Formules destinées à la transformation des coordonnées rectangulaires spatiales x,y,z en coordonnées géographiques , , H pour les grandes hauteurs

Autor(en): **Pavlov, Kiril**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **67 (1969)**

Heft 4

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-222988

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DK 528.236.5

Formules destinées à la transformation des coordonnées rectangulaires spatiales X, Y, Z en coordonnées géographiques φ, λ, H pour les grandes hauteurs

Kiril Pavlov

La détermination de la latitude géographique φ et de la hauteur H, lors de la transformation des coordonées rectangulaires spatiales en coordonnées géographiques pour des hauteurs considérables, se heurte à des difficultés. La détermination de φ par rapprochement itératif ou bien par la formule de Pick [4] exige un travail de calcul considérable, tandis que la détermination de H par la formule très commode de Nicolaev – pour $H > 25$–30 km – manque de précision. Notons que les formules, employant directement Z et $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$, lors de la détermination de H, ne peuvent être recommandées à cause de la très forte dépendance de la précision de H de celle de φ, dont la valeur elle-même doit être déterminée. La formule correspondante de Pick, elle aussi, est assez complexe.

L'article présent traite la transformation en question en proposant: une formule simple et précise pour φ, un élargissement de la formule de Nicolaev, ainsi qu'une formule fermée pour H, dans le but de surmonter les difficultés déjà citées.

Nous débuterons par les formules qui concernent H. En partant de l'équation:

$$\varrho^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{1}$$

dans laquelle:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos\varphi \cos\lambda \\ Y &= (N + H) \cos\varphi \sin\lambda \\ Z &= (N + H - e^2 N) \sin\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

on obtient:

$$(N + H)^2 - 2\, e^2\, N \sin^2\varphi\, (N + H) - (\varrho^2 - e^4\, N^2 \sin^2\varphi) = 0 \tag{3}$$

où

$$N = \frac{a}{W}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \tag{4}$$

Nous résolvons l'équation du second degré (3) en prenant le signe «plus» devant la racine en considération donc:

$$N + H = e^2 N \sin^2\varphi + \sqrt{e^4 N^2 \sin^4\varphi + \varrho^2 - e^4 N^2 \sin^2\varphi} \tag{5}$$

ou bien:

$$H = \sqrt{\varrho^2 - e^4 N^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} - N\,(1 - e^2 \sin^2\varphi) \tag{6}$$

et finalement:

$$H = \sqrt{\varrho^2 - G} - b \cdot V = \sqrt{\varrho^2 - G} - a \cdot W \tag{7}$$

pour

$$G = \frac{e^4}{4} \cdot N^2 \sin^2 2\varphi \tag{8}$$

La formule (7) est simple et commode pour le calcul de H moyennant une table pour les valeurs de G.

Passont à la recherche de l'élargissement de la formule de Nicolaev en partant de l'équation:

$$X^2 + Y^2 + (1 + e'^2)\,Z^2 = \bar{a}^2 \tag{9}$$

Après la substitution de X, Y, Z selon (3) nous obtenons:

$$N^2\,(1 - e^2 \sin^2\varphi) + 2\,N \cdot H + H^2\,(1 + e'^2 \sin^2\varphi) = \bar{a}^2 \tag{10}$$

que l'on peut présenter sous la forme:

$$H^2 \cdot (1 + e'^2 \sin^2\varphi) + 2\,N \cdot H - (\bar{a}^2 - a^2) = 0 \tag{11}$$

Déterminons la valeur du produit $W^2\,(1 + e'^2 \sin^2\varphi)$, qui sera indispensable dans le développement suivant:

$$W^2\,(1 + e'^2 \sin^2\varphi) = (1 - e^2 \sin^2\varphi)\,(1 + e'^2 \sin^2\varphi) = 1 + e^2 e'^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \tag{12}$$

ou bien:

$$W^2\,(1 + e'^2 \sin^2\varphi) = 1 + 2Q \tag{13}$$

où

$$Q = \frac{e^2\,e'^2}{8} \sin^2 2\varphi \tag{14}$$

Si, conformément à (13), nous substituons dans la formule (11)

$$1 + e'^2 \sin^2\varphi = \frac{1 + 2Q}{W^2} \tag{15}$$

nous obtenons

$$H^2 + \frac{2\,aW \cdot H}{1 + 2Q} - \frac{(\bar{a}^2 - a^2)\,W^2}{1 + 2Q} = 0 \tag{16}$$

Nous résolvons cette équation en prenant en considération le signe «plus» devant la racine en considération, comme dans le cas précédent, donc:

$$H = -\frac{a \cdot W}{1 + 2Q} + \sqrt{\frac{a^2 W^2}{(1 + 2Q)^2} + \frac{(\bar{a}^2 - a^2) W^2}{1 + 2Q}} \tag{17}$$

Dans la formule (17) nous faisons sortir $\frac{W}{1 + 2Q}$ devant la racine en obtenant

$$H = -\frac{a \cdot W}{1 + 2Q} + \frac{W}{1 + 2Q} \cdot \sqrt{\bar{a}^2 + (\bar{a}^2 - a^2)\, 2Q} \tag{18}$$

et encore

$$H = -\frac{aW}{1 + 2Q} + \frac{\bar{a} \cdot W}{1 + 2Q} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}} (2 - P)\, 2Q} \tag{19}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta a &= \bar{a} - a \\ \frac{\Delta a}{a} &= P \\ \frac{a}{\bar{a}} &= \frac{\bar{a} - \Delta a}{\bar{a}} = 1 - P \end{aligned} \tag{20}$$

En développant en série la valeur de la racine de (19) se bornant aux termes à Q^2 nous obtenons:

$$\begin{aligned} H = &-\frac{a \cdot W}{1 + 2Q} + \frac{\bar{a} \cdot W}{1 + 2Q} + \frac{\Delta a W}{1 + 2Q} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{2} (2 - P)\, 2Q - \frac{P}{8} (2 - P)^2\, 4Q^2\right] \end{aligned} \tag{21}$$

Après certaines opérations simples nous arrivons à la formule suivante de haute précision

$$H = \frac{\Delta a \cdot W}{1 + P \cdot Q} \cdot \left[1 + P^2 Q^2 \left(1 - \frac{P}{2}\right)\right] \tag{22}$$

l'erreur de laquelle est de l'ordre de $H \cdot 10^{-15}$. Cette précision n'étant pas toutefois indispensable, nous pouvons nous passer du terme entre parenthèse, et nous obtenons ainsi une formule très commode:

$$H = \frac{\Delta a W}{1 + P \cdot Q} \tag{23}$$

à l'erreur maximale $\delta H < 0{,}16 \cdot 10^{-10} \cdot H$, c'est-à-dire que δH atteindra environ un millimètre seulement vers $H = 60000$ km; rappelons – contre $\delta H = 0{,}8$ m pour $H = 1000$ km dans la formule de Nicolaev

$$H = \varDelta a \cdot W \tag{24}$$

Pour déduire enfin une formule précise pour $\operatorname{tg}\varphi$ nous partirons de la formule de Rinner présentée sous la forme suivante:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 b}{b + H \cdot V}\right) \tag{25}$$

Si nous remplaçons H selon (23) en (25), on obtient:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 b}{b + \varDelta a' W \cdot V}\right) \tag{26}$$

et définitivement

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2}{1 + \dfrac{\varDelta a'}{R}}\right) \tag{27}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \varDelta a' &= \frac{a}{1 + PQ} \\ R &= \frac{a^2}{V^2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Les valeurs R et Q seront tirées d'une table à argument $\varphi = \varphi_1$ calculée à $0'',1$ près par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 a}{\bar{a}}\right) \tag{29}$$

qui donne une erreur maximale de $d\varphi \approx 0'',8$, comme nous allons le démontrer plus loin.

Pour cet but, nous employons la formule simplifiée de Rinner

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e' b}{b + \varDelta a W \cdot V}\right) = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 a}{a + \varDelta a V^2}\right) \tag{30}$$

ou bien

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 a}{\bar{a}} - e'^2 \cdot \frac{a}{\bar{a}} P \cdot \eta^2\right) = \operatorname{tg}\varphi_1 - \frac{Z}{D} e'^4 P(1 - P)\cos^2\varphi \tag{31}$$

Par conséquent, pour $d\varphi = \varphi - \varphi_1$ nous aurons:

$$d\varphi = \frac{Z}{D} e'^4 P(1 - P)\cos^4\varphi \approx \frac{e'^4}{2} P(1 - P)\sin 2\varphi \cdot \cos^2\varphi \tag{32}$$

En prenant en considération que pour les valeurs maximales des expressions $P(1 - P)$ et $\sin 2\varphi \cdot \cos^2\varphi$ nous avons

$$P(1 - P) = 0{,}25 \tag{33}$$

$$\sin 2\varphi \cos^2\varphi < 0{,}7$$

nous obtenons finalement de la formule (32):

$$d\varphi_{\max} = 2'',06 \cdot 10^5 \cdot \frac{e'^4}{8} \cdot 0{,}7 \approx 0'',8 \tag{34}$$

Il nous faudra déterminer encore l'erreur de $\mathrm{tg}\,\varphi$ selon (27) pour l'influence de $d\varphi$ en conséquence de la substitution de φ avec φ_1 lors de l'interpolation des coefficients Q et R tirés des tables.

Nous utiliserons une seconde fois la formule de Rinner

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Z}{D} \cdot \left[1 + \frac{e'^2 a}{a + \Delta a (1 - P \cdot Q) V^2}\right] \approx \frac{Z}{D} \cdot \left[1 + \frac{e'^2 a}{a + \Delta a (1 - P \cdot Q + \eta^2)}\right]$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi \tag{35}$$

ou

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Z}{D} \cdot \left[1 + \frac{e'^2 (1 - P)}{1 + P(\eta^2 - P \cdot Q)}\right] \tag{36}$$

Nous développons le terme entre parenthèse du dénominateur pour la place $\varphi = \varphi_1$, à croissance $d\varphi$ en se bornant aux termes du premier ordre. Nous obtenons

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Z}{D} \cdot \left[1 + \frac{e'^2 (1 - P)}{1 + P(\eta^2{}_1 - P \cdot Q_1) + P\left(- e'^2 \sin 2\varphi - \dfrac{P e^2 e'^2}{4} \sin 4\varphi\right) d\varphi}\right] \tag{37}$$

Ainsi pour l'erreur $\delta\mathrm{tg}\,\varphi$ de $\mathrm{tg}\,\varphi$, nous aurons

$$\delta\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Z}{D} \cdot e'^4 (1 - P) P \left(\sin 2\varphi + P \frac{e^2}{4} \sin 4\varphi\right) \cdot d\varphi \tag{38}$$

Nous substituons $d\varphi$ selon (32) et obtenons finalement

$$\delta\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{e'^8}{4} P^2 (1 - P)^2 \cdot \sin^3 2\varphi \leq \frac{20 \cdot 10^{-10}}{64} = 0{,}3 \cdot 10^{-10} \tag{39}$$

Il est évident que la formule (27) assurera dans tous les cas, et indépendamment de la valeur de la hauteur, la précision à dix chiffres près pour le calcul de $\mathrm{tg}\,\varphi$, ce qui pourra satisfaire les plus hautes exigences posées pour la détermination de φ.

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2\, a}{\bar{a}}\right); \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2}{1 + \dfrac{\Delta a'}{R}}\right)$$

$$H = \frac{\Delta a \cdot W}{1 + P \cdot Q} = \Delta a' \cdot W$$

	Ellipsoïde de Hayford	*Ellipsoïde de Krassovsky*
X	9 207 117,057	60 361 417,236
Y	6 905 335,793	45 271 062,927
Z	8 605 913,173	74 974 012,934
D	11 508 896,321	75 451 771,545
$\bar{a}$	14 383 109,624	106 545 531,992
a	6 378 388,000	6 378 245,000
Δa	8 009 721,621	100 167 286,992
$\frac{Z}{D}$	0,74776 18124 8	0,99366 80265
$\mathrm{tg}\varphi_1$	0,75000 54	0,99406 89
φ_1	36°52′,206	44°49′,767
Q	0,00000 52416 4	0,00000 56377 7
P	0,55669 0	0,94013 6
$1 + P \cdot Q$	1,00000 29179 7	1,00000 53002 7
$\Delta a'$	8 009 698,252	100,166 756,081
R	6 350 878,5	6 356 700,1
$\mathrm{tg}\varphi$	0,75000 00000	0,99406 75964
φ	36°52′11″,63153	44°49′46″,35858
W	0,99878 91864	0,99833 52153 0
H	8 000 000,000	99 999 999,999

Ellipsoïde de Hayford

φ	W	
36°50′	0,99879 12478	9396
51	0,99879 03082	9397
52	0,99878 93685	9398
53	0,99878 84287	9399
54	0,99878 77888	9402
36°55′	0,99878 65485	

Ellipsoïde de Krassovsky

φ	W	
44°45′	0,99833 98691	10250
46	0,99833 88941	10249
47	0,99833 79190	10249
48	0,99833 69439	10249
49	0,99833 59688	10248
44°50′		

Ellipsoïde de Hayford

φ	R		$10^{11} \cdot Q$	
36°30′	6 350 613,6	119,2	52 013 5	183 4
40	6 350 732,8	119,3	52 196 9	180 2
50	6 350 852,1	119,6	52 377 1	177 0
37°00′	6 350 971,7	119,8	52 554 1	173 7
10	6 351 091,5	120,0	52 727 3	170 4
20	6 351 211,5	120,1	52 898 2	167 1
30	6 351 331,6		53 065 3	

Ellipsoïde de Krassovsky

φ	R		$10^{11} \cdot Q$	
44°00′	6 356 082,3	124,1	56 311 1	209
10	6 356 206,4	124,1	56 332 0	172
20	6 356 330,5	124,2	56 349 2	134
30	6 356 454,7	124,1	56 362 6	95
40	6 356 578,8	124,2	56 372 1	57
50	6 356 703,0	124,2	56 377 8	19
45°00′	6 356 827,2		56 379 7	

Littérature

[1] *Pavlov K.:* Sur la transformation de coordonnées rectangulaires spatiales X, Y, Z en cordonnées géographiques φ, λ, H. «Guéodésia, Kartografia i Zéméoustroistvo», 1967, N° 5, Sofia (bulg.).

[2] *Boutkiewitch A.:* Transformation de coordonnées rectangulaires spatiales en coordonnées géodésiques B, L, H. «Guéodésia i Kartografia», 1963, N° 10, Moscou (russe).

[3] *Rinner K.:* Geometrie mit Raumstrecken. «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1958, *83*, N° 3.

[4] *Pick M.:* Transformation of the spatial rectangular coordinates into the geodetic coordinates. «Bulletin géodésique» *83*, 1967.