Zweigruppenverfahren zur Ausgleichung von kleinen Triangulierungsnetzen

Autor(en): **Dimow, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **67 (1969)**

Heft 8

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-223002

DK 528.143:528.41

Zweigruppenverfahren zur Ausgleichung von kleinen Triangulierungsnetzen

L. Dimow

Anmerkung der Redaktion

Der vorliegende Aufsatz, der sich mit dem Zweigruppenverfahren der Ausgleichung von Triangulationsnetzen befaßt, enthält kaum noch nicht Bekanntes. Sein Wert liegt darin, daß das Verfahren anhand von zwei einfachen Beispielen gezeigt wird und damit vielleicht dem Anfänger so verständlicher gemacht werden kann als durch Aufstellen vollständiger Formeln für allgemeine Systeme. Die praktische Bedeutung für kleine Systeme dürfte im heutigen Zeitpunkt mit Rücksicht auf die automatische Datenverarbeitung gering sein.

Sind Triangulierungsnetze in einem Guß auszugleichen, dann wird wegen der großen Zahl der Normalgleichungen die Rechenarbeit ganz beträchtlich wachsen. Daher entsteht der Wunsch, die Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen zu zerlegen und jede für sich allein zu behandeln. Diese Einteilung kann nach der Art der Bedingungsgleichungen vorgenommen werden. Zum Beispiel in der ersten Gruppe alle Dreiecksbedingungen (voneinander unabhängigen Gleichungen) und in der zweiten Gruppe alle anderen: Stations- und Seitenbedingungen.

Um den Entwicklungsgang leicht überschauen zu können, soll die Herleitung des Zweigruppenverfahrens am Beispiel von nur vier Bedingungsgleichungen erfolgen; die Prinzipien können dann auf größere Systeme leicht übertragen werden.

Aus den für ein vollständiges Viereck (Bild 1) vorliegenden Bedingungsgleichungen

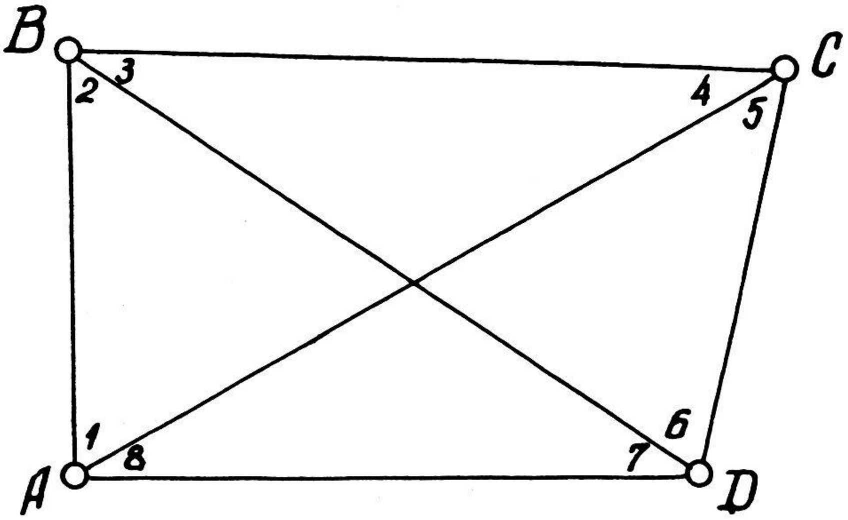

Bild 1

$$
\left.\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{lr}
1.\ a) & v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_a = 0 \\
2.\ b) & v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_b = 0
\end{array}\right\} & \text{1. Gruppe} \\
\left.\begin{array}{lr}
3.\ c) & v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_c = 0 \\
4.\ d) & \delta_1 v_1 - \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 - \delta_4 v_4 + \delta_5 v_5 - \\
 & - \delta_6 v_6 + \delta_7 v_7 - \delta_8 v_8 + w_d = 0 \\
 & \lg \dfrac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} = w_d
\end{array}\right\} & \text{2. Gruppe}
\end{array}\right\} \qquad (1)
$$

folgt ein System von vier Normalgleichungen:

$$
\left.\begin{array}{ll}
1. & [aa]\,k_a + [ac]\,k_c + [ad]\,k_d + w_a = 0 \\
2. & + [bb]\,k_b + [bc]\,k_c + [bd]\,k_d + w_b = 0 \\
3. & [ac]\,k_a + [bc]\,k_b + [cc]\,k_c + [cd]\,k_d + w_c = 0 \\
4. & [ad]\,k_a + [bd]\,k_b + [cd]\,k_c + [dd]\,k_d + w_d = 0
\end{array}\right\} \qquad (2)
$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$
\begin{array}{l}
k_a = - \dfrac{w_a}{[aa]} - \dfrac{[ac]}{[aa]} k_c - \dfrac{[ad]}{[aa]} k_d \\[2ex]
k_b = - \dfrac{w_b}{[bb]} - \dfrac{[bc]}{[bb]} k_c - \dfrac{[bd]}{[bb]} k_d
\end{array} \qquad (3)
$$

Wir setzen die Werte k_a und k_b in die Gleichungen (3) und (4) ein und erhalten als reduzierte Normalgleichungen:

$$
\begin{array}{l}
[CC]\,k_c + [CD]\,k_d + W_C = 0 \\
[CD]\,k_c + [DD]\,k_d + W_D = 0
\end{array} \qquad (4)
$$

wobei

$$
\left.\begin{array}{l}
[CC] = [cc] - \dfrac{[ac]\,[ac]}{[aa]} - \dfrac{[bc]\,[bc]}{[bb]} \\[2ex]
[CD] = [cd] - \dfrac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \dfrac{[bc]\,[bd]}{[bb]} \\[2ex]
[DD] = [dd] - \dfrac{[ad]\,[ad]}{[aa]} - \dfrac{[bd]\,[bd]}{[bb]} \\[2ex]
W_C = w_c - \dfrac{[ac]}{[aa]} w_a - \dfrac{[bc]}{[bb]} w_b \\[2ex]
W_D = w_d - \dfrac{[ad]}{[aa]} w_a - \dfrac{[bd]}{[bb]} w_b
\end{array}\right\} \qquad (5)
$$

Wenn die Aufteilung in zwei Gruppen wie angegeben vorgenommen wird, dann erhält man, da die gemischten Koeffizienten

$$[ab] = [ac] = \dots = [ed] = 0$$

und die quadratischen Koeffizienten

$$[aa] = [bb] = \dots = [ee] = +3$$

sind, für die erste Gruppe folgendes einfache Normalgleichungssystem:

$$3\,k_i' + w_i = 0 \tag{7}$$

Daraus folgen sofort die Näherungskorrelaten der ersten Gruppe sowie die ersten Teilverbesserungen:

$$k_i = -\frac{w_i}{[ii]} = -\frac{w_i}{3} = v_i' \tag{8}$$

Die Gesamtkorrelaten sind:

$$\left.\begin{aligned} k_a &= -\frac{w_a}{[aa]} - \frac{[af]}{[aa]} k_f - \frac{[ag]}{[aa]} k_g = k_a' + k_a'' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_e &= -\frac{w_e}{[ee]} - \frac{[ef]}{[ee]} k_f - \frac{[eg]}{[ee]} k_g = k_e' + k_e'' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

oder

$$k_i = k_i' + k_i'' \quad ; \quad k_i'' = -\frac{[if]}{[ii]} k_f - \frac{[ig]}{[ii]} k_g \quad ; \quad (i = a, b, c, d, e) \tag{10}$$

Die Gesamtverbesserung ist:

$$v_i = v_i' + v_i'' \,, \tag{11}$$

wobei

$$v_i'' = a_i\,k_a'' + b_i\,k_b'' + c_i\,k_c'' + d_i\,k_d'' + e_i\,k_e'' + f_i\,k_f + g_i\,k_g \tag{12}$$

Man wird die umgeformten Widersprüche W zweckmäßiger aus den entsprechenden ursprünglichen Bedingungsgleichungen berechnen, indem man in diese die bereits teilverbesserten Beobachtungen einführt.

Man kann daher das reduzierte Normalgleichungssystem (4) sogleich aus den Bedingungsgleichungen (1) aufstellen.

Das Zweigruppenverfahren ist besonders für solche Fälle geeignet, bei denen ein Teil der Normalgleichungen sehr einfach beschaffen und demzufolge leicht aufzulösen ist.

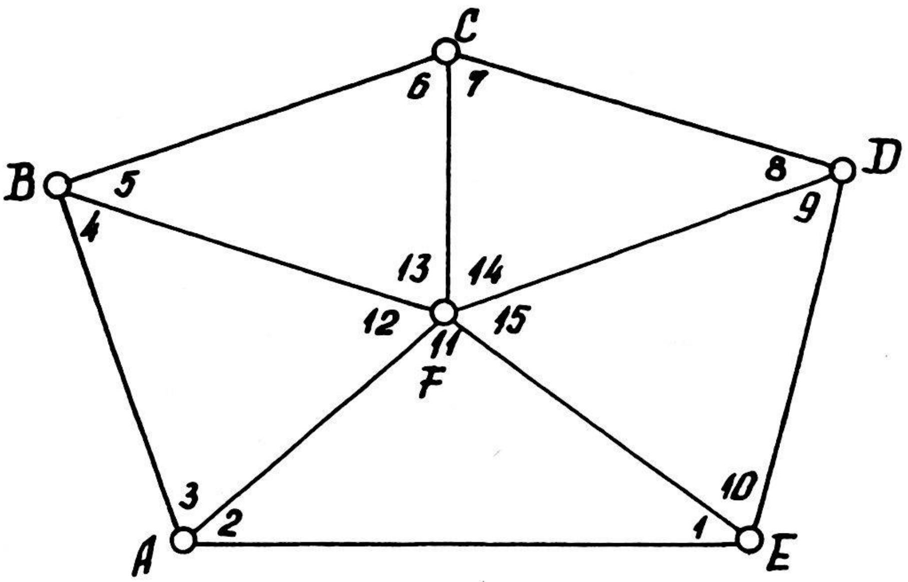

Bild 2

Die für das in Bild 2 angegebene Dreiecksnetz aufzustellenden Bedingungsgleichungen lauten in allgemeiner Schreibweise:

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll}
1.\ \text{a)} & v_1 + v_2 + v_{11} + w_a = 0 \\
2.\ \text{b)} & v_3 + v_4 + v_{12} + w_b = 0 \\
3.\ \text{c)} & v_5 + v_6 + v_{13} + w_c = 0 \\
4.\ \text{d)} & v_7 + v_8 + v_{14} + w_d = 0 \\
5.\ \text{e)} & v_9 + v_{10} + v_{15} + w_e = 0
\end{array}\right\} \text{1. Gruppe} \\
\left.\begin{array}{ll}
6.\ \text{f)} & v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_f = 0 \\
7.\ \text{g)} & \delta_1 v_1 - \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 - \delta_4 v_4 + \delta_5 v_5 - \delta_6 v_6 + \\
 & \quad + \delta_7 v_7 - \delta_8 v_8 + \delta_9 v_9 - \delta_{10} v_{10} + w_g = 0
\end{array}\right\} \text{2. Gruppe}
\end{array}\right\} \quad (6)
$$

$$
\lg \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10} = w_g
$$

Es ergibt sich also für die Ausgleichung von kleinen Triangulierungsnetzen folgender vereinfachter Rechengang:

1. Verteilung der Dreieckswidersprüche als erste Teilverbesserungen v_i'.
2. Berechnung der W mit den durch v_i' teilverbesserten Beobachtungen.
3. Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen der zweiten Gruppe. Berechnung der Korrelaten k_f und k_g:

$$[GG] = [gg] - \frac{[ag]\,[ag]}{[aa]} - \frac{[bg]\,[bg]}{[bb]} - \frac{[cg]\,[cg]}{[cc]} - \frac{[dg]\,[dg]}{[dd]} - \frac{[eg]\,[eg]}{[ee]} = +\,3{,}22$$

$$[FG] = [fg] - \frac{[af]\,[ag]}{[aa]} - \frac{[bf]\,bg]}{[bb]} - \frac{[cf]\,[cg]}{[cc]} - \frac{[df]\,[dg]}{[dd]} - \frac{[ef]\,[eg]}{[ee]} = 0{,}0$$

$$[FF] = [ff] - \frac{[af]\,[af]}{[aa]} - \frac{[bf]\,[bf]}{[bb]} - \frac{[cf]\,[cf]}{[cc]} - \frac{[df]\,[df]}{[dd]} - \frac{[ef]\,[ef]}{[ee]} = +\,3{,}33$$

$$\left.\begin{aligned}[FF]\,k_f + W_F &= 0\\ [GG]\,k_g + W_G &= 0\end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned}3{,}33\,k_f - 31 &= 0\\ 3{,}22\,k_g - 32 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$k_f = +\,9{,}3 \quad ; \quad k_g = +\,9{,}9\,.$$

4. Berechnung der Näherungskorrelaten k_i'' und der zweiten Teilverbesserungen:

$$v_i''\,k_c'' = -\frac{[cf]}{[cc]}\,k_f - \frac{[cg]}{[cc]}\,k_g = -\,3{,}6 \quad ;$$

$$k_a'' = -\frac{[af]}{[aa]}\,k_f - \frac{[ag]}{[aa]}\,k_g = -\,1{,}3 \quad ; \quad k_b'' = -\frac{[bf]}{[bb]}\,k_f - \frac{[bg]}{[bb]}\,k_g = -\,1{,}4 \quad ;$$

$$k_d'' = -\frac{[df]}{[dd]}\,k_f - \frac{[dg]}{[dd]}\,k_g = -\,3{,}4 \quad ; \quad k_e'' = -\frac{[ef]}{[ee]}\,k_f - \frac{[eg]}{[ee]}\,k_g = -\,5{,}7\,.$$

Bei dem vorliegenden Verfahren sind keine Berechnungen der umgeformten Koeffizienten der verbleibenden Bedingungsgleichungen (2. Gruppe) nötig.

Die Berechnungen sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 1

Winkel	Beobachtete Winkel	$v_i = -\frac{w_i}{3}$	Verbesserte Winkel	lg sin α	δ_i	v_i''	Ausgeglichene Winkel	$v_i = v_i' + v_i'$
1	74,4357	+15	74,4372	9,964005	0,29	+1,5	74,43735	+16,5
2	43,7133	+15	43,7148	9,802066	0,83	−9,5	43,71385	+ 5,5
11	81,8465	+15	81,8480			+8,0	81,84880	+23,0
	199,9955	+45	200,0000			0,0	200,00000	+45,0
	$w_a = -45$							
3	75,3648	− 7	75,3641	9,966635	0,28	+1,4	75,36424	− 5,6
4	45,3497	− 7	45,3490	9,815317	0,79	−9,3	45,33807	−16,3
12	79,2876	− 7	79,2869			+7,9	79,28769	+ 0,9
	200,0021	−21	200,0000			0,0	200,00000	−21,0
	$w_b = +21$							
5	52,7993	+14	52,8007	9,867774	0,62	+2,5	52,80095	+16,5
6	62,3851	+14	62,3865	9,918328	0,46	−8,2	62,38568	+ 5,8
13	84,8114	+14	84,8128			+5,7	84,81337	+19,7
	199,9958	+42	200,0000			0,0	200,00000	+42,0
	$w_c = -42$							
7	65,5055	−15	65,5040	9,932854	0,41	+0,7	65,50407	−14,3
8	71,9147	−15	71,9132	9,956286	0,32	−6,6	71,91254	−21,6
14	62,5843	−15	62,5828			+5,9	62,58339	− 9,1
	200,0045	−45	200,0000			0,0	200,00000	−45,0
	$w_d = +45$							
9	35,3496	+13	35,3509	9,721968	1,09	+5,1	35,35141	+18,1
10	73,1814	+13	73,1827	9,960271	0,30	−8,7	73,18183	+ 4,3
15	91,4651	+13	91,4664			+3,6	91,46676	+16,6
	199,9961	+39	200,0000	$\sum_1 = 9{,}453{,}236$		0,00	200,00000	+39,0
	$w_e = -39$			$\sum_2 = 9{,}453{,}268$				
				$w_f = \sum_1 - \sum_2 = -32$				

Tabelle 2

Nr.	a	b	c	d	e	f	g	v_i''
1	+1						+0,29	+1,5
2	+1						−0,83	−9,5
3		+1					+0,28	+1,4
4		+1					−0,79	−9,3
5			+1				+0,62	+2,5
6			+1				−0,46	−8,2
7				+1			+0,41	+0,7
8				+1			−0,32	−6,6
9					+1		+1,09	+5,1
10					+1		−0,30	+3,6
11	+1					+1		+8,0
12		+1				+1		+7,9
13			+1			+1		+5,7
14				+1		+1		+5,9
15						+1		+3,6

Literatur

Reissmann, G.: Ausgleichungsrechnung. VEB Verlag Bauwesen, Berlin 1962.