (22) il sera nécessaire que des tables soient calculées pour les valeurs de  $K$  et de  $\delta \Delta a$ .

Envisageons maintenant la formule de Riener, présentée sous la forme:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 / C$$

où

$$C = 1 + e'^2 \frac{H}{N + H} \quad (23)$$

Nous remplaçons dans l'expression précédente  $N$  et  $H$  selon (15) et après des transformations similaires à ceux qui ont été opérés avec les formules (14), nous obtenons:

$$C = 1 + \Delta a \left( 1 - \frac{\Delta a}{6400} \right) \cdot \frac{e'^2 W^2}{a} \quad (24)$$

ou bien en posant:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{a} &= 10^{-4} \cdot \Delta a - \delta \Delta a \\ L &= \frac{10^4 \cdot e'^2 W^2}{a} \end{aligned} \quad (25)$$

nous arrivons aux formules pratiques suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= (1 + e'^2) Z/D \\ C &= 1 + \overline{\Delta a} \cdot L \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \varphi_1 / C \end{aligned} \quad (26)$$

Nous calculons à une minute près la valeur de  $\varphi_1$  à partir de laquelle on tire d'une table la valeur de  $L$ .

La comparaison des formules (22) et (26) donnera une préférence marquée à cette dernière, en effet la table de  $L$  ne présentera qu'une demie-page, tandis que celle de  $K$  aura un volume plus considérable (intervalle 10') et par conséquent d'une manipulation bien plus difficile.

Pour le calcul de la hauteur nous disposons de la formule très commode de Nicolaev:

$$H = \Delta a \cdot W \quad (27)$$

laquelle harmonise parfaitement avec les formules (22) et (26), dont on calcule  $\varphi$ .

On peut contrôler le calcul de  $\varphi$  et de  $H$  très facilement par la formule de Hirvonen:

$$\begin{aligned} H &= Z \sin \varphi + D \cos \varphi - a \cdot W \\ D &= \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \quad (28)$$

#### *Littérature*

- [1] *Pavlov K.*: Sur la transformation de coordonnées rectangulaires spaciales  $X, Y, Z$  en coordonnées géographiques  $\varphi, \lambda, H$ . «Guéodésia, Kartografia, Zéméoustroïstvo», 1967, N° 5, Sofia (bulg.).
- [2] *Boutkiévitch A.*: Transformation de coordonnées rectangulaires spaciales en coordonnées géodésiques  $B, L, H$ . «Guéodésia i kartografia», 1963, N° 10, Moscou (russe).
- [3] *Riener K.*: Geometrie mit Raumstrecken. «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1958, 83, N° 3.
- [4] *Hirvonen R. A.*: Praktische Rechenformeln für die dreidimensionale Geodäsie. «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1964, N° 5.

## Exemples numériques et tables

### *Ellipsoïde de Hayford*

$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ $\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + (1 + e'^2) Z^2}$ $\Delta a = \bar{a} - a$ $H = \Delta a \cdot W$		$\operatorname{tg} \varphi_1 = (1 + e'^2) Z/D$ $\Delta a = 10^{-4} \Delta a - \delta \Delta a$ $C = 1 + \Delta \bar{a} \cdot L$ $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 / C$	
<i>X</i>	4 092 237,057	$\operatorname{tg} \varphi_1$	0,75000 63510
<i>Y</i>	3 069 177,793	$\approx \varphi_1$	36°52'
<i>Z</i>	3 810 713,173	$10^{10} \cdot L$	1 05855
<i>D</i>	5 115 296,321	$\Delta \bar{a}$	0,79997
$\bar{a}$	6 386 397,6983	<i>C</i>	1,00000 84680
$\Delta a$	8 009,6983	$\operatorname{tg} \varphi$	0,75000 00000
<i>H</i>	8 000,0001	$\varphi$	36°52'11",63153

### *Ellipsoïde de Krassovsky*

$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ $\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + (1 + e'^2) Z^2}$ $\Delta a = \bar{a} - a$ $H = \Delta a \cdot W$		$\operatorname{tg} \varphi_1 = (1 + e'^2) Z/D$ $\Delta \bar{a} = 10^{-4} \cdot \Delta a - \delta \Delta a$ $C = 1 + \Delta \bar{a} \cdot L$ $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 / C$	
<i>X</i>	4 531 527,896	$\operatorname{tg} \varphi_1$	0,99420 43326
<i>Y</i>	158 244,441	$\approx \varphi_1$	44°50'
<i>Z</i>	4 187 836,809	$10^{10} \cdot L$	1 05297
<i>D</i>	4 534 290,0632	$\Delta \bar{a}$	0,50044
$\bar{a}$	6 383 253,3389	<i>C</i>	1,00000 52695
$\Delta a$	5 008,3389	$\operatorname{tg} \varphi$	0,99419 90937
<i>H</i>	5 000,000	$\varphi$	44°50'00",00000

*Ellipsoïde de Hayford*

*Ellipsoïde de Krassovsky*

$\varphi$	W		
36°30'	0,99881	000	937
40'	880	063	938
50'	897	125	940
37°00'	0,99878	185	942
10'	877	243	944
20'	876	299	945
37°30'	0,99875	354	

$\varphi$	W		
44°00'	0,99838	374	975
10'	837	399	975
20'	836	424	975
30'	0,99835	449	975
40'	834	474	975
50'	833	499	975
45°00'	0,99832	524	

*Tables pour  $10^5 \cdot \delta\Delta a$*

$H_M$	000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0000	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1000	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6
2000	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13
3000	14	15	16	17	18	19	20	22	23	24
4000	25	26	28	29	30	32	33	35	36	38
5000	39	41	42	44	46	47	49	51	53	54
6000	56	58	60	62	64	66	68	70	72	75
7000	77	79	81	83	86	88	90	93	95	98
8000	100	103	105	108	110	113	116	118	121	124
9000	127	130	132	135	138	141	144	147	150	153



Table pour  $10^{10} \cdot L$

*Ellipsoïde de Hayford*

$\varphi^\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$d$
0	106 111	111	110	109	108	106	103	100	097	094	0-3
10	106 089	085	080	075	069	062	057	050	043	035	4-8
20	106 028	019	011	002	993	984	974	964	954	943	9-11
30	105 932	922	910	899	888	876	865	853	841	828	10-13
40	105 816	804	792	779	767	754	742	729	717	705	12-13
50	105 692	680	668	656	644	632	621	609	598	587	12-11
60	105 576	565	554	545	535	525	516	507	498	489	11-9
70	105 481	473	466	459	452	445	439	434	428	424	8-4
80	105 419	415	411	408	405	403	401	400	398	398	4-0
90	105 398										

Table pour  $10^{10} \cdot L$

*Ellipsoïde de Krassovsky*

$\varphi^\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$d$
0	105 649	649	648	647	645	643	641	638	635	631	0-4
10	105 627	623	618	613	607	601	595	588	581	574	4-7
20	105 566	558	549	541	532	522	513	503	493	482	8-11
30	105 473	461	450	439	427	416	404	392	381	369	11-12
40	105 356	344	332	320	307	295	282	270	258	246	12-13
50	105 234	221	209	198	186	174	163	151	140	129	13-11
60	105 118	108	097	087	077	068	058	049	041	032	10-8
70	105 024	016	009	002	995	989	983	977	972	967	8-5
80	104 963	959	955	952	949	947	945	943	942	942	4-0
90	104 941										