

Rautenausgleichung in der Radialtriangulation

Autor(en): **Danial, Naguib F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **67 (1969)**

Heft 6

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-222995>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 6 · LXVII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1969

DK 528.731: 528.142

Rautenausgleichung in der Radialtriangulation

Naguib F. Danial

Zusammenfassung

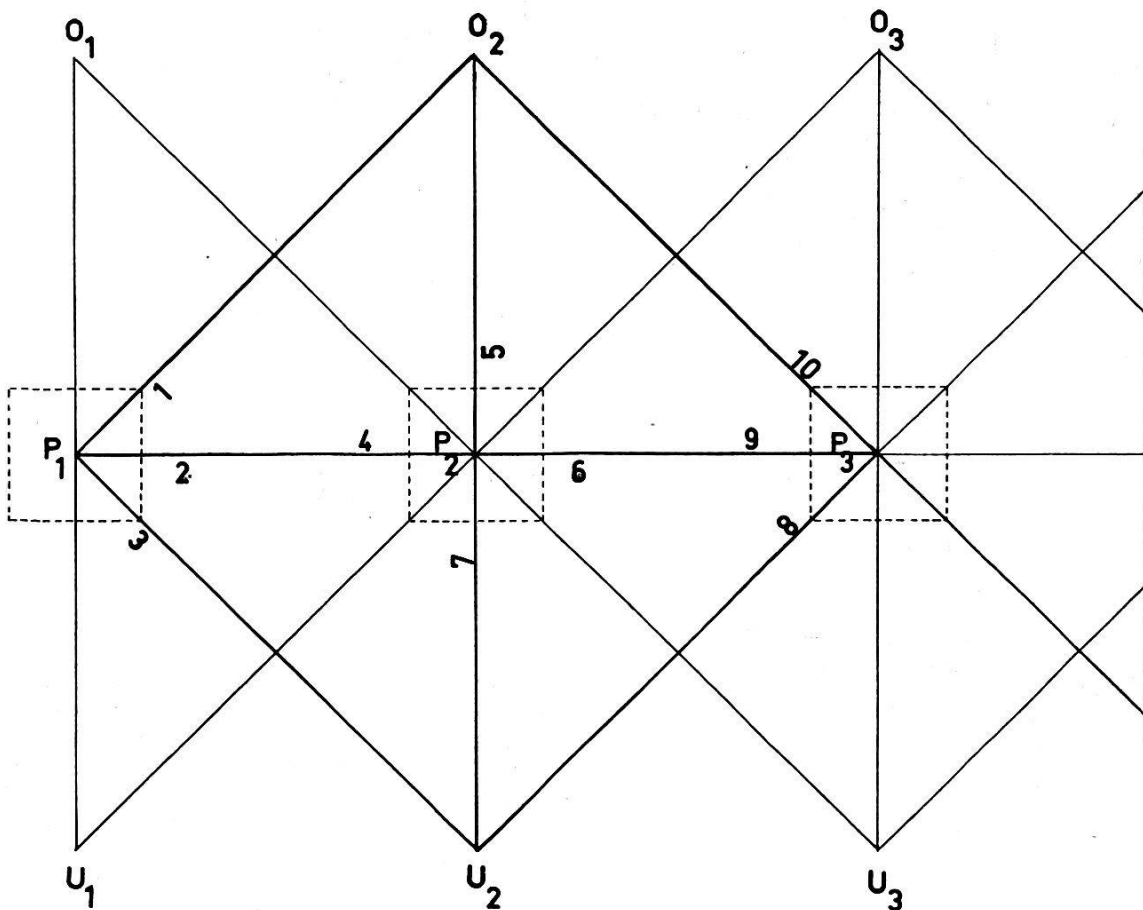
In der vorliegenden Studie wird versucht, die bei Radialtriangulationen auftretende Raute vermittelnd auszugleichen. Nimmt man an, daß die Raute quadratförmig ist, so gewinnt man Fehlergleichungen mit nur einem einzigen Absolutglied F , das sich leicht ermitteln läßt. Damit ergeben sich die Verbesserungen an die Näherungskordinaten als lineare Funktionen von F . Ist eine Raute fertig berechnet, wird die nächste Raute an sie angehängt. Das Vorgehen wird dann wiederholt und fortgesetzt bis zur letzten Raute des Streifens.

Résumé

L'étude présente est un essai de compensation moyennante du losange qu'on obtient dans les triangulations radiales. Si l'on admet que le losange est quadratique, on obtient des équations d'observation avec un seul terme absolu « F » qui est facile à trouver. Par cela il en résultent des corrections aux coordonnées rapprochées comme fonctions linéaires de « F ». Aussitôt que le calcul d'un losange est terminé, on y ajoute le prochain losange. Ensuite on répète et continue le calcul jusqu'au dernier losange de la bande.

Der Zweck der rechnerischen Radialtriangulation ist die rechnerische Ermittlung der Koordinaten der Radial- und Rautenpunkte. Die Berechnungen gründen sich nur auf Winkelmessungen in den Radialpunkten, welche mittels des Radialtriangulators mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden können.

Figur 1 zeigt den Anfang eines Flugbildstreifens, worin alle gezeichneten Richtungen von den Radialpunkten P_1, P_2, P_3, \dots aus gemessen worden sind. Wären die Koordinaten von zwei benachbarten Radialpunkten bekannt, so ließen sich alle anderen eingeschnittenen Punkte



Figur 1

berechnen. Da dies nicht der Fall ist, nimmt man die Koordinaten der ersten zwei Radialpunkte für die ersten Rechenstufen beliebig an.

Wegen der in den Luftbildern vorhandenen Neigungsfehler und wegen der Einflüsse der Höhenunterschiede sieht man davon ab, eine strenge Ausgleichung durchzuführen. Die Beobachtungen werden im allgemeinen in Gruppen unterteilt, wobei jede Gruppe aus 10 Richtungen besteht und eine und dieselbe Figur, die sogenannte Raute, bildet (siehe Fig. 2). Sie ist für die Radialtriangulation eine typische Figur. Bei den Berechnungen werden die Beobachtungen in jeder Raute einzeln ausgeglichen. Zur Berechnung der Koordinaten bedient man sich der Koordinaten der vorhergehenden Raute.

1. Das Problem

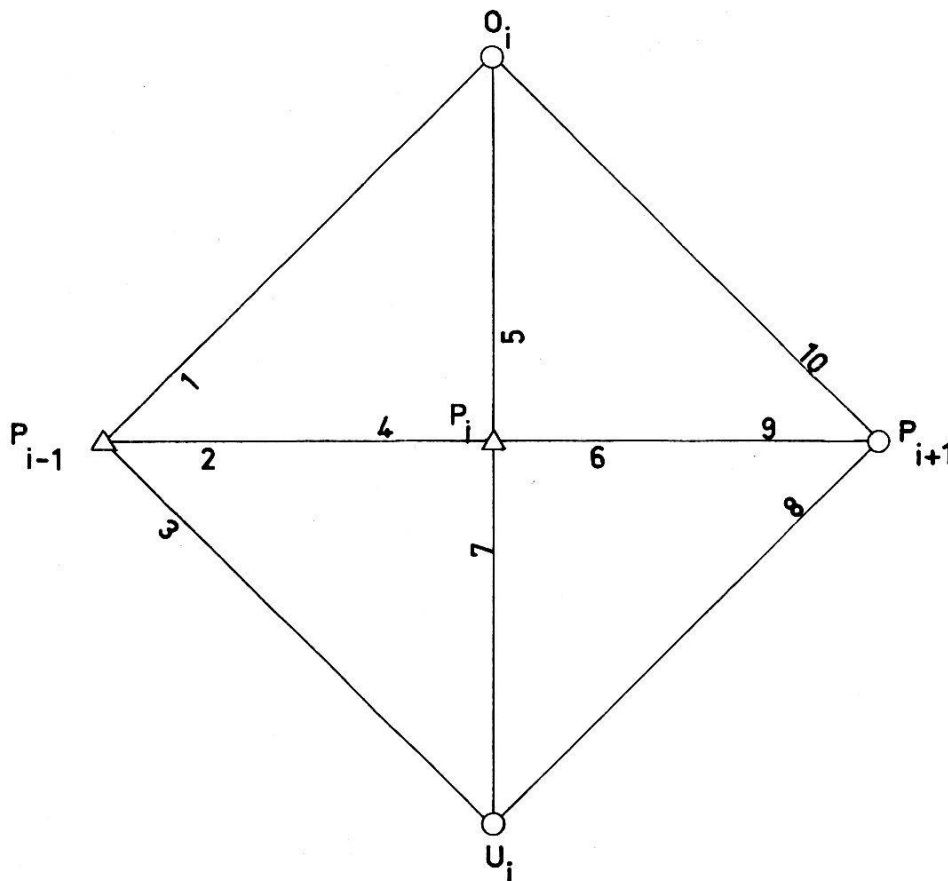
Das Problem läßt sich kurz wie folgt zusammenfassen: Aus den vorher ermittelten (für die erste Raute angenommenen) Koordinaten der Radialpunkte P_{i-1} und P_i sowie aus den 10 gemessenen und in Figur 2 eingezeichneten Richtungen sollen die Koordinaten der Rautenpunkte O_i und U_i sowie der Radialpunkt P_{i+1} berechnet werden.

Zwischen den 10 Beobachtungen besteht nur eine einzige Bedingung, nämlich

$$\frac{\sin(\bar{2} - \bar{1}) \cdot \sin(\bar{6} - \bar{5} + \bar{10} - \bar{9}) \cdot \sin(\bar{9} - \bar{8}) \cdot \sin(\bar{3} - \bar{2} + \bar{4} - \bar{7})}{\sin(2 - \bar{1} + \bar{5} - \bar{4}) \cdot \sin(\bar{10} - \bar{9}) \cdot \sin(\bar{7} - \bar{6} + \bar{9} - \bar{8}) \cdot \sin(\bar{3} - \bar{2})} = 1$$

worin $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{10}$ die ausgeglichenen Richtungen bedeuten. Bezeichnet man die Verbesserungen an den beobachteten Richtungen mit v_1, v_2, \dots, v_{10} , die Koeffizienten dieser Verbesserungen mit a_1, a_2, \dots, a_{10} und den Widerspruch mit W , so lautet die Bedingungsgleichung wie folgt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{10} v_{10} - W = 0 \quad (1)$$



Figur 2

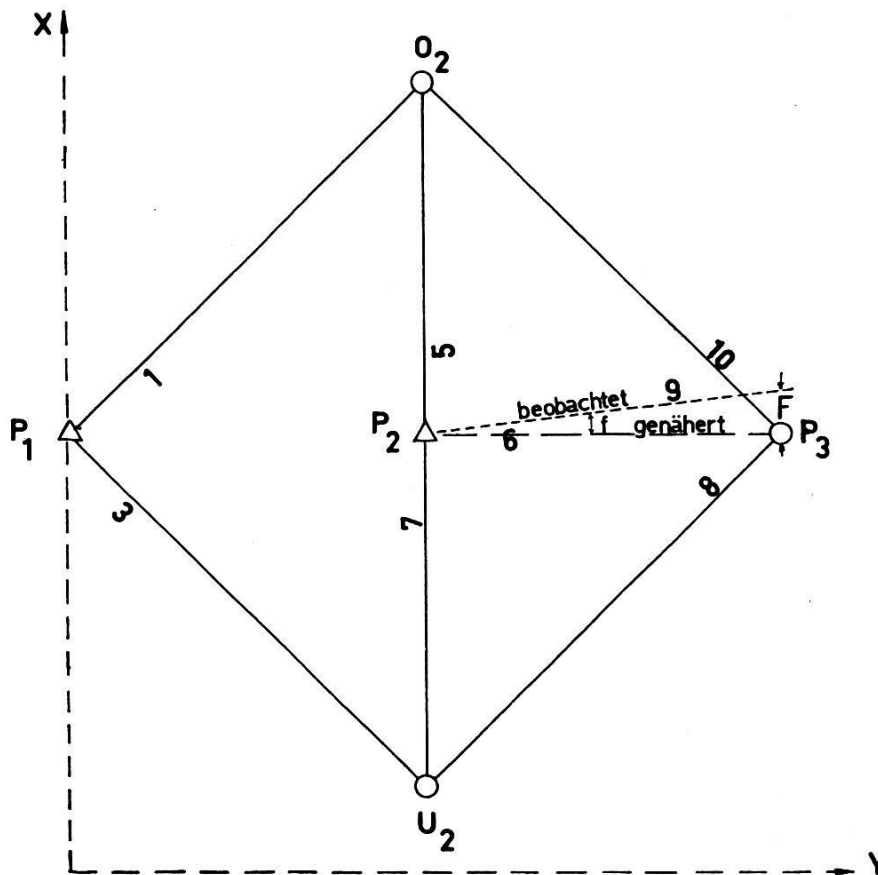
Die Berechnung der Koeffizienten a_i nimmt viel Zeit in Anspruch. Wie bereits erwähnt, lohnt sich der große Rechenaufwand wegen der unvermeidbaren Unsicherheiten der Radialtriangulation nicht. Ackermann [1] (1959/60, S. 81) hat die Berechnungen erheblich reduziert, indem er die Raute als quadratförmig angenommen hat. In seiner erwähnten Veröffentlichung hat er die Verbesserungen an den gesuchten Koordinaten direkt als Funktion des Widerspruches angegeben, den man aus einer einfachen Formel ermitteln kann.

Der vorliegende Artikel befaßt sich mit einer ähnlichen Lösung, in der die quadratförmige Raute vorausgesetzt und das Problem vermittelnd ausgeglichen wird.

2. Die Lösung

Figur 3 zeigt die erste Raute in einer Rautenkette. Die Koordinaten der Radialpunkte P_1 und P_2 werden in einem beliebigen Koordinatensystem so gewählt, daß das Azimut $(P_1 P_2) = 100\text{g}$ ist. Die Distanz $\overline{P_1 P_2}$ entspricht der Luftbasis; sie kann vorläufig beliebig gewählt werden.

Für die weitere Behandlung des Problems werden die Radialpunkte P_1 und P_2 als Festpunkte angenommen. Mit dieser Annahme bekommen die Richtungen 2 und 4 außer den Orientierungsunbekannten keine Verbesserungen. Deshalb sind diese zwei Richtungen in der Figur 3 nicht eingetragen.



Figur 3

2.1. Die Orientierungsunbekannten

Bei den geodätischen Triangulationen werden die verschiedenen Richtungssätze um die Orientierungsunbekannten durch die Ausgleichung so gedreht, daß eine optimale Anpassung der Richtungen erreicht wird. Da diese Anpassung bei der Radialtriangulation durch die gegenseitige Orientierung der Luftbilder im Radialtriangulator geschieht, nehmen wir die Orientierungsunbekannten gleich Null an. Die Tatsache, daß jeder beobachtete Richtungssatz nur mit einem Festpunkt verbunden ist, rechtfertigt diese Annahme.

2.2. Die Abrisse

Ist $P_1 O_2 P_3 U_2$ die erste Raute in der Kette, so werden die Richtungssätze auf P_1 und P_2 so orientiert, daß das Azimut* $(P_1 P_2) = 100^\circ$ ist. Es ergeben sich die beobachteten Azimute.

Die Berechnungen der beobachteten Azimute $(O_2 P_3)$ und $(U_2 P_3)$ ist umständlicher. Man erhält sie aus

$$\begin{aligned}(O_2 P_3) &= (P_2 O_2) + (6 - 5) + (10 - 9) \\(U_2 P_3) &= (P_2 U_2) - (7 - 6) - (9 - 8)\end{aligned}\tag{2}$$

2.3. Die Näherungskordinaten

Aus den Koordinaten der Festpunkte P_1 und P_2 und den beobachteten Azimuten $(P_1 O_2)$, $(P_2 O_2)$, $(P_1 U_2)$ und $(P_2 U_2)$ werden die Näherungskordinaten der Rautenpunkte O_2 und U_2 errechnet.

Mit Hilfe dieser Näherungskordinaten sowie mit den beobachteten Azimuten $(O_2 P_3)$ und $(U_2 P_3)$ werden die Näherungskordinaten des Radialpunktes P_3 berechnet (siehe Fig. 3).

2.4. Die Fehlergleichungen

Führt man die Verbesserungen $\xi_o, \eta_o, \xi_u, \eta_u$ und ξ_p, η_p an den Näherungskordinaten X_o', Y_o', X_u', Y_u' und X_p', Y_p' der Punkte O_2, U_2 und P_3 der Reihe nach ein, so lauten die Fehlergleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned}v_1 &= a_1 \xi_o + b_1 \eta_o && + f_1 \\v_3 &= && e_3 \xi_u + g_3 \eta_u + f_3 \\v_5 &= a_5 \xi_o + b_5 \eta_o && + f_5 \\v_6 &= && c_6 \xi_p + d_6 \eta_p + f_6 \\v_7 &= && e_7 \xi_u + g_7 \eta_u + f_7 \\v_8 &= && c_8 \xi_p + d_8 \eta_p + e_8 \xi_u + g_8 \eta_u + f_8 \\v_9 &= && c_9 \xi_p + d_9 \eta_p + f_9 \\v_{10} &= a_{10} \xi_o + b_{10} \eta_o + c_{10} \xi_p + d_{10} \eta_p && + f_{10}\end{aligned}$$

worin

$$\text{die Koeffizienten von } \xi = \frac{-\sin z_i}{D_i} \cdot \varrho,$$

$$\text{die Koeffizienten von } \eta = \frac{\cos z_i}{D_i} \cdot \varrho \text{ und}$$

das Absolutglied $f = \text{Näherungsazimut} - \text{beob. Azimut}$ sind.
($z = \text{das Azimut}$; $D = \text{die Distanz}$)

Da die Näherungskordinaten von O_2, U_2 und P_3 aus den beobachteten Azimuten $(P_1 O_2)$, $(P_2 O_2)$, $(P_1 U_2)$, $(P_2 U_2)$, $(O_2 P_3)$ und $(U_2 P_3)$ ermittelt

* Bei der i -ten Raute wird das ausgeglichene Azimut $(P_{i-1} P_i)$ der vorhergehenden Raute als Orientierung genommen. Siehe Abschnitt 2.6.

worden sind, so werden die entsprechenden genäherten Azimute gleich groß sein. Damit wird

$$f_1 = f_3 = f_5 = f_7 = f_8 = f_{10} = 0$$

Die einzigen Absolutglieder treten nur dann in den Gleichungen von v_6 und v_9 auf, wo leicht zu erkennen ist, daß

$$f_6 = f_9$$

gilt. Der Wert von $f_6 = f_9$ oder abgekürzt $= f$ entspricht dem Widerspruch in der Bedingungsgleichung (1). Er gibt einen Einblick in die Genauigkeit der Messungen.

Wenn die quadratförmige Raute vorausgesetzt wird, vereinfacht sich die Ausgleichung. In diesem Fall werden die Azimute ein Vielfaches von 50g , und wenn man $\overline{P_1 P_2} = D$ annimmt, so wird

$$\left. \begin{aligned} P_1 P_2 = P_2 P_3 = P_2 U_2 = P_2 O_2 = D \\ P_1 O_2 = P_1 U_2 = O_2 P_3 = U_2 P_3 = D \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die aus diesen Annahmen ermittelten Koeffizienten werden nicht stark von den strengen Werten abweichen.

Um die Koeffizienten der Fehlergleichungen von den Distanzen unabhängig zu machen, multiplizieren wir alle diese Gleichungen mit D/ϱ . Damit werden die Fehlergleichungen

| | ξ_o | η_o | ξ_p | η_p | ξ_u | η_u | f |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|-----|
| V_1 | -0,5 | +0,5 | | | | | |
| V_3 | | | | | -0,5 | -0,5 | |
| V_5 | | +1,0 | | | | | |
| V_6 | | | -1,0 | | | | +F |
| V_7 | | | | | | -1,0 | |
| V_8 | | | -0,5 | +0,5 | +0,5 | -0,5 | |
| V_9 | | | -1,0 | | | | +F |
| V_{10} | +0,5 | +0,5 | -0,5 | -0,5 | | | |

worin

$$V_i = \frac{v_i}{\varrho} D, \quad F = \frac{f}{\varrho} D$$

Weil das Absolutglied f nur bei der Richtung $P_2 P_3$ auftritt, so könnte man den Wert von F präzisieren, indem man D durch die Distanz $\overline{P_2 P_3}$

ersetzt. Diese Distanz ergibt sich genau* aus den Näherungskoordinaten von P_3 und den Koordinaten von P_2 . Es ist

$$\overline{P_2 P_3} = Y_{P_3} - Y_{P_2}$$

Damit wird
$$F = \frac{f}{\varrho} (Y_{P_3} - Y_{P_2}) \quad (5)$$

2.5. Die Normalgleichungen

Nimmt man an, daß alle Richtungen dasselbe Gewicht haben (siehe [2], S. 52), so lauten die Koeffizienten der Normalgleichungen wie folgt:

| ξ_o | η_o | ξ_p | η_p | ξ_u | η_u | |
|---------|----------|---------|----------|---------|----------|-------|
| + 0,50 | | - 0,25 | - 0,25 | | | |
| | + 1,50 | - 0,25 | - 0,25 | | | |
| | | + 2,50 | | - 0,25 | + 0,25 | - 2 F |
| | | | + 0,50 | + 0,25 | - 0,25 | |
| | | | | + 0,50 | | |
| | | | | | + 1,50 | |

2.6. Die endgültigen Koordinaten

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt die folgenden Verbesserungen:

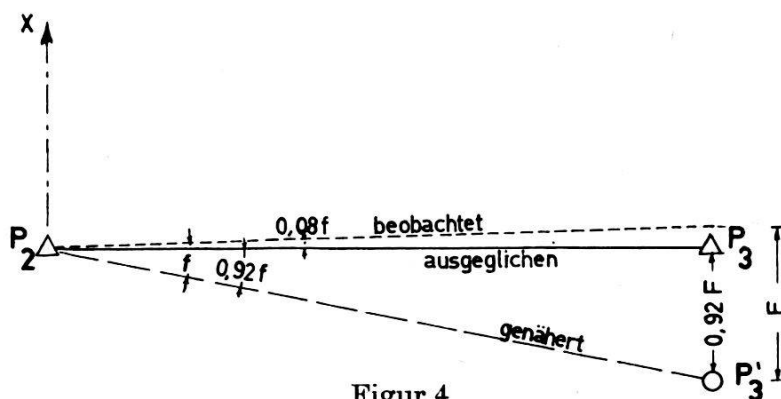
$$\begin{aligned} \xi_o &= + 0,46 F & , & & \eta_o &= + 0,15 F \\ \xi_p &= + 0,92 F & , & & \eta_p &= 0 \\ \xi_u &= + 0,46 F & , & & \eta_u &= - 0,15 F \end{aligned} \quad (6)$$

Die endgültigen Koordinaten der gesuchten Punkte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} X_{O_2} &= X_{O'_2} + \xi_o & , & & Y_{O_2} &= Y_{O'_2} + \eta_o \\ X_{P_3} &= X_{P'_3} + \xi_p & , & & Y_{P_3} &= Y_{P'_3} \\ X_{U_2} &= X_{U'_2} + \xi_u & , & & Y_{U_2} &= Y_{U'_2} + \eta_u \end{aligned} \quad (7)$$

Für die weiteren Berechnungen der Rautenkette braucht man das ausgeglichene Azimut ($P_2 P_3$), welches aus den endgültigen Koordinaten gerechnet werden kann. Praktischer aber ist die Berechnung mit Hilfe einer an das genäherte oder beobachtete Azimut zu bringenden Verbesserung Δz . Aus Figur 4 und den Gleichungen (5) und (6) erkennt man, daß

* Die Richtungen $O_2 P_3$ und $U_2 P_3$ schneiden sich in einem ungefähr rechten Winkel. Eventuell vorhandene Meßfehler haben keinen Einfluß auf die Ordinate Y_{P_3} .



Figur 4

$$\Delta z = \frac{-\xi_P}{P_2 P_3} \cdot \varrho = \frac{-\xi_P}{(Y_{P_3} - Y_{P_2})} \cdot \varrho = -\frac{f}{F} \cdot \xi_P = -0,92 f \quad (8)$$

Damit wird das ausgeglichene Azimut

oder

$$\begin{aligned} (P_2 P_3)_{\text{ausgeglichen}} &= (P_2 P_3)_{\text{genähert}} - 0,92 f \\ (P_2 P_3)_{\text{ausgeglichen}} &= (P_2 P_3)_{\text{beobachtet}} + 0,08 f \end{aligned} \quad (9)$$

Damit ist die Ausgleichung der ersten Raute beendet. An sie wird die zweite Raute angehängt und nach demselben Prinzip ausgeglichen. Punkt P_3 übernimmt die Rolle eines Festpunktes (neben Punkt P_2). Die Richtungssätze werden nach dem ausgeglichenen Azimut ($P_2 P_3$) orientiert.

3. Das Verfahren «zusammengefaßt»

Die Ergebnisse dieser Arbeit können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Mit Hilfe der gemessenen Richtungen werden die Näherungskordinaten der oberen und unteren Rautenpunkte O_2 und U_2 der Reihe nach gerechnet, nachher die des Radialpunktes P_3 .
- Man rechnet das genäherte Azimut ($P_2 P_3$) und bildet f (im Sinne Näherungsazimut – beob. Azimut). Das Absolutglied F ergibt sich aus Gleichung (5).
- Die Verbesserungen an den Näherungskordinaten lassen sich nach Gleichung (6) errechnen. Damit ergeben sich die endgültigen Koordinaten der Punkte O_2 , U_2 und P_3 .
- Die Berechnung der nächsten Raute erfolgt nach demselben Verfahren, indem man P_2 und P_3 als Festpunkte nimmt und die Koordinaten von O_3 , U_3 und P_4 ermittelt. Die Ausgleichung wird schrittweise bis zur letzten Raute in der Kette fertiggeführt.

Literatur

- Ackermann, F.: On the adjustment of Rhomboids in Radial Triangulation. Photogrammetria 1959/60, p. 81 (in [2] wiederangegeben).
- I.T.C.: Radial Triangulation. Chapter III. 2, Vol. III, p. 52, Textbook of Photogrammetry, 1963.