Sur le calcul en géodésie de déviations de la verticale

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **66 (1968)**

Heft 12

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-222323

DK 528.241

Sur le calcul en géodésie de déviations de la verticale

A. Ansermet

Zusammenfassung

Das hier behandelte Problem gab bereits Anlaß zu zahlreichen Artikeln in der geodätischen Literatur. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf eine Kombination von Höhenwinkel- und Distanzmessungen, wobei die beobachteten Strecken erlauben, die Genauigkeit zu erhöhen oder eine genügende Anzahl von Fehlergleichungen zu liefern, wie sie sonst nicht vorliegen würde. Namentlich im Gebirge kann dieses Vorgehen von Interesse sein.

Résumé

Le problème à traiter ici donna lieu déjà à une littérature abondante. Les lignes qui suivent portent notamment sur une combinaison de mesures zénithales et de mesures linéaires; ces dernières doivent permettre d'améliorer la précision ou de fournir des équations aux erreurs en nombre suffisant ce qui ne serait pas nécessairement le cas sans cela. En montagne cela peut présenter de l'intérêt.

Généralités

La détermination de déviations de la verticale par voie de nivellement trigonométrique est maintenant entrée dans la pratique courante; elle présente de sérieux avantages mais aussi quelques inconvénients; le nombre des inconnues peut devenir élevé et ne pas bien se prêter à une compensation. Un cas concret traité ci-après le montrera. Le praticien est alors amené à rechercher la combinaison avec d'autres mesures par exemple électrotélémétriques; la question des poids est à élucider.

A la base des calculs on a les équations connues sous forme générale

$$v = a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz') + f \qquad \text{(poids } p) \qquad (1)$$
$$[pvv] = \text{minimum} \qquad (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

pour le réseau linéaire.

Les (dx, dy, dz) et (dx', dy', dz') sont les variations de coordonnées de deux nœuds reliés par un côté tandis que les f sont les termes abolus. Remarquons, avant de poursuivre, que les mesures linéaires sont moins tributaires des circonstances atmosphériques que les angulaires.

Pour le réseau altimétrique la forme générale est:

$$v = \cos A \cdot \xi + \sin A \cdot \eta - \varrho \frac{\cos^2 \alpha}{D} dz + \varrho \frac{\cos^2 \alpha}{D} \cdot dz' + f \qquad ([2]\text{ p. } 241) \qquad (2)$$

où les ξ, η sont les composantes de la déviation et A un azimut compté à partir d'une direction choisie arbitrairement, pas nécessairement un méridien; le cas concret traité ci-après fera mieux comprendre le rôle joué par ces éléments. L'angle vertical mesuré est α tandis que D est la distance déduite de la formule dite de Wild-Baeschlin.

Pour mémoire rappelons que certains auteurs remplacent les inconnues ξ, η par la résultante r: $r^2 = \xi^2 + \eta^2$ et par l'azimut inconnu de ce r.

Quant aux dz, dz' ce sont les variations à faire subir aux valeurs provisoires des altitudes des nœuds; ce sont donc des éléments linéaires.

Pour simplifier posons $\varrho \cdot \frac{\cos^2\alpha}{D} \cong 1$ (à $^1/_{1500}$ près) ce qui permet de passer facilement, toujours pour notre cas concret de caractère didactique, d'un v angulaire à un v linéaire et réciproquement, mais numériquement seulement, car ce facteur 1 ou son inverse a une dimension. Pour le terme absolu f il faut aussi tenir compte de l'équation de dimension.

Il faut distinguer deux cas en pratique car les inconnues ξ, η sont souvent les inconnues principales (calcul du géoïde) mais parfois jouent un rôle secondaire, transitoire.

Calcul du géoïde. Le praticien a le choix entre deux surfaces de référence: l'ellipsoïde ou la sphère; le passage d'une surface à l'autre est un calcul de mathématiques pures ne présentant pas de difficultés. Une autre solution, surtout si le territoire est peu étendu, consiste à appliquer une transformation par rayons vecteurs réciproques laquelle est conforme. La sphère de référence devient un plan ce qui procure de sérieux avantages. L'auteur de ces lignes se réserve de revenir ultérieurement sur cette solution.

Second cas. Il y a lieu de tenir compte implicitement de ces ξ, η, mais leur élimination, même au début des calculs, serait souhaitable; il y a une certaine analogie avec l'inconnue dite d'orientation lors de mesures de directions. Mais pour les ξ, η il faut se contenter en général de les éliminer après la formation des équations normales, solution peu intéressante.

Réfraction. Cet élément est assez gênant; deux hypothèses sont envisagées:

1° Le coefficient de réfraction est traité comme une inconnue lors de la compensation; seule une valeur provisoire est connue en général.

2° Le terme absolu de chaque équation aux erreurs tient compte de la réfraction; en montagne, si les visées sont très éloignées du sol, c'est admissible et, pour le cas concret, il sera procédé de cette façon. Le coefficient de réfraction peut, avant de former les équations normales, être éliminé (1re hypothèse).

Poids du binôme ($\cos A \cdot \xi + \sin A \cdot \eta$). Selon le mode de calcul adopté ce poids peut présenter de l'intérêt car il concerne la déviation dans le plan de visée. Pour les coefficients de poids on s'efforce de réaliser les valeurs:

$$Q_{\xi\xi} = Q_{\eta\eta} \quad \text{et} \quad Q_{\xi\eta} = 0$$

Il y a de l'analogie avec le cas de mesures linéaires planes (un nœud libre). L'azimut A recevra les valeurs: A_1 et $A_1 \pm 90°$ (poids p_1), A_2 et $A_2 \pm 90°$ (poids p_2) et ainsi de suite, les A_1, A_2, A_3 ... étant indépendants mutuellement.

Cas concret

Le calcul à effectuer consiste en un *double relèvement spatial* donc très simple et de caractère didactique; il a paru présenter de l'intérêt.

Points nouveaux: P (ξ, η, dz), P' (ξ', η', dz') (6 inconnues)
pour les visées PP' ou $P'P$ on a: $\sin^2 A \cong 0{,}5$
Points donnés: P_1, P_2, P_3, P_4

ce qui fournit deux paires de visées pour lesquelles $\sin^2 A \cong 0$ ou 1.

Le tableau ci-dessous des équations aux erreurs est assez explicite

$i =$	visées	dz	ξ	η	ξ'	η'	dz'	poids
1	PP'	—1	—0,707	+0,707	0	0	+1	1
2	$P'P$	+1	0	0	+0,707	—0,707	—1	1
3	PP_1	—1	+1	0	0	0	0	1
4	PP_3	—1	0	—1	0	0	0	1
5	$P'P_2$	0	0	0	0	+1	—1	1
6	$P'P_4$	0	0	0	—1	0	—1	1

La formation des termes absolus et des valeurs provisoires des altitudes est un calcul connu.

Il n'y a pas assez d'équations pour effectuer une compensation; on complète par des mesures linéaires, les coordonnées planes étant connues.

$i =$	mesures	dz		dz'
7	PP_1 ou P_1P	0,577		–
8	PP_3 ou P_3P	0,577		–
9	$P'P_2$ ou P_2P'	–		0,577
10	$P'P_4$ ou P_4P'	–		0,577

Le signe des coefficients ne joue pas de rôle ici.

On forme les matrices aux coefficients des équations normales et aux coefficients de poids.

$$\begin{bmatrix} 6 & -0{,}293 & +0{,}293 & +0{,}707 & -0{,}707 & -2 \\ & 1{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}707 \\ & & 1{,}5 & 0 & 0 & +0{,}707 \\ & & & 1{,}5 & -0{,}5 & +0{,}293 \\ & \text{symétrique} & & & 1{,}5 & -0{,}293 \\ & & & & & 6 \end{bmatrix}$$

$p = 3$ (mesures linéaires)

matrice à inverser

$$\begin{bmatrix} 0{,}230 & +0{,}071 & -0{,}071 & -0{,}096 & +0{,}096 & +0{,}103 \\ & 0{,}794 & +0{,}206 & -0{,}039 & +0{,}039 & +0{,}096 \\ & & 0{,}794 & +0{,}039 & -0{,}039 & -0{,}096 \\ & & & 0{,}794 & +0{,}206 & -0{,}071 \\ & \text{symétrique} & & & 0{,}794 & +0{,}071 \\ & & & & & 0{,}230 \end{bmatrix}$$

$\sqrt{0{,}230} = 0{,}48$

$\sqrt{0{,}794} = 0{,}89$

matrice inverse de l'autre

Poids a posteriori (p). Leur calcul est immédiat:

$$i = 1{,}2 \qquad {}^1/_{(p)} = 0{,}772 \cdot \qquad i = 3, 4, 5, 6 \qquad {}^1/_{(p)} = 0{,}883 \qquad i = 7, 8, 9, 10$$
$$p/_{(p)} = 0{,}230 \cdot [p{:}(p)]^{10}, = 2 \times 0{,}772 + 4 \times 0{,}883 + 4 \times 0{,}23 = 6 \text{ (6 inconnues)}$$
$$\text{car pour } p = 3 \text{ on a } p/_{(p)} = 3.\overline{0.577}^2 \cdot 0.23 = 0.23$$

Ces résultats concordent avec ceux obtenus sans mesures linéaires ([3] p. 204). Bien entendu cette combinaison de télémétrie et de mesures d'angles verticaux ne sera jamais une méthode courante. Elle ne présente aucun intérêt pour certains pays pour des raisons faciles à comprendre; le problème n'est ici qu'effleuré. Les éléments de la compensation montrent que les inconnues ξ et η sont déterminées en général avec moins de précision que les altitudes. L'hypothèse faite $\varrho \dfrac{\cos^2\alpha}{D} \cong 1$ a permis de simplifier les calculs; en général il faut rendre ceux-ci homogènes (voir [2] p. 56) quant aux dimensions.

Cas général. Les coordonnées planes ne sont pas connues; il y a donc 6 variations de coordonnées à déterminer pour les points nouveaux P, P' (dx, dy, dz) et (dx', dy', dz'). Il n'y a que 5 équations aux erreurs pour les 5 longueurs PP_1, PP_3, PP', $P'P_2$, $P'P_4$; en plus on a les 6 équations altimétriques angulaires ($i = 1{,}2 \ldots 6$). En tout il y aurait donc 11 équations aux erreurs pour 10 inconnues ce qui est assez précaire; il n'a pas paru opportun de traiter un exemple numérique car il s'agit d'un calcul courant comme le précédent et la question des poids à attribuer cause de l'embarras. L'électrotélémètre sera aussi précis que possible et on admettra la valeur $\sin^2\alpha \geq {}^1/_3$. Cet exemple a encore le caractère d'un double relèvement spatial.

Cas de profils ou cheminements. Ce cas fut abondamment traité dans la littérature; les nœuds ne sont pas nécessairement contenus rigoureusement dans un même plan vertical. Faisons l'hypothèse $\sin^2 A \cong 0$ ou 1; une des composantes ξ ou η est pratiquement éliminée; de même pour les dy par exemple. Comme inconnues subsistent les ξ ou η puis les dx et dz; des mesures linéaires précises seront parfois les bienvenues toujours pour $\sin^2\alpha \geq {}^1/_3$. Tous les calculs sont sans cela courants, les coefficients de réfraction étant encore contenus dans les termes absolus des équations aux erreurs.

Littérature

[1] *Kobold F. und Wunderlin N.:* Bestimmung von Lotabweichungen (Comm. géodésique 1963).

[2] *Wolf H.:* Ausgleichsrechnung ... (Dümmlers Verlag, Bonn).

[3] *Ansermet A.:* Le rôle de la déviation de la verticale ... (Schweiz. Zeitschr. für Verm. 1963).

[4] *Wunderlin N.:* Lotabweichungen, Geoid und Meereshöhen in den Schweizer Alpen, Schweiz. Geodätische Kommission. Astron.-Geodätische Arbeiten, 26. Band. 1967.